Учёные записки

научно-исследовательских кафедр Украины

отдел математический

1924 в. I

Харьков

1952

У. С. С. Р.

НАРКОМПРОС ▫ ▫ НАУЧНЫЙ КОМИТЕТ

Annales scientifiques des Institutions savantes de l'Ukraine.
Section Mathématique. Fascic. 1-er

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ КАФЕДР УКРАИНЫ

ОТДЕЛ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ

ВЫПУСК ПЕРВЫЙ

Научный редактор проф. С. И. БЕРНШТЕЙН
Redactum scientifique prof. S. BERNSTEIN

ИЗДАТЕЛЬСТВО „ПУТЬ ПРОСВЕЩЕНИЯ“ Н.К.П. У.С.С.Р.
1924

ТИПОГРАФИЯ ГОСУДАРСТВ. ИЗДАТЕЛЬСТВА
УКРАИНЫ ИМЕНИ Г. И. ПЕТРОВСКОГО

Р. У. П. 7521. Карта 931 Зак. № 242. Тираж 750.

ОГЛАВЛЕНИЕ
TABLE DES MATIÉRES

Значек * означает, что статья напечатана на иностранном языке; значек ** означает, что в конце статьи имеется резюме на иностранном языке.

Le signe * signifie, que le mémoire est exposé daus une langue étrangère; le signe ** signifie la présence à la fin du mémoire d'un resumé daus une langue étrangère.

НЕКРОЛОГ

Т. И. КОТОВ

[1895—1923]

8 ноября 1923 г. скончался после непродолжительной болезни профессор математики Института Народного Образования и член Научного Комитета, Тихон Иванович Котов. Покойному было всего 28 лет,— он родился в Харькове в 1895 г., в 1913 г. кончил здесь же гимназию (3-ью) с золотою медалью, еще на школьной скамье обратив внимание своих преподавателей своими способностями и любовью к математике. В том же году он поступил на математическое отделение физико-математического факультета и в 1917 г. кончил с дипломом 1-ой степени и золотою медалью за работу на факультетскую тему „О геодезических линиях" [1]). Оставленный при университете, он в течение ближайших двух лет сдал магистерские экзамены и был принят в число приват-доцентов, а с преобразованием Университета в Академию Теоретических Знаний получил звание профессора. С учреждением исследовательских кафедр он был утвержден действительным членом кафедры геометрии. В Университете, Академии и затем в И. Н. О. покойный читал теорию чисел, высшую алгебру, аналитическую геометрию в пространстве (один год), дифференциальное исчисление (после ухода профессора А. П. Пшеборского), вел практические занятия по аналитической геометрии с геометрическими приложениями дифференциального исчисления и интегрированию дифференциальных уравнений, а в последний год также читал теорию поверхностей. Кроме того, он читал в Х. Т. И. сначала проективную геометрию, затем аналитическую (после А. П. Пшеборского),—до последнего учебного года. Он читал также высшую математику в Сельско-Хозяйственном Институте и в Химико-Фармацевтическом, пользуясь репутацией одного из лучших харьковских преподавателей.

Деятельный член Харьковского Математического Общества, он сделал на заседаниях его ряд докладов, посвященных главным образом различным вопросам теории геодезических линий, составлявшей излюбленную область его работы. Но еще на студенческой скамье началась его научная работа,—свои первые доклады и рефераты он читал в заседаниях Математического Кружка [2]).

---

[1]) Отзыв о работе напечатан в записках Харьк. Универс. за 1917 г.

[2]) О геодезических линиях (доклад помещен в литографир. Записках Кружка т. I. вып. 3 1917 г)

Результатом его исследований явился ряд статей частью напечатанных, частью печатающихся:

1) Геодезические линии („Наука на Украине“ № 3).

2) Об асимптотических геодезических линиях (там же № 4).

3) О геодезических параллельных линиях и геодезических кругах (печатается в Моск. Математ. Сборнике, т. 31, в. 3—4).

4) О геодезических линиях, асимптотических к замкнутой геодезической линии (печат. там же).

5) Теория геодезических линий (печат. там же).

6) О замкнутых геодезических линиях на поверхностях вращения (печат. в Ученых Записках Научного Комитета, математический отдел, вып. 1-й).

Все эти статьи являются отдельными эпизодами обширной монографии, посвященной геодезическим линиям, над которой усиленно работал автор до последних дней жизни и которая должна была явиться его докторской диссертацией. Она была почти закончена—оставалось обработать последние параграфы.

Необходимо, чтобы этот труд, которому суждено было явиться трудом его жизни, был напечатан, по тому интересу, который он представляет сам по себе, и по тому актуальному значению, который он приобретает в связи с изменением наших воззрений на строение пространства, вызванным принципом относительности.

Кроме того, перу покойного принадлежит ряд рецензий на новинки русской математической литературы, напечатанных в „Науке на Украине“ (где и состоял секретарем редакции), „Студенте Революции“, „Пути Просвещения“ и „Книге“.

Последний год Т. И. Котов состоял членом Научного Комитета и принимал самое деятельное участие в его работе. С выполнением поручения Научного Комитета была связана и последняя его поездка в Москву, где он имел возможность войти в личное общение с московскими математиками и по возвращении оживленно передавал о вынесенных впечатлениях. Но эта поездка была для него роковою: на обратном пути, в вагоне, он, повидимому, заразился скарлатиной и по возвращении в Харьков заболел. Диагноз на скарлатину был поставлен только 7-го ноября, а 8-го Тихона Ивановича не стало.

Смерть его поразила всех его знавших. Не стало мягкого, доброго, деликатного человека, прекрасного лектора, талантливого ученого, уже проявившего себя в науке и подававшего еще больше надежд на будущее.

Мир праху его! *Д. Синцов.*

Задача об экстремуме интеграла $\int f(x,y,y')\,dx$ с переменными конечными точками.

А. П. Пшеборский.

1. Настоящая статья является первой из ряда статей, которые я намерен посвятить рассмотрению различных вопросов вариационного исчисления.

В ней я займусь исследованием вопроса об экстремуме интеграла

$$J = \int f(x,y,y')\,dx \tag{1}$$

при переменных конечных точках; как известно, вопрос этот затронут сравнительно недавно, где $f(x,y,y')$ функция класса (C''').

Везде в дальнейшем я буду пользоваться как терминологией, так и обозначениями, принятыми в „Vorlesungen über Variationsrechnung" Bolza и в „Leçons sur le calcul de variations" Hadamard'a.

Как известно, задачи об экстремуме интеграла (1) при переменных конечных точках могут быть следующих типов: 1) одна из конечных точек зафиксирована, а другая находится на данной кривой, 2) обе конечные точки находятся на данных кривых, 3) одна из конечных точек зафиксирована, а другая свободна в некоторой данной области и, наконец, 4) обе конечные точки свободны в двух данных областях.

В настоящей статье я остановлюсь на задачах первых двух типов. Как известно, в этом случае, если

$$y = \varphi(x) \tag{2}$$

представляет решение нашей задачи класса (C'') и если при этом допускаются вариации 1-ой степени близости, функция $\varphi(x)$ должна быть интегралом уравнения Эйлера

$$\frac{d}{dx} f_{y'} - f_y = 0, \tag{3}$$

т. е. кривая (2) должна быть экстремальной кривой.

Кроме того, если какая либо из конечных точек должна находиться на данной кривой

$$y = g(x), \tag{4}$$

где $g(x)$ функция класса (C') не равная постоянной, то для абсциссы ее, которую мы обозначим через t, должно выполняться условие трансверсальности

$$f\Big(t, \varphi(t), \varphi'(t)\Big) + \Big(g'(t) - \varphi'(t)\Big) f_{\varphi'}\Big(t, \varphi(t), \varphi'(t)\Big) = 0 \tag{5}$$

В случае, когда кривая (4) обращается в $y = c$, последнее условие заменяется условием

$$f_{\varphi'}\Big(c, \varphi(c), \varphi'(c)\Big) = 0 \tag{6}$$

Для дальнейшего чрезвычайно важным является введение понятия о трансверсальных кривых или трансверсалях.

Положим, что имеем некоторое семейство экстремалей интеграла (1)

$$y = \psi(x, \alpha), \tag{7}$$

под трансверсалями этого семейства подразумеваются кривые, которые пересекаются с кривыми (7) трансверсально, т. е. для которых в точках их пересечения с кривыми (7) удовлетворяется условие (5).

Как не трудно видеть, нахождение трансверсалей сводится к интегрированию обыкновенного уравнения 1-го порядка

$$f\Big(x, y, p(x,y)\Big) + \Big(y' - p(x,y)\Big) f_p\Big(x, y, p(x,y)\Big) = 0, \tag{9}$$

в котором $p(x, y)$ функция поля экстремалей (7).

Положим теперь, что имеем некоторую кривую класса C' в интервале $x_0 \leq x \leq x_1$

$$y = g(x) \tag{10}$$

Покажем, что при выполнении известных условий можно будет найти семейство экстремалей интеграла

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,dx, \tag{11}$$

для которых кривая (10) будет трансверсалью.

Действительно, пусть

$$y = k(x, a, b) \tag{12}$$

общий интеграл уравнения Эйлера для интеграла J.

Абсциссы точек на кривой (10) будем обозначать через t. Тогда получим кривые Эйлера, пересекающие кривую (10) трансверсально, если выразим через t произвольные постоянные a, b, определивши их из условий

$$k(t,a,b)=g(t), \tag{13}$$

$$f\Big(t,k(t,a,b),k'(t,a,b)\Big)+\Big(g'(t)-k'(t,a,b)\Big)f_{k'}\Big(t,k(t,a,b),k'(t,a,b)\Big)=0$$

Первое из этих условий—условие пересечения кривых (10) и (12), а второе—условие трансверсальности.

Уравнения (13) будут однозначно разрешимы относительно (a, b) и дадут нам некоторые функции класса C′ относительно t, если Якобиевский определитель этих уравнений относительно a, b.

$$\varDelta=f_{k'k'}\Big(t,k(t,a,b),k'(t,a,b)\Big)\Big(g'(t)-k'(t,a,b)\Big)\begin{vmatrix}k_a(t,a,b) & k_b(t,a,b)\\ k'_a(t,a,b) & k'_b(t,a,b)\end{vmatrix} \tag{14}$$

будет отличен от нуля. Заметим, что здесь значком ′ обозначены частные производные по t.

Определитель, входящий в выражение $\varDelta$, отличен от нуля, так как, по предположению, $k(x, a, b)$ — общий интеграл уравнения Эйлера. Таким образом, $\varDelta$ будет отличен от нуля, если в точке пересечения $g'(t)$ отлично от $k'(t)$, т. е. экстремаль не касается кривой (10) и, кроме того, если отлична от нуля функция $f_{k'k'}(x, k, k')$. Последнее имеет место, когда наша задача регулярна, а первое, когда она определенна, ибо при $g'(t)=k'(t)$ из условия трансверсальности (13) получим

$$f(t,k,k')=0,$$

чего быть не может в случае, если задача наша определенна, т. е. в случае, когда функция $f(x, y, y')$ сохраняет свой знак, не обращаясь в нуль в рассматриваемом поле.

В дальнейшем будем предполагать, что имеем дело с определенной задачей.

Решив уравнения (13) относительно (a, b), получим искомое семейство экстремалей

$$y=k\Big(x,a(t),b(t)\Big), \tag{15}$$

трансверсальных к кривой (10).

На всякой экстремали (15) рассматриваемого поля от точки пересечения с кривой (10) возьмем такой отрезок до точки с абсциссой x, чтобы имело место равенство

$$\int_t^x f(x,k,k')dx=A, \tag{16}$$

где A — данное число.

В силу того, что задача наша определена, из уравнения (16) можно определить x, как однозначную функцию от t.

Рассмотрим теперь кривую, параметрическими уравнениями которой служат уравнения

$$y = k\big(x, a(t), b(t)\big) \qquad \int_t^x f(x,k,k')dx = A \tag{17}$$

и покажем, что при изменении A получим семейство кривых трансверсальных к нашему семейству экстремалей (15).

В самом деле, для этого необходимо показать, что угловой коэффициент касательной к любой кривой (17) в точке пересечения с соответствующей кривой (15) удовлетворяет условию трансверсальности, т. е. условию

$$f(x,k,k') + \left(\frac{dy}{dx} - k'\right) f_{k'}(x,k,k') = 0,$$

при чем здесь, очевидно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$$

Из второго из уравнений (17) имеем

$$f\Big(x, k(x), k'(x)\Big)\frac{dx}{dt} - f\Big(t, k(t), k'(t)\Big) + \int_t^x \left(f_k \frac{\partial k}{\partial t} + f_{k'} \frac{\partial k'}{\partial t}\right) dx = 0. \tag{18}$$

Здесь нами введены под знаком интеграла следующие обозначения

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial k(x)}{\partial a} a' + \frac{\partial k(x)}{\partial b} b', \ \frac{\partial k'(x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial k(x)}{\partial t}\right) \tag{19}$$

что же касается символа $k'(t)$, то он представляет производную по t, входящему явно.

Интегрируя по частям второй член интеграла, входящего в (18), и помня, что $y = k(t,a,b)$ кривая Эйлера, а следовательно имеем тождественно

$$f_{k'} - \frac{d}{dt} f_{k'} = 0,$$

напишем соотношение (18) в виде

$$f\left(x, k(x), k'(x)\right)\frac{dx}{dt} + f_{k'}\left(x, k(x), k'(x)\right)\frac{\partial k(x)}{\partial t} - f\left(t, k(t), k'(t)\right)\frac{\partial k(t)}{\partial t} = 0, \tag{20}$$

где, согласно с (19)

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = \frac{\partial k(t,a,b)}{\partial a} a + \frac{\partial k(t,a,b)}{\partial b} b'$$

Но из первого из уравнений (17) имеем

$$\frac{\partial k(x)}{\partial t} = \frac{dy}{dt} - \kappa'(x)\frac{dx}{dt}. \qquad (21)$$

Кроме того, из соотношения $k(t,a,b) = g(t)$ находим

$$k'(t) + \frac{\partial k(t)}{\partial a}a' + \frac{\partial k(t)}{\partial b}b' = g'(t)$$

или, в силу (9)

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = g'(t) - k'(t). \qquad (22)$$

Подставляя значения (21) и (22) в соотношение (20), получим

$$f\big(x,k(x),k'(x)\big)\frac{dx}{dt} + f_{k'}\big(x,k(x),k'(x)\big)\left(\frac{dy}{dt} - k'(x)\frac{dx}{dt}\right) =$$

$$= f\big(t,k(t),k'(t)\big) + f_{k'}\big(t,k(t),k'(t)\big)\big(g'(t) - k'(t)\big).$$

В силу трансверсальности кривой $y = g(x)$, правая часть последнего равенства обращается в нуль, а потому последнее равенство обращается в следующее

$$f\big(x,k(x),k'(x)\big) + f_{k'}\big(x,k(x),k'(x)\big)\left(\frac{dy}{dx} - k'(x)\right) = 0.$$

Последнее соотношение и показывает, что кривая (17) пересекает трансверсально соответствующие экстремали

$$y = k\big(x,a(t),b(t)\big). \qquad (23)$$

Предположим теперь, что данная кривая $y = g(x)$ стягивается в точку $M(\alpha, \beta)$.

Тогда семейство экстремалей, проходящих через точку M, будет

$$y = k\big(x,a,b(a)\big) \qquad (24)$$

где b функция от a, определяемая из уравнения

$$k(\alpha,a,b) = \beta. \qquad (25)$$

Существование этой функции вытекает из того, что всегда можем предположить, в соответственной области, что $\frac{\partial k(\alpha,a,b)}{\partial b}$ отлично от нуля

Покажем, что все кривые

$$y = k\big(x, a, b(a)\big), \qquad \int_a^x f(x,k,k')\,dx = A, \tag{26}$$

где A переменный параметр, пересекают трансверсально семейство экстремалей (24). В силу определенности нашей задачи, второе из уравнений (26) разрешимо относительно x, a, следовательно, в (26) x и y можем рассматривать, как функции параметра a.

Дифференцируя по a второе из уравнений (26), принявши во внимание, что на основании (25)

$$\frac{dk(\alpha,a,b)}{d\alpha} = \frac{\partial k(\alpha,a,b)}{\partial a} + \frac{\partial k(\alpha,a,b)}{\partial b}\, b'(a) = 0,$$

после простых преобразований, получим

$$f\big(x,k(x),k'(x)\big)\frac{dx}{da} + \int_a^x \left(f_k \frac{dk}{d\alpha} + f_{k'}\frac{dk'}{d\alpha}\right) dx =$$

$$= f\big(x,k(x),k'(x)\big)\frac{dx}{d\alpha} + f_{k'}\big(x,k(x),k'(x)\big)\frac{dk(x)}{d\alpha} = 0. \tag{27}$$

Замечая далее, что на основании (23)

$$\frac{dy}{da} = k'(x)\frac{dx}{da} + \frac{dk(x)}{da},$$

где

$$\frac{dk(x)}{da} = \frac{\partial k(x)}{\partial a} + \frac{\partial k(x)}{\partial b} b',$$

и что для кривой (26)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{da} : \frac{dx}{da},$$

напишем соотношение (27) в виде

$$f\big(x,k(x),k'(x)\big) + \left(\frac{dy}{dx} - k'(x)\right) f_{k'}\big(x,k(x),k'(x)\big) = 0,$$

а это и показывает, что кривые (26) трансверсальны к семейству экстремалей (23). Полученные результаты очевидно представляют обобщение известных теорем Гаусса о геодезических параллелях и окружностях.

2. До сих пор мы указали на следующие необходимые условия существования экстремума интеграла

$$J = \int_t^c f(x,y,y')dx \tag{28}$$

при предположении, что искомая функция удовлетворяет условиям

$$y(t) = g(t), \qquad y(c) = C,$$

где $g(x)$ данная функция класса C'', а C данное число: 1) искомая функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера, т. е. искомая кривая экстремаль, и 2) в точке $\left(t_0, g(t_0)\right)$, т. е. в точке пересечения этой экстремали с кривой $y = g(x)$ удовлетворяется условие трансверсальности

$$f\left(t_0,\varphi(t_0),\varphi'(t_0)\right) + \left(g'(t_0) - \varphi'(t_0)\right) f_{\varphi'}\left(t_0,\varphi(t_0),\varphi'(t_0)\right) = 0 \tag{29}$$

Далее, пусть экстремаль, дающая решение нашей задачи, представляет отрезок кривой MN, где M лежит на кривой $y = g(x)$, а N точка с координатами (c,C).

За функциональную область примем кривые, проходящие через точку N и имеющие начало на кривой $y = g(x)$.

Так как частью нашей функциональной области является область, составленная из кривых, проходящих через точки M и N, то, как известно, вдоль отрезка экстремали MN должны для сильного экстремума кроме условий Эйлера выполняться условия Лежандра, Якоби и Вейерштрасса, а именно в случае минимума

$$R(x) = f_{\varphi'\varphi'}\left(x,\varphi(x),\varphi'(x)\right) \geq 0 \quad \text{(условие Лежандра)},$$

$$\triangle(x,t_0) \neq 0, \qquad t_0 < x < c \quad \text{(условие Якоби)},$$

$$E\left(x,\varphi(x),\lambda,\varphi'(x)\right) \geq 0 \qquad t_0 \leq x \leq c \quad \text{(условие Вейерштрасса)},$$

здесь $\triangle(x,t_0)$ интеграл уравнения Якоби, обращающийся в нуль при $x = t_0$, $E(x,y,y',p)$ функция Вейерштрасса, λ любое число. Этими условиями определяется поле экстремалей, проходящих через N и имеющих начало на кривой $y = g(x)$.

Условие Вейерштрасса, покрывающее собою условие Лежандра, должно быть выполнено для сильного экстремума.

Перехожу к выводу дальнейших необходимых условий.

Возьмем какую-либо точку M_1 кривой $y = g(x)$, достоточно близкую к точке M, и соединим ее экстремалью с точкой N (c, C), что возможно благодаря существованию поля.

Если по прежнему через $y = k(x,a,b)$ обозначим общий интеграл уравнения Эйлера, то, для получения уравнения семейства рассматриваемых экстремалей, имеем уравнения

$$k(t,a,b) = g(t), \qquad k(c,a,b) = C. \tag{29}$$

Пусть экстремаль MN соответствует значениям $a = a_o$, $b = b_o$; тогда уравнения (29) имеют решения

$$t = t_o, \qquad a = a_o, \qquad b = b_o;$$

если положим еще, что определитель

$$\frac{\partial k(t_o, a_o, b_o)}{\partial a} \frac{\partial k(c_o, a_o, b_o)}{\partial b} - \frac{\partial k(t_o, a_o, b_o)}{\partial b} \frac{\partial k(t_o, a_o, b_o)}{\partial a}$$

отличен от нуля, найдем при t достаточно близком к t_o решения уравнений (29)

$$a = a(t), \qquad b = b(t),$$

обращающихся соответственно в a_o и b_o при $t = t_o$.

Функции $a(t)$ и $b(t)$, очевидно, принадлежат к классу C'.

Из уравнений (29), дифференцируя по t, находим

$$\begin{aligned} k'(t) + \frac{\partial k(t)}{\partial a} a' + \frac{\partial k(t)}{\partial b} b' = g'(t), \\ \frac{\partial k(c)}{\partial a} a' + \frac{\partial k(c)}{\partial b} b' = 0 \end{aligned} \tag{30}$$

Здесь через $k'(t)$ обозначена частная производная по t, входящему явно. Таким образом, уравнение экстремали, проходящей через точку M, будет

$$y = k\Big(x, a(t), b(t)\Big), \tag{31}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ определенные нами только что функции.

При $t = t_o$ уравнение (31) обращается в

$$y = k(x, a_o, b_o), \tag{32}$$

т. е в уравнение экстремали MN.

Возьмем теперь интеграл (28) по экстремали (31); интеграл этот обратится в некоторую функцию от t

$$J(t) = \int_t^c f\left[x, k[x, a(t), b(t)], k'[x, a(t), b(t)]\right] dx, \tag{33}$$

имеющую минимум при $t = t_0$.

Поэтому мы должны иметь

$$\left(\frac{dJ(t)}{dt}\right)_{t=t_0} = 0 \tag{34}$$

Дифференцируя (33) по t, пользуясь тем, что $y = k(x, a, b)$ экстремаль, и вторым из условий (30), легко найдем

$$\frac{dJ(t)}{dt} = -f\big(t, k(t,a,b), k'(t,a,b)\big) - \big(g'(t) - k'(t)\big) f_{k'}\big(t, k(t,a,b), k'(t,a,b)\big) \tag{33}$$

При $t = t_0$ это выражение обращается в нуль, в силу условия трансверсальности. Для существования экстремума функции $J(t)$ при $t = t_0$ достаточно, чтобы $J''(t_0)$ было отлично от нуля.

Заметим, что при поставленных нами условиях относительно $f(x, y, y_,)$ $J''(t)$, как это видно из (33), существует.

Дифференцируя поэтому (33) и исключая из выражения для $J''(t)$ и из уравнений (30) функции a' и b', найдем соотношение

$$\begin{vmatrix} k_a(t) & k_b(t) \\ k_a(c) & k_b(c) \end{vmatrix} \frac{d^2J(t)}{dt^2} = s_g(t). \begin{vmatrix} k_a(t) & k_b(t) \\ k_a(c) & k_b(c) \end{vmatrix} -$$

$$- f_{k'k'}\big(t, k(t), k'(t)\big)\big(g'(t) - k'(t)\big)^2 \begin{vmatrix} k'_a(t) & k'_b(t) \\ k'_a(c) & k'_b(c) \end{vmatrix}. \tag{34}$$

Здесь для краткости через $k_a(t), k_b(t)$ обозначены соответственно частные производные $\frac{\partial k(t)}{\partial a}$, $\frac{\partial k(t)}{\partial b}$, а через $s_g(t)$ функция

$$s_g(t) = -\left[f_t - k' f_{tk'} - k'k'' f_{k'k'} + \big(f_k + f_{tk'} + k'' f_{k'k'} - f_{k'k}\big) g' + f_{k'k} g'^2 + g'' f_{k'}\right], \tag{35}$$

при чем везде в функциях f_t, f_{tk}, $f_{k'k'}$ и т. п. в качестве аргументов вставлены $t, k(t,a,b), k'(t,a,b)$.

Таким образом при $t = t_0$ имеем

$$u_2(c)\left(\frac{d^2J}{dt^2}\right)_{t=t_0} = S_g(t_0) u_2(c) - R(t_0)\big(g'(t_0) - \kappa'(t_0)\big)^2 u_1(c) \tag{36}$$

где через $u_1(x)$ и $u_2(x)$ обозначены функции

$$\begin{aligned} u_1(x) &= k'_a(t_0,a_0,b_0)k_b(x,a_0,b_0) - k'_b(t_0,a_0,b_0)k_a(x,a_0,b_0), \\ u_2(x) &= k_a(t_0,a_0,b_0)k_b(x,a_0,b_0,) - k_b(t_0,a_0,b_0)k_a(x,a_0,b_0). \end{aligned} \tag{37}$$

Замечая, что функции $k_a(x,a_0,b_0)$ и $k_b(x,a_0,b_0)$ представляют два независимых интеграла уравнения Якоби, видим, что $u_1(x)$ и $u_2(x)$ тоже интегралы этого уравнения, при чем

$$u'_1(t_0) = 0, \quad u_2(t_0) = 0; \tag{38}$$

из последних равенств заключаем, что интегралы $u_1(x)$ и $u_2(x)$ независимы, и что $u_2(x)$ представляет интеграл, который мы выше обозначили через $\Delta(x,t_0)$.

Из (37) непосредственно убеждаемся, что

$$u'_2(t_0) = -u_1(t_0), \tag{39}$$

поэтому, для достаточно малых значений h, в силу (38) и (39) имеем

$$u_1(t_0+h) = u_1(t_0) + \varepsilon, \quad u_2(t_0+h) = h\,(u'_2(t_0) + \varepsilon_1) = -h\,(u_1(t_0) + \varepsilon_1),$$

где ε и ε_1 бесконечно малые вместе с h. Отсюда заключаем, что для достаточно малых значений h

$$\frac{u_1(t_0+h)}{u_2(t_0+h)} < 0, \tag{40}$$

а потому для значений c достаточно близких к t_0, если $R(t_0) > 0$, то

$$\left(\frac{d^2 J}{dt^2}\right)_{t=t_0} > 0.$$

В самом деле, так как нули интеграла $u_2(x)$ изолированные, то всегда можно выбрать c настолько близким к t_0, что $u_2(c) \neq 0$, а

$$\left(\frac{d^2 J}{dt^2}\right)_{t=t_0} = s_g(t_0) - R(t_0)\Big(g'(t_0) - k'(t_0)\Big)^2 \frac{u_1(c)}{u_2(c)}. \tag{41}$$

Второй член правой части при приближении c к t_0 стремится к $+\infty$, в то время, как число $S_g(t_0)$ конечно.

Так как $u_1(x)$ и $u_2(x)$ два независимые интеграла уравнения Якоби

$$Ru'' + R'u' + (Q' - p)u = 0,$$

то для них имеет место тождество Абеля

$$R(u'_1u_2 - u'_2u_1) = L,$$

где L постоянная.

Полагая в этом тождестве $x=t_0$ и принимая во внимание (38) и (39), получим для этой постоянной значение

$$L=R(t_0)u_1^2(t_0),$$

а потому

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u_1}{u_2}\right)=\frac{u'_1u_2-u'_2u_1}{u_2^2}=\frac{R(t_0)u_1^2(t_0)}{u_2^2(x)}>0. \tag{42}$$

Отсюда заключаем, что функция $J''(t_0)$, рассматриваемая как функция от c, убывает с возрастанием c от t_0 до корня уравнения $u_2(x)=0$, следующего за t_0.

В самом деле, из (40) на основании (42) имеем, что

$$\frac{dJ''(t_0)}{dc}=-R(t_0)\Big(g'(t_0)-k'(t_0)\Big)^2\frac{d}{dc}\left(\frac{u_1(c)}{u_2(c)}\right)<0.$$

Пусть t'_0 абсцисса точки, сопряженной с точкой M, т.-е. следующий за t_0 корень уравнения $u_2(x)=0$.

Положим, что $u_1(t^0)>0$, тогда, так как в силу (39) $u'_2(t_0)<0$, то для интервала $t_0<x<t'_0$ функция $u_2(x)$ отрицательна, а так как по теореме Штурма $u_1(x)$ обращается один раз в нуль в этом интервале и изменяет при этом свой знак, то для достаточно близких к t'_0 значений x, т.-е. для достаточно малых положительных значений h имеем, в силу (40), что

$$\frac{u_1(t'_0-h)}{u_2(t'_0-h)}>0,$$

а потому когда c будет изменяться от t_0 до t'_0 функция $J''(t_0)$, рассматриваемая, как функция от c, будет убывать от $+\infty$ до $-\infty$.

К тому же результату придем предположив, что $u_1(t_0)<0$.

Следовательно для некоторого промежуточного значения $c=t''_0$ она обратится в нуль с переменой знака.

Точку экстремали MN с абсциссой $x=t''_0$ назовем *точкой, сопряженной с кривой* $y=g(x)$.

Значение t''_0 получим, решая относительно c уравнение

$$J''(t_0)=0$$

или, что то же, уравнение

$$S_g(t_0)u_2(x)-R(t_0)\Big(g'(t_0)-k'(t_0)\Big)^2u_1(x)=0. \tag{43}$$

Значение t''_0 представляет первый корень этого уравнения, больший числа t_0.

Все точки экстремали MN, абсциссы которых удовлетворяют уравнению (43), будем называть **сопряженными с кривой** $y=g(x)$, при чем те из них, абсциссы которых больше t_0, назовем **правыми сопряженными точками**, а те, которых абсциссы меньше t_0, **левыми сопряженными точками**.

Левая часть уравнения (43) представляет выражение вида $Au_1(x)+Bu_2(x)$, где A и B постоянные, а потому она тоже представляет интеграл уравнения Якоби. Отсюда ясно, что, если условие Якоби не выполнено, то на отрезке экстремали MN имеются точки, сопряженные с кривой $y=g(x)$.

Наоборот, если интеграл уравнения Якоби

$$u_3(x)=S_g(t_0)u_2(x)-R(t_0)\left(g'(t_0)-k'(t_0)\right)^2u_1(x) \tag{44}$$

отличен от нуля во всем интервале $t_0\leq x\leq c$, то условие Якоби выполнено.

Действительно, если бы интеграл

$$y=u_2(x)=\triangle(x,t_0)$$

кроме нуля $x=t_0$ имел бы в интервале $t_0<x\leq c$ еще один нуль, то, по теореме Штурма, интеграл (44) обратился бы в нуль где либо внутри этого интервала.

Заметим, что интеграл (44) будет тождествен $c\triangle(x,t_0)$, если

$$g'(t_0)=k'(t_0),$$

т. е. при условии, что в точке пересечения экстремаль $y=k(x,a_0,b_0)$ и кривая $y=g(x)$ касаются друг друга, а этот случай, в случае **определенной задачи**, которую мы рассматриваем, места иметь не может.

Резюмируя полученные результаты, приходим к заключению, что если на отрезке экстремали MN нет точки, сопряженной с кривой $y=g(x)$, то при выполнении условий Эйлера, Лежандра и Вейерштрасса, при чем $R(x)>0$, интеграл, взятый по экстремали MN, представит минимум в функциональной области, состоящей из экстремалей, соединяющих точки кривой $y=g(x)$ с точкой N и достаточно близких к экстремали MN; наоборот, если точка N лежит на экстремали за точкой, сопряженной с кривой $y=g(x)$, тогда интеграл, взятый по этой экстремали между точками M и N, даст максимум в функциональной области, состоящей из экстремалей, которые соединят точки кривой $y=g(x)$ с точкой N и которые достаточно близки к экстремали MN.

Это вытекает из того, что в первом случае будем иметь

$$J'(t_0)=0, J''(t_0)>0,$$

а во втором

$$J'(t_0)=0, J''(t_0)<0.$$

Теперь легко вывести следующее новое необходимое условие, при котором отрезок экстремали MN может дать экстремум интеграла.

Условие это назовем *обобщенным условием Якоби*.

Для того, чтобы отрезок экстремали MN мог дать экстремум интеграла J, необходимо, чтобы между точками M и N не было точки, сопряженной с кривой $y=g(x)$.

В самом деле, пусть точка P отрезка экстремали MN, сопряженная с кривой $y=g(x)$, лежит между точками M и N. Возьмем две точки N_1 и N_2, лежащие на отрезке экстремали MN — которую обозначим через L — по разные стороны от P, и построим две кривые: одну L_1, состоящую из экстремали M_1N_1 и дуги N_1N экстремали L, а другую L_2, состоящую из экстремали M_2N_2 и дуги N_2N экстремали L; при чем точки M_1 и M_2 взяты на кривой $y=g(x)$ вблизи точки M.

Возможность построения экстремалей M_1N_1 и M_2N_2 вытекает из выполнения условия Якоби. Действительно, в этом случае интеграл уравнения Якоби $u_2(x)$ отличен от нуля для всех значений x, заключенных в интервале (t_0,c). Но тогда, на основании рассуждений § 1, убеждаемся в существовании семейства экстремалей, пересекающих кривую $y=g(x)$ трансверсально.

Будем обозначать символом $J^{(K)}_{AB}$ интеграл J, взятый между точками A и B по кривой (K). Тогда на основании только что сказанного имеем:

$$J^{(L_1)}_{M_1N}-J^{(L)}_{MN}=J^{(L_1)}_{M_1N_1}-J^{(L)}_{MN_1}>0$$
$$J^{(L_2)}_{M_2N}-J^{(L)}_{MN}=J^{(L_2)}_{M_2N_2}-J^{(L)}_{MN_2}<0$$

Отсюда заключаем, что $J^{(L)}_{MN}$ не экстремальное значение интеграла J.

3. Дадим геометрическую интерпретацию найденного условия. Рассмотрим семейство экстремалей, трансверсальных к кривой $y=g(x)$. Уравнение этого семейства будет

$$y=\kappa\Big(x,a(t),b(t)\Big) \tag{45}$$

где, как мы видели в § 1, функции $a(t)$ и $b(t)$ определяются из уравнений

$$k(t,a,b)=g(t), \tag{46}$$

$$f\Big(t,\kappa(t,a,b),\kappa'(t,a,b)\Big)+\Big(g'(t)-\kappa'(t)\Big)f_{k'}\Big(t,k(t,a,b),\kappa'(t,a,b)\Big)=0.$$

Уравнение обертки экстремалей (45) получим, исключая t из уравнения (45) и уравнения

$$\frac{dy(x)}{dt} = \frac{\partial к(x)}{\partial a} a' + \frac{\partial b(x)}{\partial b} b' = 0. \tag{47}$$

Из уравнений (46) после подстановки в них a(t) и b(t), вместо a и b, и дифференцирования полученного тождества, найдем тождества

$$k' + \frac{\partial k}{\partial a} a' + \frac{\partial k}{\partial b} b' = 0$$

$$f_t + f_k \left(k' + \frac{\partial k}{\partial a} a' + \frac{\partial k}{\partial b} b'\right) + f_{k'}\left(k'' + \frac{\partial k'}{\partial a} a' + \frac{\partial k'}{\partial b} b'\right) + f_{k'}\left(g'' - \omega'' - \frac{\partial k'}{\partial a} a' - \frac{\partial k'}{\partial b} b'\right) +$$

$$+ \left(g' - k'\right)\left[f_{k't} + f_{k'k}\left(k' + \frac{\partial k}{\partial a} a' + \frac{\partial k}{\partial b} b'\right) + f_{k'k'}\left(k'' + \frac{\partial k'}{\partial a} a' + \frac{\partial k'}{\partial b} b'\right)\right] = 0 \tag{48}$$

Исключая теперь a' и b' из уравнений (47) и (48) и обозначая для краткости через $f_t(t), f_{k'\omega}(t)$, и т. п. функции

$$f_t\left[t, k\left(t, a(t), b(t)\right), k'\left(t, a(t,)b(t)\right)\right], f_{k'\omega}\left[t, k\left(t, a(t), b(t)\right), k'\left(t, a(t), b(t)\right)\right] \text{ и т. п.},$$

а через $k_a(t), k_b(t)$ функции $k_a\left(x, a(t), b(t)\right)$, $k_b\left(x, a(t), b(t)\right)$, найдем после несложных вычислений в результате исключения $a'(t)$и$b'(t)$ соотношение

$$\begin{vmatrix} S_g(t) & \left[g'(t) - k'(t)\right] f_{k'k'}(t) \dfrac{\partial k'(t)}{\partial a} & \left[g'(t) - k'(t)\right] f_{k'k'}(t) \dfrac{\partial k'(t)}{\partial b} \\ k'(t) - g'(t) & \dfrac{\partial k(t)}{\partial a} & \dfrac{\partial k(t)}{\partial b} \\ 0 & \dfrac{\partial k(x)}{\partial a} & \dfrac{\partial k(x)}{\partial b} \end{vmatrix} = 0, \tag{49}$$

где по прежнему через $S_g(t)$ обозначена функция (35). Раскрывая последний определитель, полагая в нем $t = t_0$, вспоминая выражения (37) для $u_1(x)$ и $u_2(x)$ и что

$$R(t_0) = f_{k'k}\left(t_0, к(t_0, a_0, b_0,), к'(t_0, a_0, b_0),\right)$$

напишем соотношение (49) в виде

$$S_g(t_0) u_2(x) - R(t_0)\left(g'(t_0) - к'(t_0)\right)^2 u_1(x) = 0,$$

а это ничто иное как уравнение (43), определяющее абсциссы точек, сопряженных с кривой $y = g(x)$.

С другой стороны, это уравнение удовлетворяется теми значениями x, для которых удовлетворяется уравнение (47) при $a=a_0$ и $b=b_0$. Что касается последнего уравнения, то оно определяет абсциссу точки касания экстремали $y=\kappa(x,a_0,b_0)$ с оберткой семейства экстремалей, трансверсальных к кривой $y=g(x)$.

Таким образом видим, что **точка, в которой экстремаль**

$$y=k(x,a_0,b_0)$$

в первый раз за точкой M, для которой $x=t_0$, касается обертки экстремалей, трансверсальных к кривой $y=g(x)$, представляет первую правую сопряженную точку этой кривой.

Заметим, что положение точки, сопряженной с кривой $y=g(x)$, зависит от кривизны этой кривой в точке M, так как $S_g(t_0)$ зависит от $g''(t_0)$.

Остановимся несколько на этой зависимости

Обозначая через r_0 радиус кривизны кривой $y=g(x)$ в точке с абсциссой t_0 и помня, что

$$g''(t_0)=\frac{\left[1+g'^2(t_0)\right]^{3/2}}{r_0},$$

напишем выражение (35) для $S_g(t_0)$ следующим образом

$$S_g(t_0)=\frac{l_g(t_0)}{r_0}+w_g(t_0) \tag{50}$$

где

$$l_g(t_0)=-f_{\kappa'}(1+g'^2)^{3/2}$$

$$w_g(t_0)=-\left[f_t-k'f_{tk'}-k'k''f_{\kappa'\kappa'}+\left(f_{\kappa'}+f_{t\kappa'}+k''f_{\kappa'\kappa'}-f_{\kappa'\kappa}\right)g'\right]_{t=t_0}$$

Если положим, что t'_0 представляет абсциссу точки, сопряженной с кривой $y=g(x)$, то тогда

$$S_g(t_0)u_2(t'_0)-R(t_0)\left[g'(t_0)-\kappa'(t_0)\right]^2u_1(t'_0)=0,$$

а потому, подставляя полученное только-что для $S_g(t_0)$ значение, найдем из этого равенства величину радиуса кривизны r_0 как функцию абсциссы сопряженной точки, а именно

$$\frac{1}{r_0}=\frac{R(t_0)[g'(t_0)-\kappa'(t_0)]^2}{l_g(t_0)}\cdot\frac{u_1(t'_0)}{u_2(t'_0)}-\frac{W_g(t_0)}{l_g(t_0)}. \tag{51}$$

К совершенно аналогичным результатам приводит рассмотрение задачи об экстремуме интеграла

$$J = \int_{c}^{t} f(x,y,y')dx$$

в функциональной области, для функций которой выполняются условия

$$y(c) = C, \qquad y(t) = m(t),$$

где C данное число, а m (x) функция класса C'' в некотором интервале.

Необходимые условия, которым должна удовлетворять искомая функция φ (x) таковы: кривая $y = \varphi(x)$ должна быть экстремалью вдоль которой должно удовлетворяться условие Лежандра; на ней не должна находиться точка, сопряженная с точкой M (c, C), т. е. для нее должно удовлетворяться условие Якоби; вдоль ее при сильном экстремуме должно удовлетворяться условие Вейерштрасса, заменяющее, как известно, условие Лежандра; в точке пересечения N кривой $y = m(x)$ с кривой $y = \varphi(x)$ первая должна пересекать вторую трансверсально; наконец, должно выполняться обобщенное условие Якоби, а именно: первая л е в а я сопряженная точка кривой $y = m(c)$, т. е. первая точка, в которой экстремаль $y = \varphi(x)$ касается обертки экстремалей, пересекаемых трансверсально к кривой $y = m(x)$, должна иметь абсциссу меньшую абсциссы c точки M.

4. Остановимся на исследовании еще одного вопроса, которое нам понадобится впоследствии. В § 1 мы видели, что для существования семейства экстремалей

$$y = к\left[x, a(t), b(t)\right] \tag{52}$$

трансверсальных к кривой $y = g(x)$, должен быть отличен от нуля определитель $\triangle$, значение которого дано выражением (14).

Посмотрим, при каких условиях экстремали (51) образуют поле, окружающее экстремаль $y = \varphi(x)$, при чем

$$y = \varphi(x) = k\left(x, a(t_0), b(t_0)\right) = k(x, a_0, b_0).$$

В случае регулярной и определенной задачи определитель $\triangle$ отличен от нуля при $t = t_0$, $a = a_0$, $b = b_0$, а, следовально, и для всех значений t, a, b, удовлетворяющих условиям

$$|t - t_0| < \varepsilon, \qquad |a - a_0| < \eta, \qquad |b - b_0| < \eta,$$

где ε и η некоторые определенные, достаточно малые числа.

Если теперь предположим, что выполнено обобщенное условие Якоби, то вдоль всего отрезка MN экстремали $y = \varphi(x)$ функция

$$\left(\frac{\partial k\big(x, a(t), b(t)\big)}{\partial t}\right)_{t = t_0}$$

отлична от нуля. Отсюда вытекает, что при соответствующем выборе ε, а, следовательно, и η, функция

$$\frac{\partial k\big(x, a(t), b(t)\big)}{\partial t}$$

будет отлична от нуля в интервале $t_0 \leqslant x \leqslant c$.

Но тогда, как нетрудно видеть, можем выбрать такое положительное число d, чтобы для всех значений интервала $t_0 - \varepsilon \leqslant x \leqslant c$ и для всех значений y, удовлетворяющих условию

$$|y - \varphi(x)| < d$$

уравнение (52) допускало единственное решение относительно t класса C'.

Другими словами, при указанных условиях экстремали (52) образуют поле, окружающее экстремаль $y = \varphi(x)$.

5. Рассмотрим теперь условия экстремума интеграла J в предположении, что концы искомой кривой находятся на двух данных кривых

$$y = g(x), \qquad y = m(x) \tag{53}$$

класса (C'').

Условимся через M, M_1, M_2 и т. д. обозначать точки на кривой $y = g(x)$, а через N, N_1, N_2 и т. д. — точки на кривой $y = m(x)$.

Очевидно, что для существования экстремума прежде всего необходимо, чтобы: 1) искомая кривая $y = \varphi(x)$ была экстремалью; 2) вдоль нее должно удовлетворяться условие Лежандра, а в случае сильного экстремума—заменяющее его условие Вейерштрасса; 3) если концы кривой $y = \varphi(x)$ будут M и N, то ближайшая правая сопряженная с кривой $y = g(x)$ точка должна лежать за точкой N, а ближайшая левая, сопряженная с кривой $y = m(x)$, должна предшествовать точке M.

Для удобства в дальнейшем будем называть кривую $y = g(x)$ *начальной кривой*, а кривую $y = m(x)$ *конечной кривой*.

Покажем, что для существования экстремума необходимо выполнение еще одного условия, найденного впервые Блиссом, а именно: *ближайшая правая сопряженная с начальной кривой точка не должна предшествовать ближайшей правой* сопряженной с конечной кривой точкой, и, наоборот ближайшая левая сопряженная с начальной кривой точка не должна предшествовать ближайшей левой, сопряженной с конечной кривой точкой. Для определенности положим, что выполнены все указанные выше условия, кроме условия Блисса, необходимые для существования минимума.

В самом деле, пусть правая сопряженная с кривой $y=g(x)$ точка P_g предшествует правой сопряженной с кривой $y=m(x)$ точке P_m Возьмем какую-либо точку Q, лежащую между P_g и P_m. Так как она лежит *за* точкой, сопряженной с кривой $y=g(x)$, то в силу результатов, полученных нами в § 2, найдем такую кривую M_1N_1Q, которую обозначим через L, вдоль которой наш интеграл будет меньше интеграла, взятого по экстремали $MNQy=\varphi(x)$, которую обозначим через E, так что

$$J^{(L)}_{M_1Q} < J^{(E)}_{MQ} \tag{54}$$

Далее, так как Q лежит перед точкой P_m, сопряженной справа с кривой $y=m(x)$, то интеграл наш, взятый между точками N и Q по экстремали E, будет меньше интеграла взятого между точками N_1 и Q взятому по кривой L так, что

$$J^{(E)}_{NQ} < J^{(L)}_{N_1Q} \tag{55}$$

Из (54) и (55) имеем

$$J^{(L)}_{M_1N_1} = J^{(L)}_{M_1Q} - J^{(L)}_{N_1Q} < J^{(E)}_{MQ} - J^{(E)}_{NQ} = J^{(E)}_{MN},$$

а это противоречит условию, что значение $J^{(E)}_{MN}$ минимальное.

Совершенно аналогичным образом доказывается и вторая часть теоремы Блисса.

Заметим, что мы оставляем здесь в стороне случай, когда точки P_g и P_m совпадают.

6. Теперь уже не трудно вывести достаточные условия для существования экстремума (в частности минимума) интеграла J, при одной или обеих переменных конечных точках.

Начнем со случая, когда начала кривых , по которым берется интеграл J, лежат на данной кривой $y=g(x)$, точки которой будем обозначать через M, M_1, M_2, ... , а конец лежит в данной точке $N(c, C)$.

Пусть имеем регулярную и определенную задачу, при чем выполняются условия Эйлера и обобщенное условие Якоби.

Посмотрим, каково достаточное условие для того, чтобы отрезок MN экстремали дал минимум в области некоторых близких кривых $y=y(x)$.

Рассмотрим семейство экстремалей, пересекаемых трансверсально кривой $y = g(x)$.

Обозначая по прежнему через $\underline{t}$ абсциссу точки пересечения этой кривой с соответствующей экстремалью, можем написать уравнение этого семейства в виде

$$y = \kappa\big(x, a(t), b(t)\big), \tag{56}$$

причем экстремаль MN соответствует значению $t = t_0$, т. е.

$$y = \varphi(x) = \kappa\big(x, a(t_0), b(t_0)\big) \tag{57}$$

По определению имеем

$$\kappa\big(t, a(t), b(t)\big) = g(t). \tag{58}$$

Как мы видели в § 4, при выполнении наших условий семейство (56) образует поле для всех значений x, y и t, для которых

$$t_0 < x < t'_0, \quad |y - \varphi(x)| < d, \quad |t - t_0| < \varepsilon,$$

где t'_0 абсцисса первой справа сопряженной точки кривой $y = g(x)$ а $\underline{d}$ и $\underline{\varepsilon}$ некоторые положительные числа.

Пусть $p(x,y)$ функция поля семейства экстремалей (56).

В силу того, что экстремали эти пересекают кривую $y = g(x)$ трансверсально, в каждой точке этой кривой, лежащей в поле, имеем

$$f(x,g,p) + (g' - p)\, f_p(x,g,p) = 0,$$

а потому Гильбертовский интеграл

$$H = \int \Big(f(x,y,p) + (y' - p) f_p(x,y,p)\Big)\, dx, \tag{59}$$

взятый по кривой $y = g(x)$ между любыми точками, тождественно равен нулю.

Будем теперь сравнивать интеграл J, взятый по отрезку экстрамали MN, с интегралом, взятым по какой-либо кривой M_1N, лежащей в рассматриваемом поле.

По теореме Гильберта-Бельтрами имеем, что интеграл (59), взятый между двумя точками по каким-либо кривым, лежащим в поле, имеет одно и то же значение. Далее ясно, что, если мы возьмем этот интеграл по какой-либо из экстремалей, образующих поле, то он обратится b интеграл J.

Будем сравнивать между собою значения интеграла J, взятого по какой-либо кривой $y=y(x)$ между точкой M_1, лежащей на кривой $y=y(x)$ и точкой N. Если абсцисса точки M_1 будет t, то наш интеграл будет

$$J_y=\int_t^c f\Big(x,y(x),y'(x)\Big)\,dx. \tag{60}$$

Что касается интеграла J, взятого по экстремали MN, то он равен

$$J_\varphi=\int_{t_0}^c f\Big(x,\varphi(x),\varphi'(x)\Big)\,dx \tag{61}$$

Интеграл этот мы можем представить как Гильбертовский, взятый по отрезку MM_1 кривой $y=g(x)$ и отрезку M_1N кривой $y=y(x)$ так, что

$$J_\varphi=\int_{t_0}^t\Big(f(x,g,p)+(g'-p)f_p\,(x,y,p)\Big)dx+\int_t^c\Big[f(x,y,p)+(y'-p)f_p\,(x,y,p)\Big]dx$$

Первый из этих интегралов обращается в нуль, а потому

$$J_y-J_\varphi=\int_{t_0}^t\Big[f(x,y,y')-f(x,y,p)-(y'-p)f_p\,(x,y,p)\Big]dx=$$

$$=\int_{t_0}^t E(x,y,y',p)dx, \tag{62}$$

где $E(x,y,y',p)$ Вейерштрассовская функция.

Отсюда вытекает, что при выполнении всех указанных выше необходимых условий достаточным условием является сохранение функцией $E(x,y,y',p)$ знака в рассматриваемом поле.

7. Переходим, к рассмотрению случая, когда оба конца кривых функциональной области находятся на данных кривых класса (C'').

$$y=g(x),\quad y=m(x), \tag{63}$$

при чем предположим, что рассматриваются те отрезки этих кривых, для которых абсциссы начальной кривой $y=g(x)$ меньше абсцисс конечной кривой $y=m(x)$. Абсциссы точек начальной кривой будем обозначать через t, а конечной через n. Точки, лежащие на первой кривой, будем обозначать через $M, M_1, M_2, \dots$, а точки, лежащие на второй через $N, N_1, N_2, \dots$ Предположим, что имеем регулярную и определенную задачу, пусть кривая $y=\varphi(x)$ удовлетворяет условиям: Эйлера, обобщенным условиям Якоби, условиям трансверсальности и условиям Блисса.

Как мы видели в предыдущем §-е, существует семейство экстремалей (56), пересекаемых трансверсально кривой $y=g(x)$ и образующих поле. К числу кривых этого семейства принадлежит и кривая $y=\varphi(x)$, данная соотношением (57) и пересекающая кривые (63) соответственно в точках M и N с абсциссами t_0 и n_0.

Допустим еще, что функция $E(x,y,y',p)$ в поле экстремалей (56) сохраняет свой знак, положим, остается положительной.

Функциональную область, образованную отрезками экстремалей (56) между кривыми $y=g(x)$ и $y=m(x)$, назовем областью (F); эта область образует поле.

Кривые класса (c''), лежащие в этом поле $y=y(x)$ и имеющие концы на кривых (63), в свою очередь, образуют функциональную область (У).

Докажем теперь следующую важную теорему: для того, чтобы экстремаль $y=\varphi$ (x) давала экстремум интеграла J в области (У), необходимо и достаточно, чтобы она давала его в области (F).

В самом деле, возьмем интеграл по какой-либо кривой L области (У) между точками M_1 и N_1. Если через точку N_1 проведем экстремаль M_2N_1 семейства (56), то по предыдущему параграфу интеграл этот будет иметь экстремальное, положим, минимальное значение среди интегралов, взятых по любой кривой (У) с конечной точкой в N_1. Интеграл по экстремали M_2N_1 обозначим через $J(t)$, где t—абсцисса точки M_2, так что

$$J(t) < J^{(L)}_{M_1N_1} \tag{64}$$

Поэтому, если интеграл $J(t_0)$, взятый по экстремали MN представляет минимум в области (F), то и подавно

$$J(t_0) < J^{(L)}_{M_1N_1}$$

Таким образом, достаточность условия доказана. Что же касается его необходимости, то она вытекает из того, что область (F) есть часть области (У).

8. Итак, нахождение достаточных условий существования экстремума в области (У) сводится к нахождению достаточных условий в области (F), т. е. для функций $J(t)$, где по определению

$$J(t) = \int_t^n f\Big(x, k(x,a(t),b(t)),\ k'(x,a(t),b(t))\Big)\,dx\,. \tag{65}$$

В дальнейшем, для краткости, будем писать $\Phi(t,k,k')$, подразумевая, что аргументами k и k' являются t, a (t) и b(t); напротив, в выражении $\Phi(n,k,k')$ будем подразумевать k и k' зависящими от n, a(t) и b(t).

Условившись в этих обозначениях, из (65) имеем

$$\frac{dJ(t)}{dt} = f(n,k,k')\frac{dn}{dt} - f(t,k,k') + \int_t^n \left(f_k \frac{\partial k}{\partial t} + f_{k'}\frac{\partial k'}{\partial n}\right)dx, \tag{66}$$

где

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial a}a' + \frac{\partial k}{\partial b}b', \quad \frac{\partial k'}{\partial t} = \frac{\partial k'}{\partial a}a' + \frac{\partial k'}{\partial b}b' \tag{67}$$

Интегрируя по частям второй член и замечая, что $k(x,a,b)$ интеграл уравнения Эйлера, преобразуем (66) в

$$\frac{dJ(t)}{dt} = f(n,k,k')\frac{dn}{dt} + f_{k'}(n,k,k')\frac{\partial k(n)}{\partial t} - f(t,k,k') - f_{k'}(t,k,k')\frac{\partial k(t)}{\partial t} \tag{68}$$

Сумма последних двух членов равна нулю. Действительно, в силу условия трансверсальности, имеем тождественно

$$\begin{gathered} f(t,k,k') + \left(g'(t) - k'(t)\right)f_{k'}(t,k,k') = 0, \\ k\left(t,a(t),b(t)\right) = g(t). \end{gathered} \tag{69}$$

Из последнего соотношения имеем

$$k'(t) + \frac{\partial k(t)}{\partial t} = g'(t).$$

Подставляя в условие трансверсальности вместо $g'(t)$ последнее значение, докажем наше утверждение.

Из соотношения

$$k\left(n,a(t),b(t)\right) = m(n)$$

имеем

$$k'(n)\frac{dn}{dt} + \frac{\partial k(n)}{\partial t} = m'(n)\frac{dn}{dt}.$$

Определяя отсюда $\frac{\partial k(n)}{\partial t}$ и подставляя в (69), где сумма последних двух членов равна нулю, найдем

$$J'(t) = \frac{dJ(t)}{dt} = \left[f(n,k,k') + \left(m'(n) - k'(n)\right)f_{k'}(n,k,k')\right]\frac{dn}{dt}. \tag{70}$$

Если теперь положим здесь $t=t_0$ т. е. $n=n_0$, другими словами, будем брать интеграл, взятый по экстремали MN, и вспомним, что кривая $y=m(x)$ пересекает эту экстремаль в точке N транверсально, то получим, что

$$\left(\frac{dJ(t)}{dt}\right)_{t=t_0} = 0$$

Таково первое необходимое условие, при котором функция $J(t)$ при $t=t_0$ может иметь экстремум.

Рассмотрим теперь значение $J''(t_0)$. Дифференцируя (70), найдем

$$J''(t)=\left[f_t+f_k k'+f_{k'} k''+(m''-k'')(f_{k't}+f_{k'k}k'+f_{k'k'}k'')\right]\left(\frac{dn}{dt}\right)^2+$$

$$+\left[f_k\frac{\partial k}{\partial t}+(m'-k')\left(f_{k'k}\frac{\partial k}{\partial t}+f_{k'k'}\frac{\partial k'}{\partial t}\right)\right]\frac{dn}{dt}+\left(f+(m'-k')f_{k'}\right)\frac{d^2n}{dt^2}. \qquad (71)$$

Здесь везде аргументами служат n, $k\left(n,a(t),b(t)\right)$, $k'\left(n,a(t),b(t)\right)$.

Вычислим значения

$$\frac{\partial k\left(n,a(t),b(t)\right)}{\partial t},\quad \frac{\partial k'\left(n,a(t),b(t)\right)}{\partial t}$$

при $t=t_0$, а, следовательно, при $a=a_0$, $b=b_0$.

Так как экстремали (56) пересекаются кривой $y=g(x)$ трансверсально, то имеют место тождества (69). Дифференцируя их по t, найдем

$$k'+\frac{\partial k}{\partial t}=g',$$

$$f_t-k'f_{k't}-k'k''f_{k'k'}+(f_k+f_{k't}+k''f_{k'k'}-k'f_{k'k})+g'^2f_{k'k}+g''f_{k'}+$$
$$+(g'-k')f_{k'k'}\frac{\partial k'}{\partial t}=0.$$

Здесь везде аргументами служат t, $k\left(t,a(t),b(t)\right)$, $k'\left(t,a(t),b(t)\right)$.

Полагая в наших соотношениях $t=t_0$, а, следовательно, $a(t_0)=a_0$, $b(t_0)=b_0$, и припоминая выражение (35) для функции $s_g(t)$, напишем наши последние соотношения в виде

$$\left(\frac{\partial k}{\partial t}\right)_0=\left(\frac{\partial k}{\partial a}\right)_0 a'_0+\left(\frac{\partial k}{\partial b}\right)_0 b'_0=g'(t_0)-k'(t_0),$$

$$\left(\frac{\partial k'}{\partial t}\right)_0=\left(\frac{\partial k'}{\partial a}\right)_0 a'_0+\left(\frac{\partial k'}{\partial b}\right)_0 b'_0=\frac{s_g(t_0)}{R(t_0)\left(g'(t_0)-k'(t_0)\right)}, \qquad (72)$$

где $a'=a'(t_0)$, $b'_0=b'(t_0)$, а все символы вида $\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_0$ означают значения

$$\frac{\partial F}{\partial t} \text{ при } t=t_0.$$

Имеем еще по определению

$$\left(\frac{\partial k(n)}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial k(n)}{\partial a}\right)_0 a'_0 + \left(\frac{\partial k(n)}{\partial b}\right)_0 b'_0 . \tag{73}$$

Исключая из (72), (73) и (74) величины a'_0 и b'_0 и вспоминая выражения (37) для интегралов уравнения Якоби $u_1(x)$ и $u_2(x)$ и выражение (44) для интеграла $u_3(x)$, найдем, что

$$\left(\frac{\partial k(n)}{\partial t}\right)_0 = -\frac{u_3(n_0)}{R(n_0)\left(g'(n_0)-k'(n_0)\right)} \tag{74}$$

Точно также, исключая a'_0, b'_0 из соотношений (72) и соотношения

$$\left(\frac{\partial k'(n)}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial k'(n)}{\partial a}\right)_0 a'_0 + \left(\frac{\partial k'(n)}{\partial b}\right)_0 b'_0,$$

получим

$$\left(\frac{\partial k'(n)}{\partial t}\right)_0 = -\frac{u'_3(n_0)}{R(n_0)\left(g'(n_0)-k'(n_0)\right)} \tag{75}$$

Точно таким же образом из соотношения

$$k\left(n, a(t), tb(t)\right) = m(n)$$

путем дифференцирования соотношений (72) и выражения для $u_3(x)$, найдем

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)_0 = -\frac{u_3(n_0)}{R(t_0)\,[g'(t_0)-k'(t_0)]\,[m'(n_0)-k'(n_0)]}\,.$$

Полагая $t = t_0$ в (71) и принимая во внимание все сказанное и то, что в точке N экстремаль MN пересекается трансверсально кривой $y = m(x)$, приведем (71) к виду

$$J''(t_0) = -\frac{u_3(n_0)\Big[s_m(n_0)u_3(n_0) - [m'(n_0)-k'(n_0)]^2\, R(n_0)u'_3(n_0)\Big]}{R^2(n_0)\,[g'(t_0)-k'(t_0)]^2\,[m'(n_0)-k'(n_0)]^2}, \tag{76}$$

где $s_m(t)$ функция, составленная из $m(t)$, как $s_g(t)$ из функции $g(t)$.

Так как $u_3(n_0)$ не равно нулю, ибо точка N не сопряженная с кривой $y = g(x)$, то, следовательно, $J''(t)$ может обратиться в нуль только тогда, когда

$$s_m(n_0)u_3(n_0) - \Big[m'(n_0) - k'(n_0)\Big]^2 R(n_0)u'_3(n_0) = 0\,. \tag{77}$$

Постараемся ближе исследовать это условие.

Заметим, что при $t = t_0$, как это видно из (44) в силу (39),

$$u_3(t_0) = -R(t_0)\left[g'(t_0) - k'(t_0)\right]^2 u_1(t_0), \quad u'_3(t_0) = -s_g(t_0)u_1(t_0),$$

откуда видим, что

$$s_g(t_0)u_3(t_0) - \left[g(t_0) - k'(t_0)\right]^2 R(t_0)u'_3(t_0) = 0 \tag{78}$$

Обозначим теперь через $v(x)$ тот интеграл уравнения Якоби, который обращается в нуль для первой правой точки, сопряженной с кривой $y = m(x)$.

Для этого интеграла получим соотношение, аналогичное (78), если только величины, относящиеся к функции $g(x)$, заменим соответствующими величинами, относящимися к функции $m(x)$ и, кроме того, значение t_0 заменим значением n_0. При этих условиях получим

$$s_m(n_0)v(n_0) - \left[m'(n_0) - k'(n_0)\right]^2 R(n_0)v'(n_0) = 0. \tag{79}$$

Из (77) и (79) имеем

$$\left[m'(n_0) - k'(n_0)\right]^2 R(n_0)\left[v'(n_0)u_3(n_0) - v(n_0)u'_3(n_0)\right] = 0 \tag{80}$$

Так как условие Лежандра выполнено, т. е. $R(n_0) \neq 0$ и, кроме того, задача определенна, т. е. $\left[m'(n_0) - k'(n_0)\right]$ отлично от нуля, то последнее соотношение возможно лишь при условии

$$v'(n_0)u_3(n_0) - v(n_0)u'_3(n_0) = 0.$$

Последнее соотношение, как это вытекает из теоремы Абеля, возможно лишь тогда, когда интегралы $u_3(x)$ и $v(x)$ отличаются только постоянным множителем, а в таком случае сопряженные с кривыми $y = g(x)$ и $y = m(x)$ точки совпадают. Другими словами, $J''(t_0)$ обращается в нуль только тогда, когда точки, сопряженные с кривыми $y = g(x)$ и $y = m(x)$, совпадают.

Отсюда следует, что, если в определенной задаче при выполнении условий Эйлера, Лежандра, обобщенного Якоби, Блисса, при сохранении знака функции $E(x, y, y', p)$ в поле экстремалей (56) сопряженные точки кривых $y = g(x)$ и $y = m(x)$ не совпадают, то функция $J(t)$ имеет экстремум при $t = t_0$, т. е. интеграл J имеет экстремум вдоль экстремали MN.

Так как экстремум интеграла

$$J=\int_{t}^{n} f(x,y,y')dx$$

будет иметь место одновременно с экстремумом функции $J(t)$, то, если $J''(t_0)=0$, для существования экстремума интеграла J в этом последнем случае необходимо и достаточно, чтобы существовало такое положительное число $2q$, чтобы удовлетворялись соотношения

$$J'(t_0)=J''(t_0)=\ldots=J^{(2q-1)}(t_0)=0,\ J^{(2q)}(t_0)\neq 0.$$

Само собою разумеется, что условия существования производных $J'(t)$, $J''(t)$, ... налагают определенные условия на под'интегральную функцию. Останавливаться в настоящей статье на рассмотрении последнего случая я не буду.

Généralisation de la méthode de Cauchy de l'intégration de l'équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre.

C. Russyan.

Etant donnée l'équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre

$$F(x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n) = 0$$

pour trouver son intégrale se reduisant pour $x_1 = x_1{}^0$ á la fonction donnée $\varphi(x_2, \ldots x_n)$, il faut d'après Cauchy trouver le système principal pour $x_1 = x_1{}^0$ de 2n intégrales

$$\begin{aligned} x_j &= x_j(x_1, x_2^0, \ldots x_n^0, z_0, p_1^0, \ldots p_n^0) \quad (j = 2 \ldots n) \\ \text{(a)} \qquad z &= z(x_1, x_2^0, \ldots x_n^0, z_0, p_1^0, \ldots p_n^0) \\ p_i &= p_i(x_1, x_2^0, \ldots x_n^0, z_0, p_1^0, \ldots p_n^0) \quad (i = 1 \ldots n) \end{aligned}$$

du système de 2n équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx_i}{\frac{\partial F}{\partial p_i}} = \frac{dz}{\sum\limits_1^n k \; p_k \frac{\partial F}{\partial p_k}} = - \frac{dp_i}{\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z}} \quad (i = 1 \ldots n)$$

et éliminer $x_2{}^0, \ldots p_n{}^0$ des équation (a) et des équations

$$F(x_1{}^0, \ldots p_n{}^0) = 0, \quad \varphi(x_2{}^0, \ldots x_n{}^0) = z_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x^0_j} = p^0{}_j \quad (j = 2 \ldots n)$$

La première des $n+1$ équations obtenues

$$z = f(x_1, \ldots x_n), \quad p_i = f_i(x_1, \ldots x_n) \quad (i = 1 \ldots n)$$

est l'intégrale cherchée si en vertu de ces dernières équations $\frac{\partial F}{\partial p_1} \neq 0$.

Cette méthode peut être généralisée comme il suit: étant donnée le système de $m < n$ équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre en involution

$$F_\alpha(x_1, .. x_n, z, p_1, .. p_n) = c_\alpha \qquad (\alpha = 1 .. m) \tag{I}$$

et indépendantes p. ex. par rapport à $p_1, .. p_m$ de sorte que

$$[F_\alpha, F_\beta] = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1 .. m) \text{ et } \Delta = \frac{\partial(F_1 .. F_m)}{\partial(p_1 .. p_m)} \neq 0$$

pour trouver l'intégrale commune de ces équations se réduisant pour $x_1 = x_1^0 .. x_m = x_m^0$ à la fonction donnée $\varphi(x_{m+1} .. x_n)$ on doit trouver le système principal pour $x_1 = x_1^0 .. x_m = x_m^0$ de $2n+1-m$ intégrales du système de $2n+1-m$ équations différentielles ordinaires aux differentielles totales qu'on obtient en égalant à zéro $2n+1-m$ détérminants indépendants du dégré $m+1$ du système d'éléments

$$\left|\begin{matrix} dx_1 \dots dx_n, & dz, & dp, \dots \dots dp_n \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_1}, \dots \frac{\partial F_1}{\partial p_n}, & \sum_1^n k\, p_k \frac{\partial F_1}{\partial p_k}, & -\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - p_1 \frac{\partial F_1}{\partial z}, \dots - \frac{\partial F_1}{\partial x_n} - p_n \frac{\partial F_1}{\partial z}, \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial p_1}, \dots \frac{\partial F_m}{\partial p_n}, & \sum_1^n k\, p_k \frac{\partial F_m}{\partial p_k}, & -\frac{\partial F_m}{\partial x_1} - p_1 \frac{\partial F_m}{\partial z}, \dots - \frac{\partial F_m}{\partial x_n} - p_n \frac{\partial F_m}{\partial z} \end{matrix}\right| \text{[1]}$$

et éliminer $x_{m+1}^0 \dots x_n^0$, z_0, $p_1^0 \dots p_n^0$ de ces intégrales

$$\begin{aligned} x_j &= x_j(x_1, .. x_m, x_{m+1}^0 \dots x_n^0, z_0, p_1^0 .. p_n^0) \qquad (j = m+1 \dots n) \\ z &= z(x_1, .. x_m, x_{m+1}^0 \dots x_n^0, z_0, p_1^0, .. p_n^0) \\ p_i &= p_i(x_1, .. x_m, x_{m+1}^0, \dots x_n^0, z_0, p_1^0, .. p_n^0) \qquad (i = 1 .. n) \end{aligned}$$

et des équations

$$F_\alpha(x_1^0 .. x_n^0, z_0, p_1^0, .. p_n^0) = c_\alpha \quad (\alpha = 1 \dots m),$$

$$\varphi(x_{m+1}^0, .. x_n^0) = z_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_j^0} = p_j^0 \quad (j = m+1 \dots n).$$

La première dés équations obtenues

$$z = f(x_1, .. x_n), \qquad p_i = f_i(x_1, .. x_n) \qquad (i = 1 .. n)$$

est l'intégrale cherchée si pour ces équations $\Delta \neq 0$.

[1]) Le système canonique de Hamilton généralisé.

Pour trouver l'intégrale commune des équations données (I) il faut et il suffit trouver $n+1$ fouctions z, p_i $(i=1..n)$ des variables indépendantes $x_1,..x_n$ satisfaisant aux équations (I) et à l'équation

$$dz - p_1 dx_1 - .. - p_n dx_n = 0. \tag{II}$$

Introduisons au lieu des variables $x_{m+1},..x_n$ les variables $y_{m+1}...y_n$ à l'aide des formules quelconques pourvu que soit

$$\triangle_1 = \frac{\partial(x_{m+1}..x_n)}{\partial(y_{m+1}..y_n)} \neq 0.$$

Les fonctions cherchées z, p_i $(i=1..n)$ deviendrons celles des variables indépendantes $x_1..x_m$, $y_{m+1}..y_n$. Il suit des équations (I) que

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_i} + \sum_1^m k \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \sum_{m+1}^n j \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_i} + $$
$$+ \sum_{m+1}^n j \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0 \qquad (i=1..m) \tag{III}$$

$$\sum_{m+1}^n j \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial y_s} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y_s} + \sum_1^m i \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial y_s} + $$
$$+ \sum_{m+1}^n j \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial y_s} = 0 \qquad (s=m+1..n) \tag{IV}$$

et de l'équation (II) que

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i + \sum_{m+1}^n j\, p_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \qquad (i=1..m) \tag{V}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y_s} = \sum_{m+1}^n j\, p_j \frac{\partial x_j}{\partial y_s} \qquad (s=m+1..n). \tag{VI}$$

On peut encore y ajouter les équations

$$\frac{\partial p_i}{\partial y_s} = \sum_{m+1}^n j \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_i}\frac{\partial x_j}{\partial y_s} - \frac{\partial p_j}{\partial y_s}\frac{\partial x_j}{\partial x_i} \right) \quad (i=1..m,\ s=m+1..n) \tag{VII}$$

qu'on obtient des équations (V), (VI) par les différentiations.

Dans ce qui va suivre nous représenterons par $\triangle_{(i)p_k}$, $\triangle_{(i)x_k}$, $\triangle_{(i)z}$ le résultat de la substitution dans le détérminant $\triangle$ au lieu des éléments $\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}$ $(\alpha = 1 \ldots m)$ des elements $\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k}, -\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_k} - p_k \frac{\partial F_\alpha}{\partial z}, - -\frac{\partial F_\alpha}{\partial z}$ respectivement $(i = 1 \ldots m, \quad k = 1 \ldots n)$.

Portons daus les équations (IV) les valeurs des $\frac{\partial z}{\partial y_s}, \frac{\partial p_i}{\partial y_s}$ $(i = 1 \ldots m, \quad s = m+1 \ldots n)$ tirées des équations (VI), (VII). On aura

$$\sum_{m+1}^{n} {}_j \frac{\partial y_j}{\partial y_s}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial z} + \sum_{1}^{m} {}_i \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial p_j}{\partial x_i}\right) +$$

$$+ \sum_{m+1}^{n} {}_j \frac{\partial p_j}{\partial y_s}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_j} - \sum_{1}^{m} {}_i \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right) = 0 \qquad (s = m+1 \ldots n).$$

Choisissons si c'est possible les formules de la transformation mentionnée de la manière que

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_j} - \sum_{1}^{m} {}_i \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1 \ldots m \\ j = m+1 \ldots n \end{pmatrix} \tag{VIII}$$

Comme $\triangle_1 \neq 0$ il viendra que

$$\text{(IX)} \qquad \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial z} + \sum_{1}^{m} {}_i \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0 \begin{pmatrix} \alpha = 1 \ldots m \\ j = m+1 \ldots n \end{pmatrix}.$$

On peut présenter les équations (VIII), (IX) dans une autre forme. En supposant que j aie la valeur constante quelconque $m+1 \ldots n$ et que $\alpha = 1 \ldots m$ et en résolvant les 2m équations obtenues par rapport aux $\frac{\partial x_j}{\partial x_i}, \frac{\partial p_j}{\partial x_i}$ $(i = 1 \ldots m)$ on a

$$\triangle \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \triangle_{(i)p_j}, \quad \triangle \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = \triangle_{(i)x_j}. \tag{a}$$
$$(i = 1 \ldots m, \quad j = m+1 \ldots n).$$

Si dx_j, dp_j $(j = m+1 \ldots n)$ sont les différentielles totales des x_j, p_j par rapport aux variables indépendantes $x_1 \ldots x_m$ on a que

$$\triangle\, dx_j - \sum_{1}^{m} {}_i \triangle_{(i)p_j} dx_i = 0,$$

$$\triangle\, dp_j - \sum_1^m {}_i \triangle_{(i)\,x_j}\, dx_i = 0$$

ou que

$$\begin{vmatrix} dx_1 \ldots & dx_m & dx_j \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_1}, \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial p_m}, & \frac{\partial F_1}{\partial p_j} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial p_1}, \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m}, & \frac{\partial F_m}{\partial p_j} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} dx_1 \ldots & dx_m & dp_j \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_1}, \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial p_m}, & -\frac{\partial F_1}{\partial x_j} - p_j \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial p_1}, \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m}, & -\frac{\partial F_m}{\partial x_j} - p_j \frac{\partial F_m}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

$$(j = m+1 \,..\, n).$$

C'est l'autre forme des équations (VIII), (IX). Portons maintenant les valeurs des $\frac{\partial z}{\partial x_i}$, $\frac{\partial x_j}{\partial x_i}$, $\frac{\partial p_j}{\partial x_i}$ $(j = m+1 \,..\, n)$ tirées des équations (V), (a) dans l'équation (III).

On aura

$$\triangle \sum_1^m {}_k \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \triangle\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F_\alpha}{\partial z}\right) + \sum_{m+1} {}_j \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial z}\right) \triangle_{(i)p_j} +$$

$$+ \sum_{m+1}^n {}_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_j} \triangle_{(i)\,xj} = 0 \quad (\alpha, i = 1 \ldots m).$$

$$\text{Or} \quad [F_\alpha, F_\beta] = 0 \quad (\alpha, \beta = 1 \,..\, m)$$

ou

$$\sum_1^m {}_i \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F_\alpha}{\partial z}\right) \frac{\partial F_\beta}{\partial p_i} + \sum_{m+1}^n {}_j \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial z}\right) \frac{\partial F_\beta}{\partial p_j} -$$

$$- \sum_{m+1}^n {}_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_j} \left(\frac{\partial F_\beta}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial F_\beta}{\partial z}\right) = \sum_1^m {}_k \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k} \left(\frac{\partial F_\beta}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial F_\beta}{\partial z}\right)$$

$$(\alpha, \beta = 1 \,..\, m).$$

Supposant que α aie la valeur constante quelconque $1 \,..\, m$, et que $\beta = 1 \,..\, m$ et résolvant les m équations obtenues par rapport aux $\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F_\alpha}{\partial z}$ $(i = 1 \,..\, m)$ on a que

$$\triangle\left(\frac{\partial F_a}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial F_a}{\partial z}\right)+\sum_{m+1}^{n}{}_j\left(\frac{\partial F_a}{\partial x_j}+p_j\frac{\partial F_a}{\partial z}\right)\triangle_{(i)p_j}+$$

$$+\sum_{m+1}^{n}{}_j\frac{\partial F_a}{\partial p_j}\triangle_{(i)x_j}=-\sum_{1}^{m}{}_k\frac{\partial F_a}{\partial p_k}\triangle_{(i)x_k}.$$

Donc

$$\sum_{1}^{m}{}_k\frac{\partial F_a}{\partial p_k}\left(\triangle\frac{\partial p_k}{\partial x_i}-\triangle_{(i)x_k}\right)=0\quad\left(\begin{matrix}a=1\,..\,m\\ i=1\,..\,m\end{matrix}\right)$$

et comme $\triangle\neq 0$ il s'ensuit que

$$\triangle\frac{\partial p_k}{\partial x_i}=\triangle_{(i)x_k}\qquad (i,k=1\ldots m).$$

Si dp_k est la différentielle totale de p_k par rapport aux variables $x_1\,..\,x_m$ on a que

$$\triangle\, dp_k-\sum_{1}^{m}{}_i\,\triangle_{(i)x_k}\,dx_i=0\quad (k=1\,..\,m)$$

ou que

$$\left|\begin{matrix}dx_1\,\ldots\ldots & dx_m & dp_k\\ \frac{\partial F_1}{\partial p_1},\ldots & \frac{\partial F_1}{\partial p_m}, & -\frac{\partial F_1}{\partial x_k}-p_k\frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ \frac{\partial F_m}{\partial p_1},\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m}, & -\frac{\partial F_m}{\partial x_k}-p_k\frac{\partial F_m}{\partial z}\end{matrix}\right|=0\quad (k=1\,..\,m).$$

Portons enfin les valeurs (a) des $\frac{\partial x_j}{\partial x_i}$ $(j=m+1\,..\,n)$ dans l'équation (V).

On aura que

$$\triangle\frac{\partial z}{\partial x_i}=\sum_{1}^{n}{}_k\, p_k\,\triangle_{(i)p_k}.$$

Si dz est la différentielle totale de z par rapport aux variables $x_1\ldots x_m$, on a que

$$\triangle\, dz-\sum_{1}^{m}{}_i\, dx_i\left(\sum_{1}^{n}{}_k\, p_k\,\triangle_{(i)p_k}\right)=0$$

ou que

$$\begin{vmatrix} dx_1 \ldots & dx_m & dz \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_1}, \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial p_m}, & \sum_1^n{}_k\, p_k \frac{\partial F_1}{\partial p_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial p_1}, \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m}, & \sum_1^n{}_k\, p_k \frac{\partial F_m}{\partial p_k} \end{vmatrix} = 0.$$

Nous avons donc obtenu le résultat suivant: si la transformation mentionnée est possible, les fonctions cherchées z, p_i $(i = 1 \ldots n)$, et x_j $(j = m+1 \ldots n)$ considérées comme les fonctions des variables indépendantes $x_1 \ldots x_m$ doivent satisfaire aux $2n+1-m$ équations différentielles ordinaires aux différentielles totales qu'on obtient en égalant à zéro les $2n+1-m$ détérminants indépendants du degré $m+1$ du système d'éléments

$$\begin{vmatrix} dx_1 \ldots & dx_n & dz & dp_1 \ldots & & & \ldots dp_n \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_1}, \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial p_n}, & \sum_1^n{}_k\, p_k \frac{\partial F_1}{\partial p_k}, & -\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - p_1 \frac{\partial F_1}{\partial z}, & \ldots & & -\frac{\partial F_1}{\partial x_n} - p_n \frac{\partial F_1}{dz} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial p_1}, \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_n}, & \sum_1^n{}_k\, p_k \frac{\partial F_m}{\partial p_k}, & -\frac{\partial F_m}{\partial x_1} - p_1 \frac{\partial F_m}{\partial z}, & \ldots & & -\frac{\partial F_m}{\partial x_n} - p_n \frac{\partial F_m}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Mais ce systéme d'équations ordinaires correspond au système complet d'équations linéaires

$$\left[V, F_\beta\right] = 0 \quad (\beta = 1 \ldots m).$$

Il est donc complétement intégrable; la transformation mentionnée est possible et, si le système principal pour $x_1 = x_1^0, \ldots x_m = x_m^0$ des $2n+1-m$ intégrales de ces équations est

$$\begin{aligned} x_j &= x_j\,(x_1, \ldots x_m, x_{m+1}^0, \ldots p_n^0) \quad (j = m+1 \ldots n) \\ z &= z\,(x_1, \ldots x_m, x_{m+1}^0, \ldots p_n^0) \qquad \text{(b)} \\ p_i &= p_i\,(x_1, \ldots x_m, x_{m+1}^0, \ldots p_n^0), \quad (i = 1 \ldots n) \end{aligned}$$

les fonctions cherchées z, p_i $(i = 1 \ldots n)$ et x_j $(j = m+1 \ldots n)$ doivent avoir la forme (b), où $x_{m+1}^0, \ldots p_n^0$ sont les fonctions des $y_{m+1}, \ldots y_n$, qu'on doit encore détérminer.

Comme $F_\alpha(x_1, \dots p_n)$ $(\alpha = 1 \dots m)$ sont les solutions du système complet d'equations partielles linéaires

$$\left[V, F_\beta\right] = 0, \quad (\beta = 1 \dots m)$$

on a en vertu des équations (b) que

$$F_\alpha(x_1, \dots p_n) = F_\alpha(x_1^0, \dots p_n^0) \qquad (\alpha = 1 \dots m).$$

et, comme les fontions cherchées doivent satisfaire aux équations (I), ona que

$$F_\alpha(x_1^0, \dots p_n^0) = C_\alpha \qquad (\alpha = 1 \dots m).$$

Ces équations définissent m des fonctions $x_{m+1}^0, \dots p_n^0$ p. ex. $p_1^0 \dots p_m^0$ en fonctions des autres d'elles. En vertu des rélations précedentes les formules (b) deviennent celles (c), qui satisfont aux équations (I) et (V). Il ne reste que satisfaire aux équations (VI).

Si $$U_s = \frac{\partial z}{\partial y_s} - \sum_{m+1}^{n} {}_j \, p_j \frac{\partial x_j}{\partial y_s}, \qquad (s = m+1 \dots n)$$

où au lieu des z, x_j, p_j, $(j = m+1 \dots n)$ sont substituées leurs expressions (b) on a que

$$\frac{\partial U_s}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 z}{\partial y_s \partial x_i} - \sum_{m+1}^{n} {}_j \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \frac{\partial x_j}{\partial y_s} - \sum_{m+1}^{n} {}_j \, p_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_s \partial x_i}$$

$$(i = 1 \dots m, \quad s = m+1 \dots n).$$

Mais

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_s \partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial y_s} + \sum_{m+1}^{n} {}_j \frac{\partial p_j}{\partial y_s} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} + \sum_{m+1}^{n} {}_j \, p_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_s \partial x_i},$$

d'où il vient que

$$\frac{\partial U_s}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial y_s} + \sum_{m+1}^{n} {}_j \frac{\partial p_j}{\partial y_s} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} - \sum_{m+1}^{n} {}_j \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \frac{\partial x_j}{\partial y_s}$$

$$(i = 1 \dots m, \quad s = m+1 \dots n).$$

En y substituant au lieu des $\frac{\partial x_j}{\partial x_i}$, $\frac{\partial p_j}{\partial x_i}$ leurs valeurs (a) on obtient

$$\triangle \frac{\partial U_s}{\partial x_i} = \triangle \frac{\partial p_i}{\partial y_s} + \sum_{m+1}^{n} {}_j \triangle_{(i)p_j} \frac{\partial p_j}{\partial y_s} - \sum_{m+1}^{n} {}_j \triangle_{(i)x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_s}$$

$$(i = 1 \dots m, \quad s = m+1 \dots n).$$

Or $F_\alpha(x_1, \dots p_n) = C_\alpha (\alpha = 1 \dots m)$
d'où

$$\sum_{m+1}^{n}{}^{j} \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial y_s} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y_s} + \sum_{1}^{m}{}^{i} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial y_s} + \sum_{m+1}^{n}{}^{j} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial y_s} = 0$$

$$(\alpha = 1 \dots m, \quad s = m+1 \dots n),$$

et en résolvant par rapport à $\dfrac{\partial p_i}{\partial y_s}$,

$$\triangle \frac{\partial p_i}{\partial y_s} + \sum_{m+1}^{n} \triangle_{(i)\,pj} \frac{\partial p_j}{\partial y_s} - \sum_{m+1}^{n}{}^{j} \triangle_{(i)\,xj} \frac{\partial x_j}{\partial y_s}$$

$$= \triangle_{(i)\,z} \left(\frac{\partial z}{\partial y_s} - \sum_{m+1}^{n}{}^{j} p_j \frac{\partial x_j}{\partial y_s} \right) = \triangle_{(i)z} U_s .$$

Donc

$$\triangle \frac{\partial U_s}{\partial x_i} = \triangle_{(i)z} U_s$$

ou

$$\triangle \frac{\partial}{\partial x_i} \log U_s = \triangle_{(i)z} \qquad (i = 1 \dots m, \quad s = m+1 \dots n).$$

Si $d \log U_s$ est la différentielle totale de $\log U_s$ par rapport aux variables $x, \dots x_m$, on a que

$$d \log U_s = \frac{1}{\triangle} \sum_{1}^{m}{}^{i} \triangle_{(i)z} \, dx_i.$$

La seconde partie est la différentielle totale par rapport à $x_1 \dots x_m$. En effet, le système de $2n+2-m$ équations différentielles ordinaires aux différentielles totales qu'on obtient en égalant à zéro les $2n+2-m$ déterminants indépendants du degré $m+1$ du système d'éléments

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} dx_1, \dots dx_n & dz & dp_1 \dots\dots & & dp_n & & & dt. \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial p_1}, \dots \dfrac{\partial F_1}{\partial p_n}, & \displaystyle\sum_{1}^{n}{}^{k} p_k \frac{\partial F_1}{\partial p_k}, & -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} - p_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial z}, \dots & & -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} - p_n \dfrac{\partial F_1}{\partial z}, & & & -\dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & & & \dots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial p_1}, \dots \dfrac{\partial F_m}{\partial p_n}, & \displaystyle\sum_{1}^{n}{}^{k} p_k \frac{\partial F_m}{\partial p_k}, & -\dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} - p_1 \dfrac{\partial F_m}{\partial z}, \dots & & -\dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} - p_n \dfrac{\partial F_m}{\partial z}, & & & -\dfrac{\partial F_m}{\partial z} \end{array} \right\|$$

correspond au systeme d'équations linéaires

$$\left[V, F_\alpha\right] - \frac{\partial F_\alpha}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad (\alpha = 1 \dots m),$$

qui est complet, comme il est aisé de voir à l'aide de l'identité de A. Mayer.

Le système d'équations ordinaires est donc complètement intégrable. Comme les équations (b) sont ses $2n + 1 - m$ intégrales, l'équation

$$dt = \frac{1}{\triangle} \sum_1^m {}^i \triangle_{(i)z}\, dx_i$$

a en vertu d'équations (b) qu'une intégrale, et comme la seconde partie ne contient pas t, elle est la différentielle totale. Elle la reste évidement en vertu des équations (c) c. q. f. d. Si $\varrho\,(x_1 \dots x_m)$ est l'intégrale de cette différentielle se réduisant à zéro pour $x_1 = x_1^0, \dots x_m = x_m^0$ on a en intégrant que

$$U_s = U_s^0 e^{\varrho\,(x_1 \dots x_m)} \qquad \text{où } U_s^0 = \frac{\partial z_0}{\partial y_s} - \sum_{m+1}^n {}^j p_j^0 \frac{\partial x_j^0}{\partial y_s} \,^{1)} \qquad (X)$$

Les équations donc (VI) sont:

$$\left[\frac{\partial z_0}{\partial y_s} - \sum_{m+1}^n {}^j p_j^0 \frac{\partial x_j^0}{\partial y_s}\right] e^{\varrho\,(x_1 \dots x_m)} = 0 \qquad (s = m+1 \dots n).$$

Nous pouvons supposer que

$$\frac{\partial\,(x_{m+1}^0, \dots x_n^0)}{\partial\,(y_{m+1}, \dots y_n)} \neq 0$$

car pour $x_1 = x_1^0, \dots x_m = x_m^0$

$$\triangle = \frac{\partial\,(x_{m+1}^0, \dots x_n^0)}{\partial\,(y_{m+1}, \dots x_n)} \neq 0.$$

Dans cette supposition z_0 est une fonction $\varphi\;(x_{m+1}^0, \dots x_n^0)$ des $x_{m+1}^0, \dots x_n^0$ et les équations (VI) sont:

---

1) Il suit des équations (V) et (X) qu'en vertu des équations (c) on a que $dz - p_1\, dx_1 - \dots - p_n\, dx_n = e^{\varrho\,(x_1 \dots x_m)} \left(dz_0 - \sum_{m+1}^n j\, p_j\, dx_j^0\right)$ ou $F_\alpha\,(x_1 \dots p_n) = C_\alpha$ $(\alpha = 1 \dots m)$. Les équations (c) sont donc les formules de la transformation de Pfaff après laquelle l'éxpression différentielle $dz - p_1\, dx_1 - \dots - p_n\, dx_n$ où $F_\alpha\,(x_1 \dots p_n) = C_\alpha\,(\alpha = 1 \dots m)$ ne contient les variables $x_1 \dots x_m$ qu'en facteur commun $e^{\varrho\,(x_1 \dots x_m)}$.

$$\sum_{m+1}^{n} j \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j^0} - p_j^0 \right) \frac{\partial x_j^0}{\partial y_s} e^{\varrho (x_1 \ldots x_m)} = 0 \qquad (s = m+1 \ldots n)$$

ou comme
$$\frac{\partial (x_{m+1}^0, \ldots x_n^0)}{\partial (y_{m+1}, \ldots y_n)} \neq 0,$$

$$e^{\varrho (x_1 \ldots x_m)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j^0} - p_j^0 \right) = 0. \qquad (j = m+1 \ldots n).$$

Il faut et il suffit pour cela que

$$p_j^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j^0} \qquad (j = m+1 \ldots n)$$

si pour les équations (d) $\triangle \neq 0$, les équations (d) étant les équations (c) après la substitution

$$z_0 = \varphi (x_{m+1}^0, \ldots x_n^0), \qquad p^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j^0} \qquad (j = m+1 \ldots n).$$

Les fonctions z, p_i ($i = 1 \ldots n$) sont donc trouvées. Il ne reste qu'éliminer $y_{m+1} \ldots y_n$ en éliminant $x_{m+1}^0, \ldots x_n^0$ à l'aide des $n-m$ premières équations (d). La première des $n+1$ équations obtenues

(e) $$z = f(x_1, \ldots x_n), p_i = f_i\ (x_1, \ldots x_n) (i = 1 \ldots n)$$

est l'intégrale commune des équations (I) si en vertu des équations (e) $\triangle \neq 0$.

On démontrera par le procédé connu que pour $x_1 = x_1^0, \ldots x_m = x_m^0$ l'intégrale $z = f(x_1, \ldots x_n)$ devient $z = \varphi (x_{m+1}, \ldots x_n)$. Comme la fonction $\varphi (x_{m+1}, \ldots x_n)$ reste arbitraire, elle peut être donnée à l'avance.

Об одном видоизменении неравенства Чебышева и о погрешности формулы Лапласа.

С. Бернштейн.

§ 1. В настоящей статье я имею в виду, главным образом, показать, что, применяя надлежащим образом классическое рассуждение Чебышева, возможно получить неравенство значительно более точное, чем неравенство Чебышева, если только допустить некоторые ограничительные условия, обычно осуществляющиеся на практике. Затем мы воспользуемся полученным результатом для исследования погрешности формулы Лапласа.

Пусть $x, y, z\ldots$ представляют собой независимые величины, математические ожидания которых равны 0; пусть, далее, $a_k, b_k, c_k \ldots$ будут математические ожидания x^k, y^k, z^k, причем можно указать такое число L, что математические ожидания степени выше третьей удовлетворяют неравенствам вида

$$\left|a_k\right| \leq \frac{k!}{4!}\left(\frac{L}{5}\right)^{k-4} a_4, \quad \left|b_k\right| \leq \frac{k!}{4!}\left(\frac{L}{5}\right)^{k-4} b_4 \text{ и т. д.}$$

В таком случае, полагая $A_2 = a_2 + b_2 + c_2 \ldots$, $A_3 = a_3 + b_3 + c_3 \ldots$, $A_4 = a_4 + b_4 + c_4 + \ldots$, неравенство

$$\left|(x + y + z\ldots) - \frac{t^2}{3}\frac{A_3}{A_2}\right| < t\sqrt{2A_2}\left[1 + \frac{A_4 t^2}{6A_2^2}\right] \qquad (1)$$

имеет вероятность большую, чем $1 - 2e^{-t^2}$ $\left(\text{если только } t \leq \frac{5}{4L}\sqrt{2A_2}\right)$.

В самом деле,

$$I = \text{Мат. ожид.}\left[e^{\varepsilon(x+y+z+\ldots)}\right] = \text{Мат. ож.}\left[e^{\varepsilon x}\right] . \text{Мат. ож.}\left[e^{\varepsilon y}\right] . \text{Мат. ож.}\left[e^{\varepsilon z}\right] \ldots$$

Но

$$\text{мат. ож.}\left[e^{\varepsilon x}\right]=1+\frac{\varepsilon^2}{2}a_2+\frac{\varepsilon^3}{3!}a_3+\frac{\varepsilon^4}{4!}a_4+\ldots=$$

$$=1+\frac{\varepsilon^2}{2}a_2+\frac{\varepsilon^3}{3!}a_3+\frac{\varepsilon^4}{4!}a_4\left[1+\Theta\sum_1^\infty\left[\left(\frac{\varepsilon L}{5}\right)^n\right]\right],$$

где $0<\Theta<1$. Поэтому, полагая $\frac{\varepsilon L}{5}\leq\frac{1}{2}$, находим

$$\text{мат. ож.}\left[e^{\varepsilon x}\right]=1+\frac{\varepsilon^2}{2}a_2+\frac{\varepsilon^3}{3!}a_3+\frac{\Theta\varepsilon^4}{12}a_4$$

Откуда

$$\log\left[\text{Мат. ож. } e^{\varepsilon x}\right]<\frac{\varepsilon^2 a_2}{2}+\frac{\varepsilon^3 a_3}{6}+\frac{\varepsilon^4 a_4}{12}$$

Применяя аналогичные неравенства к остальным величинам и складывая их, получим

$$\log I<\frac{\varepsilon^2 A_2}{2}+\frac{\varepsilon^3 A_3}{6}+\frac{\varepsilon^4 A_4}{12} \qquad (2)$$

Точно таким же образом, полагая $I_1 =$ Мат. ож. $\left[e^{-\varepsilon(x+y+z+\ldots)}\right]$, найдем

$$\log I_1<\frac{\varepsilon^2 A_2}{2}-\frac{\varepsilon^3 A_3}{6}+\frac{\varepsilon^4 A_4}{12}. \qquad (3)$$

Применяя теперь известное рассуждение Чебышева, заключаем, что вероятность неравенства

$$e^{\varepsilon(x+y+z+\ldots)}>e^{t^2}I \qquad (4)$$

менее, чем e^{-t^2}. Но неравенство (4) равнозначно неравенству

$$x+y+z+\ldots>\frac{t^2+\log I}{\varepsilon}.$$

Подставляя (2) находим, что вероятность неравенства

$$x+y+z+\ldots\geq\frac{t^2}{\varepsilon}+\frac{\varepsilon A_2}{2}+\frac{\varepsilon^2 A_3}{6}+\frac{\varepsilon^3 A_4}{12} \qquad (5)$$

менее, чем e^{-t^2}, и полагая, наконец, $\varepsilon^2 A_2=2t^2$, заменяем неравенство (5) неравенством

$$(x+y+z+\ldots)-\frac{t^2}{3}\frac{A_3}{A_2}\geq t\sqrt{2A_2}\left(1+\frac{A_4 t^2}{6A_2^2}\right) \qquad (6)$$

Подобным же образом убеждаемся, пользуясь неравенством (3), что и неравенство

$$(x+y+z+\ldots)-\frac{t^2}{3}\frac{A_3}{A_2}\leq -t\sqrt{2A_2}\left(1+\frac{A_4t^2}{6A_2^2}\right) \tag{6 bis}$$

имеет вероятность меньшую, чем e^{-t^2}.

Следовательно, вероятность неравенства

$$\left|(x+y+z+\cdots)-\frac{t^2}{3}\frac{A_3}{A_2}\right|<t\sqrt{2A_2}\left[1+\frac{A_4t^2}{6A_2^2}\right]. \tag{1}$$

более, чем $1-2e^{-t^2}$, при условии, что $t=\varepsilon\sqrt{\frac{A_2}{2}}\leq\frac{5}{4L}\sqrt{2A_2}$, что и требовалось доказать.

§ 2. Наше неравенство становится точнее неравенства Чебышева только при значениях t, для которых $e^{t^2}>4t^2$ и представляет особый интерес для значений t, превышающих несколько единиц, когда точность его приближается к точности предельной формулы Лапласа-Ляпунова, согласно которой вероятность неравенства (1) имеет пределом

$$\Phi(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt,$$

при условии, что $\frac{A_4}{A_2^2}$ стремится к 0.

Остановимся для примера на случае ряда независимых опытов, при которых вероятность появления события E равна соответственно $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Очевидно, что в данном случае, как и всегда, когда рассматриваемые независимые величины ограничены, теорема применима. Поэтому вероятность неравенства

$$\left|m-\sum_{i=1}^{n}p_i-\frac{t^2}{3}\frac{A_3}{A_2}\right|<t\sqrt{2A_2}\left(1+\frac{A_4t^2}{6A_2^2}\right) \tag{7}$$

больше, чем $1-2e^{-t^2}$, где m число появлений E при n опытах,

$A_2=\sum_1^n p_iq_i$, $A_3=\sum_1^n p_iq_i(q_i-p_i)$, $A_4=\sum_1^n p_iq_i(p_i^3+q_i^3)$, для всех значений $t\leq\frac{5}{4}\sqrt{2A_2}$.

В частности, если все вероятности $p_i=p$, неравенство (7) получит форму

$$\left|m-np-\frac{t^2}{3}(q-p)\right|<t\sqrt{2npq}\left[1+\frac{t^2(p^3+q^3)^2}{6npq}\right]. \tag{8}$$

Пусть, например, $p = \frac{1}{50}$, $n = 20.000$, $t = 5$; тогда неравенство (8) получит форму [1])

$$|m - 408| < 140\left(1 + \frac{5}{784}\right),$$

вероятность которого, следовательно, более, чем $12 - e^{-25} = 0,99999.99999.7$, что позволяет нам утверждать, что предельное значение даваемое в данном случае предельною формулой Лапласа, которое, как не трудно вычислить, равно 0,99999.99999.8, правильно с точностью до $\frac{1}{10^{10}}$. Неравенство Чебышева даже для более широкого неравенства

$$|m - 400| \leq 150$$

дает в качестве нижнего предела для вероятности только 0,984.

Если наше неравенство во многих случаях позволяет установить, что погрешность формулы Лапласа для больших значений t весьма незначительна, даже при сравнительно небольших значениях n, то с другой стороны,—этим неравенством можно также воспользоваться, чтобы показать, что, если $\sum_1^n p_i$ медленно возрастает, то даже для чрезвычайно больших значений n, предельная формула Лапласа в том виде, как она обычно применяется, дает погрешность бóльшую, чем наше неравенство. Действительно, положим n настолько большим, чтобы $\frac{t^3 A_4}{3\sqrt{2A_2^3}}$ было правильной дробью; тогда выбирая t так, чтобы левая часть неравенства (7) была целым числом, можем заменить его эквивалентным неравенством

$$\left| m - \Sigma p_i - \frac{t^2}{3}\frac{A_3}{A_2} \right| < t\sqrt{2A_2} \tag{9}$$

По теореме Ляпунова, вероятность этого неравенства (9) при бесконечном возрастании A_2 имеет пределом

$$F(t) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(t + \frac{t^3 A_3}{3\sqrt{2A_2^3}}\right) + \Phi\left(t - \frac{t^3 A_3}{3\sqrt{2A_2^3}}\right)\right] \tag{10}$$

Замечая, что из асимптотического равенства, для больших значений t,

$$\Phi(t) \sim 1 - \frac{e^{-t^2}}{t\sqrt{\pi}} \tag{11}$$

[1]) Заметим, что во второй части неравенства можно отбросить дробь $\frac{5}{784}$, так как m должно быть целым числом.

вытекает асимптотическое равенство

$$F(t) \sim 1 - \frac{e^{-(t-k)^2}}{(t-k)2\sqrt{\pi}}, \tag{12}$$

где $k = \frac{t^3 |A_3|}{3\sqrt{2A_2^3}}$, заключаем, что, если k не очень мало, то $F(t) < 1 - 2e^{-t^2}$, между тем, как по нашей теореме, точное значение рассматриваемой вероятности должно быть более, чем $1 - 2e^{-t^2}$. Например, если $p_i = \frac{1}{i}$, то даже для огромного значения $n = e^{2048}$, полагая $t = 5$, находим для $F(t) = 0{,}99999.99995.8$, между тем, как $1 - 2e^{-t^2} = 0{,}99999.999997$, откуда видно, что в то время, как вероятность неосуществления неравенства (9) в действительности, согласно нашей теореме, менее, чем $3 . 10^{-11}$, предельная формула дает $42 . 10^{-11}$.

§ 3. Из предыдущего видно, что предельная формула Лапласа, которой обычно пользуются, как приближенным значением для вероятности неравенства

$$\left| m - \sum p_i \right| < t\sqrt{2A_2},$$

более точно рассматривать, как приближенное значение вероятности неравенства

$$\left| m - \sum p_i - \frac{t^2}{3}\frac{A_3}{A_2} \right| < t\sqrt{2A_2}.$$

Для более полного обоснования нашего замечания, припомним, ограничиваясь случаем постоянной вероятности p, классический вывод формулы Лапласа, который состоит в том, что при помощи формулы Стирлинга для вероятности $P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$ получается ассимтоптическое выражение

$$P_{m,n} \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} \left[\frac{np}{m}\right]^m \left[\frac{nq}{n-m}\right]^{n-m}; \tag{13}$$

относительная погрешность этого выражения весьма мала даже для небольших значений n, m, n—m. После этого доказывается, что, для

$$m = np + z\sqrt{2npq}, \tag{14}$$

выражение $w=\left[\frac{m}{np}\right]^m\left[\frac{n-m}{nq}\right]^{n-m}$ имеет пределом e^{z^2} при безконечном возрастании n. На эту последнюю часть рассуждения я и хотел бы обратить внимание, чтобы внести в нее соответствующее изменение.

Не ограничиваясь целыми значениями m, поставим себе вопрос: определить m в функции z таким образом, чтобы

$$w=e^{z^2} \tag{15}$$

при всяком значении n. С этою целью заменяем равенство (14) равенством

$$m=n\left[p+y\left(\sqrt{2pq}+\varphi(y)\right)\right], \tag{16}$$

где $y=\frac{z}{\sqrt{n}}$, а $\varphi(y)$ неизвестная функция, которая определится из уравнения (15), получающего вид, после логарифмирования,

$$m\log\frac{m}{np}+\left(n-m\right)\log\frac{n-m}{nq}=n\,y^2,$$

или

$$\left[p+y\left(\sqrt{2pq}+\varphi(y)\right)\right]\log\left[1+\frac{y}{p}\left(\sqrt{2pq}+\varphi(y)\right)\right]+$$

$$\left[q-y\left(\sqrt{2pq}+\varphi(y)\right)\right]\log\left[1-\frac{y}{q}\left(\sqrt{2pq}+\varphi(y)\right)\right]=y^2.$$

Полагая, для краткости, $\sqrt{2pq}+\varphi(y)=u$, находим, наконец, пользуясь разложением логарифма, уравнение

$$\frac{u^2}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)+\frac{u^3y}{2.3}\left(\frac{1}{q^2}-\frac{1}{p^2}\right)+\dots+\frac{u^k y^{k-2}}{k(k-1)}\left(\frac{1}{q^{k-1}}-\frac{1}{(-p)^{k-1}}\right)+\dots=1, \tag{17}$$

которое, при $y=0$, $u=\sqrt{2pq}$, обращается в тождество, и т. к. для этих значений производная уравнения (17) отлична от 0, то, на основании известной теоремы о неявных функциях, u разлагается в строку Тейлора

$$u=\sqrt{2pq}+\frac{q-p}{3}\,y+\dots, \tag{18}$$

сходящуюся для значений y не превышающих некоторого определенного числа R. Вычисление дальнейших коэффициентов ряда (18) имеет мало значения, т. к. подставляя (18) в формулу (16), получим

$$m=np+z\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}z^2+\dots \tag{19}$$

решение поставленного нами вопроса, откуда видно, что дальнейшие члены сходящегося ряда (19) с возрастанием n стремятся к 0, чего нельзя сказать о последнем написанном члене $\frac{q-p}{3}z^2$. Таким образом, вероятность равную $\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}}e$ точнее всего приписать целому числу ближайшему к

$$np + z\sqrt{2npq} + z^2\frac{q-p}{3}.$$

Более детальное развитие этих соображений дает возможность определить погрешность формулы Лапласа, применяемой с предлагаемой нами поправкой.

§ 4. Не останавливаясь на промежуточных [1]), довольно кропотливых (но не представляющих принципиальных трудностей) вычислениях, в которых я предполагаю, что число опытов n удовлетворяет неравенству $npq \geq 365$, мы получаем следующую точную формулу

$$P_{m,n} = \frac{\Delta z}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(z + \frac{\psi \Delta z}{2}\right)^2} \tag{20}$$

где $|\psi| < 1$, если z и Δz определяются условиями

$$m + \alpha = np + z\sqrt{2npq} + \frac{z^2(q-p)}{3},$$

$$m + 1 + \alpha = np + (z + \Delta z)\sqrt{2npq} + \frac{(z+\Delta z)^2}{3}(q-p),$$

причем $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$ и $\frac{2}{\sqrt{2npq}} < z \leq \sqrt[6]{2npq}$

Из (20) заключаем немедленно, что

$$P_{m,n} > \frac{\Delta z}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(z + \frac{\Delta z}{2}\right)^2} > \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-z^2} dz,$$

где a и b определяются соответственно из уравнений

$$m + \frac{1}{2} = np + a\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}a^2, \quad m + \frac{3}{2} = np + b\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3}b^2;$$

---

[1]) Укажем, еще одно выражение для $P_{m;n} = \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} e^{-z^2 - \frac{\varphi z^4}{4npq} - \frac{\theta}{10npq}}$ где $0 < \theta < 1$ и $-\frac{1}{4} < \varphi < 1$ верное для всякого n, при условии, что $|z| < \frac{1}{4}\sqrt{2npq}$

и с другой стороны, замечая, что

$$\triangle z_e - \left(z_0 - \frac{\triangle z}{2}\right)^2 < \int\limits_{z_0 - \triangle z}^{z_0} e^{-z^2} dz,$$

видим, что

$$P_{m,n} < \frac{\triangle z}{\sqrt{\pi}} e - \left(z - \frac{\triangle z}{2}\right)^2 < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{a'}^{b'} e^{-z^2} dz,$$

где a' и b' определятся соответственно из уравнений

$$m - 1 = np + a' \sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3} a'^2$$

$$m = np + b' \sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3} b'^2.$$

Следовательно, формулу (20) можно заменить формулой

$$P_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{z_0}^{z_1} e^{-z^2} dz \tag{21}$$

где z_0 и z_1, соответственно, положительные корни уравнений

$$m + \alpha = np + z_0 \sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3} z_0^2, \quad m + 1 + \alpha = np + z_1 \sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3} z_1^2,$$

при условии, что $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$, $npq \leq 365$, и положительный корень z уравнения $m = np + z\sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3} z^2$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{2}{\sqrt{2npq}} \leq z \leq \sqrt[6]{2npq}.$$

Из (21) выводим, наконец, что **вероятность неравенства** $m_0 \leq m < m_1$ **равна**

$$\sum_{m_0}^{m_1} P_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{z_0}^{z_1} e^{-z^2} dz, \tag{22}$$

где z_0 и z_1 **определятся из уравнений**

$$m_0 + \alpha = np + z_0 \sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3} z_0^2,$$

$$m_0 + \alpha = np + z_1 \sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3} z_1^2,$$

(сохраняя прежние предположения).

Полученному результату можно придать несколько иную форму: пусть z_1 и z_0 два положительные числа, удовлетворяющие условию, что разность

$$\left(z_1\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}z_1^2\right)-\left(z_0\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}z_0^2\right)$$

равна целому числу; в таком случае

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{z_0}^{z_1}e^{-z^2}dz=\frac{1}{2}\left[\Phi(z_1)-\Phi(z_0)\right]$$

более, чем вероятность неравенства

$$z_0\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}z_0^2+1\leq m-np<z_1\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}z_1^2+1$$

и менее, чем вероятность неравенства

$$z_0\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}z_0^2-\frac{1}{2}\leq m-np<z_1\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}z_1^2-\frac{1}{2}$$

Для того, чтобы получить аналогичные выводы для случая, когда z_0 и z_1 противоположных знаков, следует воспользоваться сначала неравенством (8), при помощи которого совместно с (22) легко вывести, что вероятность неравенства $m\geq m_0$ равна

$$\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\sqrt[6]{2npq}\right)-\Phi(z_0)\right]+\Theta e^{-\sqrt[3]{2npq}},$$

где $0<\Theta<1$, а z_0 есть положительный корень уравнения

$$m_0+\alpha=np+z_0\sqrt{2npq}+z_0^2\frac{q-p}{3},\ \left(\text{где} -1<\alpha<\frac{1}{2}\right).$$

Отсюда можно заключить, что вероятность неравенства

$$\left|m-np-\frac{t_0^2}{3}(q-p)\right|<t_0\sqrt{2npq}, \tag{23}$$

рассматриваемого с точностью до одной единицы, имеет вероятностью $\Phi(t_0)$ с точностью до

$$2e^{-\sqrt[3]{2npq}}\ (\text{при } t_0\leq\sqrt[6]{2npq},\ npq\geq 365).$$

Полагая, например, $p=\frac{2}{5}$, $n=28750$ находим, что вероятность неравенства

$$11322 < m < 11678$$

$$\text{более, чем } \Phi(1{,}5)-\frac{1}{10^{10}} \mp 0{,}966105;$$

вероятность же неравенства

$$11324 < m < 11676$$

$$\text{менее, чем } \Phi(1{,}5)+\frac{1}{10^{10}} \mp 0{,}966105.$$

§ 5. В заключение сопоставим приближенное выражение $P'_{m,n}$ данное Пирсоном[1]) для $P_{m,n}$ с произведенными нами вычислениями.

По Пирсону,

$$P'_{m,n}=\left[1+\frac{p-q}{2pqn}(np-m)\right]^{\frac{4pqn}{(p-q)^2}} e^{-\frac{2}{p-q}(np-m)}\lambda_n\,,$$

где λ_n независимый от m коэффициент.

Полагая $np-m=t\sqrt{2npq}$, мы нашли точное значение

$$\lambda_n P_{m,n}=P'_{m,n}\, e^{-\left[\frac{\Theta n}{12m(n-m)}+\frac{t^4(1+\varepsilon)}{12pqn}\right]}\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}},$$

где

$$|\varepsilon|<\frac{1}{2},\ 0<\Theta<1,\ |t|<\frac{1}{8}\sqrt{2pqn}\,,$$

Таким образом, функция Пирсона

$$\left(1+\frac{(p-q)t}{\sqrt{2pqn}}\right)^{\frac{4pqn}{(p-q)^2}} e^{-\frac{2t\sqrt{2pqn}}{p-q}}$$

выражает $P_{m,n}$ с тою же степенью точности[2]), как и e^{-z^2}, где z определяется из равенства

$$z\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}z^2=m-np=-t\sqrt{2npq}.$$

---

[1]) Philosophical Transactions. Vol 186.

[2]) См. выноску на стр. 44.

Следовательно, пределы, в которых формула Пирсона дает точны[e] результаты, определяются еще требованием, чтобы $\frac{t^4}{12pqn}$ стремилось к 0. Поэтому формула Пирсона перестает быть удовлетворительной, когд[а] $\frac{(np-m)^{4/3}}{2npq}$ не очень мало. Например, полагая $p=\frac{3}{4}$, $q=\frac{1}{4}$, $n=20$, по Пирсону: $\frac{P_{5,20}}{P_{15,20}}=\left(1+\frac{2}{3}\right)^{60}e^{-40}=87.10^{-5}$, между тем, как в дей-ствительности $\frac{P_{5,20}}{P_{15,20}}=17.10^{-5}$; кроме того, с увеличением n, ошибк[а] быстро возрастает.

RESUMÉ

Le résultat principal contenu dans cette Note consiste dans la démonstration de la proposition suivante: Soient x, y, z,.. des quantités indépendantes dont les èspérances mathématiques sont nulles; soient a_k, b_k, c_k etc. les espérances mathématiques respectives de x^k, y^k, z^k etc. Dans ces conditions la probabilité de l'inégalité

$$\left|(x+y+z+\ldots)-\frac{t^2}{3}\frac{A_3}{A_2}\right|<t\sqrt{2A_2}\left[1+\frac{A_4t^2}{6A_2^2}\right], \quad (1)$$

où $A_2=a_2+b_2+c_2+\ldots$; $A_3=a_3+b_3+c_3+\ldots$; $A_4=a_4+b_4+c_4+\ldots$ est supérieure à $1-2e^{-t^2}$, pour toute valeur positive de $t\leq\frac{1}{4L}\sqrt{2A_2}$, le nombre L étaut une borne supérieure des quantités

$$\sqrt[K-4]{\frac{4!}{K!}\left|\frac{a_k}{a_4}\right|},\quad \sqrt[K-4]{\frac{4!}{K!}\left|\frac{b_k}{b_4}\right|},\ldots.$$

Ensuite, je demontre que pour n assez grand la probabilité $P_{m,n}$ que l'évenement ayant la probabilité p se produit m fois dans n expériences se rapproche le plus de $\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}}$, e^{-z^2}, lorsque m est l'entier le plus approché de $np+z\sqrt{2npq+\frac{z^2(q-p)}{3}}$. (2)

J'en déduis que la probabilité que

$$m_0\leq m<m_1$$

est égale â $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_0}^{z_1} e^{-z^2} dz$,

où $m_0 + \alpha = np + z_0 \sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3} z_0^2$ (3)

$m_1 + \alpha = np + z_1 \sqrt{2npq} + \frac{q-p}{3} z_1^2$

$$\text{avec} -1 < \alpha < \frac{1}{2}, \text{ si } npq \geq 365, \; z_0 \geq \frac{2}{\sqrt{2npq}}, \; z_1 \leq \sqrt[6]{2npq}$$

En tenant compte de l'inégalité (3), on montre que l'inégalité $\left| m - np - \frac{t_0^2}{3}(q-p) \right| < t_0 \sqrt{2npq}$, considéreé à une unité pres, a la probabilité $\Phi(t_0)$, à $2e^{-\sqrt[3]{2npq}}$ prés, $\left(\text{si } t_0 \leq \sqrt[6]{2npq}, \; npq \geq 365 \right)$.

La Note se termine par la remarque que la formule approhée de Pearson

$$P_{m,n} = \left[1 - \frac{p-q}{2pqn}(np-m) \right]^{\frac{4pq}{(p-q)^2}} e^{-\frac{2}{p-q}(np-m)} \lambda_n$$

ne donne de valeurs approcheès de $P_{m,n}$ que tant que $\frac{(np-m)}{2pqn}^{4/3}$ tend vers 0 et dans ce cas elle fournit la même approximation que la formule (2).

Об одном типе свойств точечных ансамблей.

Гр. Грузинцев.

---

1. В теории ансамблей, как и в других областях анализа, мы встречаем целый ряд теорем, которые доказываются совершенно одинаково. Происходит это оттого, что—каково бы ни было содержание доказываемых теорем—при доказательстве их мы пользуемся только теми свойствами ансамблей, которые во всех случаях, которые обращают наше внимание своим сходством,—одни и те же с формальной точки зрения.

Оставляя в стороне те следствия, которые можно извлечь из этого факта для систематизации теории ансамблей в целом, я хочу обратить внимание на некоторые свойства, которые имеют одну и ту же формальную структуру, и изучить их, абстрагируясь от их происхождения.

Помимо некоторых сближений и обобщений, которые мы получим при предлагаемом мной методе исследования, он даст нам некоторого рода экономию в доказательствах; одного это, мне кажется, уже достаточно, чтобы показать пользу выбранного нами пути.

Я ограничиваюсь только одним типом свойств, который мне кажется наиболее простым и наиболее важным.

Я буду называть эти свойства — свойствами типа α или просто α-свойствами.

2. Свойства, которые я называю α-свойствами, удовлетворяют двум условиям.

I. Если ансамбла F обладает некоторым определенным свойством, которое принадлежит к типу α, то ансамбль

$$F + G$$

тоже обладает этим же свойством, каков бы ни был ансамбль G.

II. Если ансамбли F_1 и F_2 взятые отдельно не имеют некоторого определенного свойства типа α, то и ансамбль

$$F_1 + F_2$$

не будет иметь этого свойства.

3. Напр., „быть бесконечным“—α-свойство.

В самом деле. если ансамбль F состоит из бесчисленного множества точек, то то же будет и с ансамблем $F+G$, каков бы ни был ансамбль G; с другой стороны, мы знаем, что сумма двух конечных ансамблей будет также конечным ансамблем.

Подобным-же образом мы убедимся, что свойства: „иметь хоть одну точку“, „быть неприводимым“, „быть неисчислимым“, „не быть меры нуль (в каком угодно смысле)“ [1]) все это α-свойства.

Наоборот, „быть исчислимым“ — это не α-свойство: хотя сумма двух неисчислимых ансамблей есть также ансамбль неисчислимый, (и, таким образом, второе условие удовлетворено), первое условие не удовлетворено, так как сумма исчислимого ансамбля (F) и ансамбля (G) мощности континуума, имеет мощность континуума.

4. Из второго условия мы без труда находим, что если

$$F=\sum_{1}^{n} F_k$$

и если ансамбль F имеет некоторое α-свойство, то, по крайней мере один из ансамблей F_k будет иметь это же свойство. Но, если ансамбли F_k будут взяты в бесконечном числе, то, вообще говоря, этого утверждать нельзя. Впоследствии мы вернемся к этому, а сейчас ограничимся этим указанием.

5. Я буду говорить, что точка z имеет по отношению к ансамблю F свойство A, если вблизи z ансамбль F имеет свойство α [2]).

Если z не имеет свойства A по отношению к F, то, очевидно, что, поместив z внутри круга достаточно малого радиуса, мы получим внутри его некоторую часть ансамбля F, не имеющую свойства α.

Совокупность всех точек, которые имеют свойство (α, F), я назову α—производной ансамбля F и буду обозначать

$$AF.$$

Ясно, что следует понимать под α-производной любого конечного или трансфинитного порядка; ее мы будем обозначать

$$A^{\nu}F$$

где ν—некоторое число I или II класса.

6. Обыкновенная производная F'—которую мы иногда будем называть канторовской производной — есть, очевидно, частный случай α-производной: ее мы получим, исходя из свойства „быть бесконечным“.

---

[1]) Т. е. или быть неизмеримым (non mesurable), или иметь меру, отличную от нуля.

[2]) Иногда, для ясности. мы будем писать вместо A так: (α, F).

Исходя из свойства „иметь хоть одну точку“, мы получим из ансамбля F ансамбль $\overline{F}$, который R. Baire называет производной нулевого порядка; $\overline{F}$ мы иногда будем называть бэровской производной.

Исходя из свойства „быть неисчислимым“, мы получим из ансамбля F ансамбль F_1, который E. Lindelöf называет сгущенной производной; F_1 мы будем иногда называть линделёфовской производной.

Наконец, исходя из свойств „быть приводимым“ и „не быть меры нуль“, мы получим приводимую производную и метрическую производную.

7. Для того, чтобы построить теорию α-свойств в той ее части, которая относится к α-производным, у нас есть простой и естественный путь: следовать аналогии с теорией точек сгущения и канторовских производных.

Поэтому мы введем несколько понятий, аналогичных обыкновенным понятиям теории Cantor'a.

Именно, мы назовем α-изолированным ансамбль F, если ни одна его точка не имеет свойства (α, F); если α-производная составляет часть самого ансамбля F, то F мы назовем α-замкнутым; если же, наоборот, F составляет часть своей α-производной, то мы назовем F — α-густым в себе.

Эти три рода ансамблей мы можем определить так:

F — α-изолировано, если $F.AF = 0$
F — α-замкнуто, „ $F.AF = AF$
F — α-густо в себе, „ $F.AF = F$.

Ограниченный и α-изолированный ансамбль F, у которого

$$AF = 0$$

мы будем называть α-конечным.

Ансамбль F одновременно α-замкнутый и α-густой в себе мы будем называть α-совершенным; для него, очевидно

$$AF = F.$$

Мы будем называть F α-приводимым, если

$$A^{\nu} F = 0$$

где ν—некоторое число I или II класса.

Наконец, если ансамбль G составляет часть ансамбля AF, то мы будем говорить, что F густ повсюду в G.

Кроме этого, мы введем понятие об α-ограниченном ансамбле: α-ограниченным ансамблем мы будем называть ансамбль F, если можно выбрать такую ограниченную область, что часть F, находящаяся вне ее, лишена α-свойства.

Интересно отметить, что ансамбли, которые обычно мы называем ограниченными, получаются, если исходить из канторовского (а также из бэровского) α-свойства.

8. Без особенного труда, повторяя слово в слово рассуждения из теории обычных производных (которые мы условились называть канторовскими), мы легко установим приводимые ниже свойства α-производных.

Прежде всего, мы отметим, что операция А, при помощи которой мы переходим от ансамбля F к ансамблю AF, есть операция аддитивная, т. е.

$$A\sum_1^n F_k = \sum_1^n AF_k$$

при этом в общем случае, при $n = \infty$ мы можем утверждать только, что

$$\sum_1^\infty AF_k < A\sum_1^\infty F_k \text{ [1]}$$

Так, напр., как известно, в случае, канторовского α-свойства, равенства при $n = \infty$ не будет; однако, существуют такие α-свойства, для которых

$$\sum_1^\infty AF_k = A\sum_1^\infty F_k$$

к таким принадлежит, напр., линделёфовское α-свойство.

9. Из числа свойств α-производных мы отметим следующие:

I. AF — замкнутый ансамбль; даже более того: AF — α-замкнутый ансамбль.

II. AF — составляет всегда часть бэровской производной

$$AF < \overline{F}$$

III. Если рассматриваемое α-свойство таково, что существует хоть один ансамбль, не имеющий этого свойства, то α-производная пустого ансамбля есть пустой ансамбль:

$$A0 = 0$$

Иначе говоря, если пустой ансамбль имеет рассматриваемое α-свойство, то это свойство имеет всякий ансамбль.

IV. Если $AF \neq 0$, то F имеет соответствующее α-свойство.

V. (Обобщение принципа Bolzano-Weierstrass'а). Если F не пустой, α-ограниченный и имеющий α-свойство ансамбль, то

$$AF \neq 0$$

---

[1] Знак $<$ А употребляю в смысле „быть частью“: $G < H$ обозначает, что ансамбль G есть часть ансамбля H в частном случае, конечно, G может и совпадать с H.

Последние две теоремы показывают, что для α-ограниченны ансамблей[1]) существование точки, имеющей свойство (α,F) эквивалентн существованию у ансамбля F соответствующего α-свойства.

10. Интересно отметить, что свойство конечных и изолированны ансамблей целиком можно распространить на α-конечные и α-изолиро ванные ансамбли.

I. Всякая часть α-конечного ансамбля есть также α-конечны ансамбль.

II. Сумма конечного числа α-конечных ансамблей есть такж α-конечный ансамбль.

III. Всякая часть α-изолированного ансамбля есть также α-изо лированный ансамбль.

IV. Сумма конечного числа α-изолированных ансамблей ест также α-изолированный ансамбль.

и V. Всякий α-изолированный, но не α-конечный ансамбль ест сумма счетного множества α-конечных ансамблей.

11. Среди α-свойств ансамблей существует один класс свойст которые мы назовем β-свойствами. Эти β-свойства обладают инт ресными особенностями, на которых мы и остановим внимание ч тателя.

Данное нам α-свойство мы назовем β-свойством, если, как бы ни был ансамбль F, BF всегда или нуль, или β-с вершенный ансамбль, т. е.

$$B^2F = BF$$

Так, напр., бэровское, а также и линделёфовское свойства—β-сво ства; что же касается до канторовского, то оно, очевидно, не ес β-свойство.

12. Если нам дано некоторое α-свойство, то иногда (всегда всех случаях, которые мне встречались или которые я мог констр ировать) мы можем определить другое свойство, также принадлежащ к α-свойствам, следующим образом:

Ансамбль F имеет это свойство, если существует такая точка которая 1) имеет свойство A = (α, F) и 2) не теряет свойства A, ес мы удалим из F счетное множество α-изолированных ансамблей.

Такое свойство мы будем обозначать α'-свойство.

Классический пример α'-свойства—это линделефовское свойст если мы примем, как исходное α-свойство—канторовское.

Из определения свойства α' следует: если F имеет α-сво ство, но не имеет связанного с ним α'-свойства, то есть сумма самое большее счетного множества α-из лированных ансамблей.

[1]) И, следовательно, и для просто ограниченных, так как просто ограничен ансамбль есть при всяком α α-ограниченный.

13. Докажем, что всякое α'-свойство есть α-свойство.

Убедимся сначала, что соблюдено I условие n°2, т. е., что, если ансамбль F имеет определенное α'-свойство, то это-же свойство будет иметь и ансамбль

$$F + G$$

каков бы ни был ансамбль G.

Допустим, что F имеет данное α'-свойство.

Тогда, во-первых, существует некоторая точка z_0, имеющая свойство

$$(\alpha, F),$$

а следовательно и свойство

$$(\alpha, F + G)$$

при всяком G; во-вторых, если бы свойство

$$(\alpha, F + G)$$

терялось бы точкой z_0 после удаления из ансамбля $F + G$ счетного множества α-изолированных ансамблей

$$\sum_1^\infty H_n,$$

то эту точку можно было бы лишить свойства (α, F), выбросив из ансамбля F ансамбль

$$\sum_1^\infty F.H_n,$$

который (на основании теоремы III n°10) состоит из счетного множества α-изолированных ансамблей.

Значит, всякая точка, имеющая свойство (α', F), будет иметь и свойство

$$(\alpha', F + G)$$

при всяком G и, таким образом, α'-свойство удовлетворяет I условию n°2.

Обратимся теперь ко II-му условию n°2, т. е. покажем, что, если ни F_1, ни F_2 не будут иметь свойства α', то этого свойства не будет иметь и их сумма $F = F_1 + F_2$.

В самом деле, что значит, что F не имеет свойства α'? Это значит, что какую бы точку z мы ни взяли, она, или не имеет свойства

$$(\alpha, F)$$

или, если она его имеет, то может потерять после удаления из F счетного множества α-изолированных ансамблей.

Если мы допустим, что ни F_1, ни F_2 не имеют свойства α', то всякая взятая наудачу точка z может принадлежать к одной из трех категорий:

1) она не имеет ни свойства (α, F_1), ни свойства (α, F_2); но тогда она не будет иметь и свойства (α, F) и значит á fortiori и свойства (α', F).

2) точка z не имеет свойства α по отношению к одному из этих ансамблей, напр., по отношению к F_1; по отношению же к другому, т. е. к F_2, хоть и имеет, но теряет его после удаления из него счетного множества α-изолированных ансамблей

$$\Sigma H_n$$

В этом случае точка z, конечно, имеет свойство (α, F), но потеряет его после удаления того же счетного множества ΣH_n, и, таким образом, не может иметь свойства (α', F)

3) Наконец, точка z имеет и свойство

$$(\alpha, F_1)$$

и свойство
$$(\alpha, F_2),$$

но теряет их — первое, после удаления

$$\Sigma H_{1n}$$

а второе — после удаления

$$\Sigma H_{2n}$$

где H_{1n} и H_{2n} — α — изолированные ансамбли.

Тогда, как и в предыдущем случае, точка z имеет свойство (α, F), но теряет его после удаления счетного множества α — изолированных ансамблей, а именно:

$$\Sigma H_{1n} + \Sigma H_{2n}$$

Таким образом, мы видим, что и II-е условие n°2 соблюдено и, следовательно, всякое α' — свойство принадлежит к типу, которым мы интересуемся.

Поэтому мы можем распространить на α' — свойства все, что было сказано об α — свойствах и в частности теоремы об α' — производных.

Если мы обозначим
$$A'F$$

α' — производную ансамбля F, то, как легко убедиться,

$$A'F < AF$$

и, кроме того,

$$A'\sum_1^\infty F_n = \sum_1^\infty A'F_n .$$

В общем случае, т. е. для какого угодно α — свойства, последнее равенство, как мы заметили в n°8, не имеет места.

Полезно также заметить два следствия из определения α' — свойства:

I. Если точка z не принадлежит к A'F, то всегда можно выбрать круг с радиусом

$$r = r(z) > 0$$

и с центром в точке z, чтобы часть ансамбля F, находящаяся внутри этого круга, представляла из себя не более, чем счетное множество α — изолированных ансамблей [1]).

II. Если F представляет из себя, самое большее, сумму счетного множества α — изолированных ансамблей, то

$$A'F = 0.$$

14. Мы установили, что всякое α' — свойство есть α — свойство; докажем теперь, что всякое α' — свойство есть β — свойство.

Доказательство основывается на трех леммах, не лишенных интереса и самих по себе [2]):

Лемма 1. Если

$$A'F = 0$$

то F есть, самое большее, сумма счетного множества α — изолированных ансамблей.

Лемма 2. Всякий α' — изолированный ансамбль есть, самое большее, сумма счетного множества α — изолированных ансамблей.

Лемма 3. Если F есть α' — изолированный ансамбль, то

$$A'F = 0.$$

15. Пусть нам дан замкнутый ансамбль F. Как мы знаем,

$$A'F < \overline{F}$$

Но F замкнутый; значит

$$\overline{F} = F.$$

Положим, для краткости,

$$A'F = E$$

и обозначим буквой G ансамбль всех точек F, не принадлежащих к E.

Тогда мы получим

$$F = E + G.$$

1) Как и в n°5 я рассматриваю случай ансамблей на плоскости; перейти к случаю линейных ансамблей или ансамблей в пространствах иного числа измерений не представляет труда.

2) Вывод лемм опущен за недостатком места.

Причем, очевидно, G есть α' — изолированный ансамбль; что же касается ансамбля E, то в частном случае он может равняться и нулю.

Возьмем от обеих частей последнего равенства α' — производную; тогда мы получим:

$$A'F = A'E + A'G$$

Но

$$A'F = E,$$

а по лемме 3-ей

$$A'G = 0.$$

Итак,

$$E = A'E,$$

т. е. **если F есть замкнутый ансамбль, то A'F есть α' — совершенный.**

Иначе говоря, в области замкнутых ансамблей α' — свойство есть β — свойство.

16. Пусть F будет некоторый замкнутый ансамбль; обозначим, как и раньше,

$$E = A'F.$$

По только-что доказанной теореме

$$A'E = E.$$

Но, как мы видели раньше, (n⁰ 13)

$$A'E < AE.$$

Следовательно,

$$E < AE.$$

С другой стороны (теор. II n⁰9),

$$AE < E,$$

откуда

$$AE = E$$

и мы видим, что E **не только α'-совершенный, но и α-совершенный ансамбль.**

17. Теперь мы в двух словах можем доказать обобщение теоремы Cantor-Bendixson'a: **Всякий замкнутый ансамбль есть сумма α-совершенного ансамбля и счетного множества α-изолированных.**

Если F замкнутый, то, как мы видели,

$$F = E + G$$

где

$$E = A'F$$

и по предыдущему n⁰ α-совершенный ансамбль, а G есть α'-изолированный.

Но по лемме 2-й

$$G = \sum_1^\infty G_n$$

где все G_n α-изолированы.

Итак,
$$F = E + \sum_1^\infty G_n$$

и теорема доказана.

18. Пользуясь тем обстоятельством, что по теореме V n^0 10 мы всякий α-изолированный, но не α-конечный ансамбль можем представить в виде суммы счетного множества α-конечных ансамблей, мы можем дать обобщенной теореме Cantor-Bendixson'а такую формулировку:

Всякий замкнутый ансамбль может быть представлен в виде суммы α-совершенного ансамбля и еще, самое большее, счетного множества ансамблей, не имеющих свойства α.

19. Обобщенную теорему Cantor-Bendixson'а можно доказать и иначе, при помощи трансфинитных чисел, повторяя слово в слово канторовское доказательство из теории канторовских производных.

Тогда получим, пользуясь обозначениями Cantor'а:

$$F = A^\Omega F + \sum_1^\infty H_n$$

где H_n — α-изолированные ансамбли, а $A^\Omega F$ — α-совершенный.

20. Назовем
$$E = A'F$$

линделёфовским ядром замкнутого ансамбля F, а

$$C = A^\Omega F$$

канторовским ядром, и поставим вопрос об однозначности разложения, которое дает теорема Cantor-Bendixson'а.

Итак, можно-ли утверждать в общем случае, что

$$C = E$$

а если нет, то существуют-ли между C и E какие-нибудь соотношения?

Допустим, что нам дано à priori некоторое разложение замкнутого ансамбля F на сумму

$$F = P + K$$

где P (которое мы будем называть ядром ансамбля F) есть α-совершенный ансамбль, а K — сумма счетного множества α-изолированных.

Мы увидим, что между E, P и C существует очень простое соотношение:

$$E < P < C$$

т. е. линделёфовское ядро наименьшее, а канторовское наибольшее из всех возможных ядер.

Как исходный пункт мы имеем

$$F = E + G$$

$$F = C + H$$

$$F = P + K,$$

где

$$E = A'F$$

и, значит,

$$A'E = AE = E;$$

затем

$$C = A^{\Omega}F$$

и, значит,

$$AC = C$$

Относительно P мы знаем только, что

$$AP = P$$

Кроме того,

$$A^{\Omega}H = 0$$

$$A'G = A'H = A'K = 0$$

и ансамбли E, F, C, P — замкнутые.

Так как

$$E + G = P + K$$

то, беря A' от обеих частей этого равенства, мы находим

$$E = A'P.$$

Следовательно, так как в силу замкнутости P

$$A'P < P$$

мы получаем

$$E < P.$$

С другой стороны,

$$P + K = C + H$$

Откуда, если взять от обеих частей равенство A^{Ω},

$$P + A^{\Omega}K = C$$

т. е.

$$P < C$$

Теорема доказана.

21. Необходимое и достаточное условие однозначности Cantor-Bendixson-вского разложения замкнутых ансамблей чрезвычайно просто: это разложение будет однозначно, т. е.

$$C = E$$

если не существует α-совершенных ансамблей, которые можно представить в виде суммы счетного множества α-конечных ансамблей.

Из экономии места мы опустим доказательство этой теоремы.

22. В некоторых приложениях теории точечных ансамблей (напр., в теории однозначных аналитических функций, имеющих неисчислимое множество особенных точек) большую роль играют разложения, аналогичные тому, которое дает теорема Cantor-Bendixson'a.

Допустим, что нам удалось построить ряд β-свойств:

$$\beta_1, \beta_2 \ldots . \beta_n$$

удовлетворяющих условиям

$$B_{k+1} F < B_k F$$

но, вообще говоря,

$$B_{k+1} F \neq B_k F$$

т. е. если F имеет свойство β_k, то оно имеет и свойство β_{k+1}.

Отсюда, если z есть $\beta_{\overline{k}}$ изолированная точка [1]), то она à fortiori будет $\beta_{\overline{k+1}}$ изолированной точкой.

Введем ансамбли I_k следующим образом:

$$B_k F + I_k = B_{k+1} F$$

причем

$$I_k B_k F = 0 .$$

Тогда в I_k не будет $\beta_{\overline{k-1}}$-изолированных точек, но точки β_k-изолированные будут распределены повсюду густо.

В этом случае, как нетрудно показать, всякий замкнутый ансамбль F можно представить в таком виде

$$F = B_n F + \sum_1^n I_k$$

23. Частный случай предыдущего разложения мы получим, если положим

$$C = E + L$$

т. е. представим замкнутый ансамбль F в такой форме:

$$F = E + L + H$$

Все три ансамбля E, L и H не имеют общих точек; в E нет ни α'-изолированных, ни тем более, α-изолированных точек, в L нет α-изолированных точек, но α'-изолированные распределены густо и, наконец, в H α-изолированные распределены повсюду густо.

---

[1]) Точку z ансамбля F я называю α-изолированной, если z не принадлежит к AF. Очевидно, что α—совершенный ансамбль не имеет α-изолированных точек, а α-изолированный состоит только из них

24. Нет сомнения, что α-свойства далеко не единственные свойства ансамблей, которые можно изучать, выделив их из остальных свойств по формальным признакам. Этим же путем можно итти и при исследовании многих вопросов геометрии, анализа и теории чисел. В начале такого исследования трудно, конечно, предвидеть к каким результатам оно приведет, если будет проведено достаточно далеко. Один результат, однако, мне представляется несомненным и на него я уже указывал в начале этой заметки—экономия в доказательствах.

Что касается α-свойств, то исследование их, которое здесь едва намечено, приводит еще к интересным выводам; некоторые из них изложены в другой моей заметке „О различных мерах точечных ансамблей", к которой я и отсылаю интересующихся.

Геодезические линии на поверхностях вращения с максимальной параллелью.

Т. И. Котов

Геодезические линии на поверхностях вращения были предметом изучения в первоначальной стадии развития теории поверхностей, главным образом в связи с их приложениями в высшей геодезии.

Johann Bernoulli [1]) в 1697 году показал, что геодезические линии поверхностей вращения находятся при помощи квадратур. Clairaut [2]) в 1733 году дал теорему, характеризующую геодезические линии поверхностей вращения: произведение радиуса параллели на синус угла с меридианом есть величина постоянная вдоль геодезической линии поверхности вращения

$$n.\sin\omega = a.$$

Legendre [3]) установил связь между элементами геодезического треугольника и плоского треугольника с соответственно равными сторонами. Du Séjour [4]), Bessel [5]), Michaelis [6]) занимались геодезическими линиями специально на поверхностях вращения.

После Гаусса теория геодезических линий превратилась в один из главнейших отделов дифференциальной геометрии; поэтому явилась потребность в изучении геодезических линий для чисто теоретических целей.

Darboux [7]) изучает случай, когда геодезические линии на поверхности вращения замкнуты. Рассматривая конвексные поверхности вращения с максимальной параллелью, легко убедиться на основании теоремы Clairaut, что каждая геодезическая линия пересекающая

---

[1]) Joh. Bernoulli. Opera T. I, стр. 204.

[2]) Mémoires de l'Académie des Sciences, 1733 г. стр. 406.

[3]) Mémoires de l'Académie des Sciences année 1787. Paris 1789. S. 352.

[4]) Ibidem anneè 1778. Paris 178, стр. 73.

[5]) Astr. Nachr Bd. IV 1825, S. 241.

[6]) De lineis brevissimis in datis superficiebus, inprimis de linea geoditica. Diss. 1837.

[7]) Notes к механике Despeyroux и Lecons T. III, стр. 4.

замкнутую геодезическую линию—максимальную параллель, остается в зоне, окружающей последнюю, причем радиусы предельных параллелей, которых геодезическая линия касается, равны постоянной уравнения Clairaut. Если обозначим u длину дуги меридиана, отсчитываемую от максимальной параллели, v угол между меридианами, r радиус параллели, то конечное уравнение геодезических линий на поверхности вращения с двумя произвольными постоянными

$$v = a \int \frac{du}{r\sqrt{r^2 - a^2}} + a'$$

Если мы обозначим длину меридиана в функции радиуса параллели в верхней части поверхности

$$du = \varphi(r)\, dr, \tag{1}$$

в нижней

$$du = -\psi(r)\, dr, \tag{2}$$

то угол Φ между меридианами, соответствующими двум ближайшим точкам геодезической линии на верхней и нижней предельной параллели, определяется по формуле

$$\Phi = \int_a^R \frac{a\left[\varphi(r) + \psi(r)\right]}{r\sqrt{r^2 - a^2}}\, dr, \tag{3}$$

где R — радиус максимальной параллели.

Если угол Φ соизмерим с π, то геодезическая линия замыкается после нескольких оборотов, если Φ несоизмерим с π, то геодезическая линия незамкнута, она заполняет зону (domaine по выражению Poincaré) везде густо. Если Φ независит от a, то геодезические линии в некоторой области, окружающей максимальную параллель, или все замкнуты, или все незамкнуты. Если же Φ зависит от a, то часть геодезических линий замкнута, часть незамкнута в зависимости от того, будет ли Φ при некотором значении a принимать значения соизмеримые или несоизмеримые с π. Ансамбль замкнутых геодезических линий в этом последнем случае имеет мощность рациональных чисел, т. е. исчислим; ансамбль незамкнутых геодезических линий имеет мощность континуума.

Darboux ставит задачу, при каких условиях угол Φ не зависит от a и, следовательно, геодезические линии вблизи максимальной параллели или все замкнуты или все незамкнуты. В этом случае необходимо и достаточно, чтобы меридиан удовлетворял условию

$$\varphi(r) + \psi(r) = \frac{2mR}{\sqrt{R^2 - r^2}} \tag{4}$$

где m — постоянное число, связанное с Φ соответствием

$$\frac{\Phi}{\pi} = \mathrm{m}.$$

Как известно, опираясь на это условие (4) Darboux, Zoll [1]) построил правильную поверхность вращения с исключительно замкнутыми геодезическими линиями. Для его поверхности

$$\varphi(\mathrm{r}) = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{r}^2}} + \frac{1}{2}\mathrm{r}^2 \qquad \psi(\mathrm{r}) = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{r}^2}} - \frac{1}{2}\mathrm{r}^2$$

максимальная параллель имеет $\mathrm{r} = 1$.

Геодезические линии на правильных поверхностях вращения с исключительно замкнутыми геодезическими линиями, как легко видеть из формулы (4), должны обвиваться вокруг поверхности только один раз.

В самом деле, так как в концах меридиан должен быть перпендикулярен оси, то для $\mathrm{r} = 0$ из формулы (1) и (2) получаем

$$\varphi(0) = 1, \qquad \psi(0) = 1.$$

Условие Darboux для $\mathrm{r} = 0$ дает

$$\mathrm{m} = 1$$

т. е. геодезические линии правильных поверхностей вращения с исключительно замкнутыми геодезическими линиями обвиваются вокруг поверхности один раз.

Все геодезические линии таких поверхностей равны. Легко доказать, что их длина равна длине окружности максимальной параллели.

Элемент дуги на поверхности вращения

$$\mathrm{ds}^2 = \mathrm{du}^2 + \mathrm{r}^2\mathrm{dv}^2$$

для геодезической линии, вдоль которой

$$\mathrm{dv} = \frac{\mathrm{a\,du}}{\mathrm{r}\sqrt{\mathrm{r}^2 - \mathrm{a}^2}},$$

напишется

$$\mathrm{ds} = \frac{\mathrm{r\,du}}{\sqrt{\mathrm{r}^2 - \mathrm{a}^2}}.$$

---

[1]) Zoll. Über Flächen mit Scharen von geschlossenen geod. Linien.—Diss. Göttingen 1901 г. Math. Annal 1903 г. т. 57 стр. 108–133.

Обозначим s_1 длину дуги геодезической линии в верхней части поверхности, s_2—в нижней. Пользуясь (1) и (2) легко найти

$$s_1 = 2\int_a^R \frac{r\ \varphi(r)\ du}{\sqrt{r^2-a^2}}$$

$$s_2 = 2\int_a^R \frac{r\ \psi(r)\ du}{\sqrt{r^2-a^2}}.$$

Поэтому длина всей геодезической линии s выразится

$$s = s_1 + s_2 = 2\int_a^R \frac{r[\varphi(r)+\psi(r)]\,du}{\sqrt{r^2-a^2}}.$$

Подставляя из (4) выражение для $\varphi(r)+\psi(r)$, получим

$$s = 4R\int_a^R \frac{r\ dr}{\sqrt{(R^2-r^2)(r^2-a^2)}} = 2R\int_{a^2}^{R^2} \frac{dt}{\sqrt{-t^2+t(R^2+a^2)-a^2R^2}} =$$

$$= 2R\arcsin\left.\frac{t-\frac{R^2+a^2}{2}}{\sqrt{\left(\frac{R^2+a^2}{2}\right)^2-a^2R^2}}\right|_{a^2}^{R^2} = 2R\arcsin\left.\frac{2t-R^2-a^2}{R^2-a^2}\right|_{a^2}^{R^2} = 2\pi R.$$

Можно дать примеры правильных поверхностей вращения с исключительно замкнутыми геодезическими линиями, которые имеют части с отрицательной кривизной. В этом случае поверхность имеет грушевидную форму. Простейший случай представляет поверхность вращения с меридианом, для которого

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{3}{2}r^4 \qquad \psi(r) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{3}{2}r^4. \tag{5}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать поверхности вращения только положительной кривизны с одной максимальной параллелью. Если поверхность имеет края, то существуют геодезические линии, упирающиеся в края. Эти геодезические линии, а также максимальную параллель, мы исключили из круга наших исследований. Условимся относить к первому классу поверхности вращения со всеми замкнутыми или со всеми незамкнутыми геодезическими линиями, ко второму классу поверхности с частью замкнутых и частью незамкнутых геодезических линий. Докажем, что поверхности вращения, наложимые друг на друга, принадлежат к одному классу.

Опираясь на условие (4) Darboux, можно показать, что, *если на некоторой поверхности вращения все геодезические линии, не упирающиеся в края, замкнуты, то все поверхности вращения, наложимые на данную, имеют геодезические линии или исключительно замкнутые или исключительно незамкнутые.*

В самом деле, линейный элемент всех ∞^1 поверхностей вращения, наложим друг на друга, можно написать в виде

$$ds^2 = du^2 + k^2 U^2 d\left(\frac{v}{k}\right)^2 \tag{6}$$

или

$$ds^2 = du_1^2 + r^2 dv_1^2,$$

где

$$r = kU, \ v_1 = \frac{v}{k}, \ u_1 = u.$$

u дуга меридиана, r радиус параллели.

Отсюда

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{kU'}$$

Если условие (4) Darboux имеет место для некоторого значения $k = k_0$, то оно имеет место для всех значений k, так как, если

$$\frac{1}{k_0}\left[\frac{1}{U'} + \frac{1}{U'_1}\right] = \frac{2m}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{r_{max}}\right)^2}},$$

то можно написать такое же уравнение для любого k, отнеся постоянный множитель к m,

$$\frac{1}{k}\left[\frac{1}{U'} + \frac{1}{U'_1}\right] = \frac{2m_1}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{r_{max}}\right)^2}} \qquad m_1 = \frac{mk_0}{k}$$

Если k_0 рационально и m также рационально, то рациональные значения k дают поверхности с исключительно замкнутыми геодезическими линиями, иррациональные значения k дают поверхности с исключительно незамкнутыми геодезическими линиями. Если k_0 иррационально, а m рационально, то поверхности параметра rk_0, где r рациональное число, дают поверхности с исключительно замкнутыми геодезическими линиями, поверхности параметра $ir.k_0$, где ir иррациональное число, представляют поверхности с исключительно незамкнутыми геодезическими линиями.

Таким образом, в случае поверхностей вращения первого класса, наложимых друг на друга, ансамбль поверхностей с замкнутыми геодезическими линиями исчислим, с незамкнутыми геодез. линиями имеет мощность континуума.

Рассмотрим теперь другой случай, когда угол

$$\Phi = \int_{a}^{r_{max}} \frac{a\,[\varphi(r) + \psi(r)]}{r\sqrt{r^2 - a^2}}\, dr \tag{7}$$

зависит от параметра a геодезических линий.

Если подставить сюда по предыдущему

$$\varphi(r) + \psi(r) = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{U'} + \frac{1}{U'_1}\right)$$

$$r = kU, \quad dr = kU'du, \quad a = kU_0, \quad U(u_0) = U_0,$$

где u_0 представляет максимальное расстояние геодезической линии от наибольшей параллели, считая по меридиану, то Φ примет вид

$$\text{(r)} \qquad \Phi = \int_{u_0}^{0} \frac{kU_0}{k^2U}\left(\frac{1}{U'} + \frac{1}{U'_1}\right)\frac{kU'du}{k\sqrt{U^2 - U_0^2}} = \frac{1}{k}\int_{u_0}^{0} \urcorner\!\sqcup\!\ulcorner\, du$$

Если для некоторого значения k, напр. $k = 1$,

$$\Phi = \int_{u_0}^{0} \urcorner\!\sqcup\!\ulcorner\, du = \Psi(u_0)\,\pi$$

является функцией от u_0, то для всех значений k

$$\Phi = \frac{\Psi(u_0)\,\pi}{k}$$

представляет также функцию u_0. Для поверхностей второго класса приходим к результату:

Если угол поворота геодезической линии Φ зависит от параметра геодезических линий a, то на поверхностях вращения с рациональным параметром k, наложенных на данную поверхность с рациональным параметром, геодезические линии сохраняют характер замкнутости или незамкнутости. Если же k иррационально, то замкнутые геодезические линии становятся незамкнутыми, часть незамкнутых геодезических линий становятся замкнутыми; ансамбль последней категории геодезических линий исчислим (ансамбль рациональных чисел).

Таким образом, не может быть случая, чтобы поверхности вращения с исключительно замкнутыми геодезическими линиями, накладывались на поверхности вращения с частью замкнутых и частью незамкнутых геодезических линий.

Применим доказанные нами теоремы к некоторым классам поверхностей вращения.

Рассмотрим поверхности вращения постоянной положительной кривизны

$$\left.\begin{aligned} x &= a \sin u . \cos \frac{v}{a} \\ y &= a \sin u . \sin \frac{v}{a} \\ z &= \int \sqrt{1 - a^2 \cos^2 u}\, du \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Так как на шаре все геодезические линии замкнуты, то на поверхностях вращения постоянной положительной кривизны с остриями ($a < 1$) или с двумя краями ($a > 1$) геодезические линии или все замкнуты для a рационального или все обвиваются вокруг поверхности бесчисленное множество раз при a иррациональном.

На поверхности вращения постоянной положительной кривизны с краями ($a > 1$), кратчайшее расстояние между некоторыми точками не является непрерывной геодезической линией или совокупностью отрезков геодезических линий, а состоит из края поверхностии и двух отрезков геодезических линий, проведенных через данные точки и касательных к краю. В самом деле, все геодезические линии, исходящие из данной точки, пересекаются в полюсе, отстоящем от данной точки по геодезической линии на расстоянии πR, где $\frac{1}{R^2}$ кривизна поверхности. Точки, лежащие вне области между геодезическими линиями, касательными к контуру, за точками касания не могут быть соединены с данной точкой кратчайшим расстоянием — непрерывной геодезической линией; так как проблема регулярна, то решение может состоять только из части контура и касательных к нему отрезов геодезических линий. (Точно также, абсолютное кратчайшее расстояние между точками, разделенными полюсом, состоит из части контура и касательных к нему отрезов геодезических линий).

2. Рассмотрим поверхности вращения с линейным элементом

$$ds^2 = 4(2 - p^2)(dp^2 + p^2 d\varphi^2). \qquad (9)$$

Геодезические линии этих поверхностей, определяемые дифференциальным уравнением Эйлера для вариацион. проблемы экстремума интеграла

$$\int 2 \sqrt{2 - p^2} \sqrt{p_1{}^2 + p^2}\, d\varphi$$

соответствуют в плоскости с линейным элементом

$$ds^2 = dp^2 + p^2 d\varphi^2 \qquad (10)$$

траэкториям точки, движущейся под влиянием центральной силы притяжения, направленной к началу координат и пропорцинальной расстоянию от центра

$$F = -2p.$$

Соответствующие геодезическим линиям поверхностей (9) изображения в плоскости (10) являются эллипсами с центром в начале координат. Геодезические линии замкнуты, если соответствие между плоскостью и поверхностью такое, что каждой точке плоскости соответствует конечное число точек поверхности.

Рассмотрим ∞' поверхностей вращения с линейным элементом (9). По формулам Minding'a линейный элемент этих поверхностей

$$ds^2 = du^2 + R^2\, d\varphi_1^2,$$

где

$$4(2-p^2)\,dp^2 = du^2 \qquad \varphi_1 = \frac{\varphi}{k} \quad p = p_1$$

$$4k^2(2-p^2)\,p^2 = R^2$$

(φ_1, p_1) координаты точек на поверхности параметра k, (φ, p) — на поверхности параметра $k = 1$.

Для меридиана имеем

$$z = 2\int \frac{\sqrt{p^4(1-4k^2) + 4p^2(2k^2-1) + 4(1-k^2)}}{\sqrt{2-p^2}}\, dp \qquad (11)$$

$$R = 2kp\sqrt{2-p^2}$$

Корни подрадикального выражения в числителе z

$$p = \pm\sqrt{\frac{1-k}{\frac{1}{2}-k}} \qquad p = \pm\sqrt{\frac{1+k}{\frac{1}{2}+k}}$$

Для $0 \leq k \leq 1$, p может меняться в пределах

$$0 \leq p \leq \sqrt{\frac{1+k}{\frac{1}{2}+k}}$$

При $k > 1$ для вещественности z необходимо и достаточно

$$\sqrt{\frac{k-1}{k-\frac{1}{2}}} \leq p \leq \sqrt{\frac{1+k}{\frac{1}{2}+k}} \qquad (12)$$

Итак, поверхности вращения с линейным элементом (9) при конформном изображении на плоскость соответствуют не всему кругу радиуса $\sqrt{2}$, а только части его. При $k \leqslant 1$ соответствующая часть в плоскости есть круг с центром в начале координат радиуса $\sqrt{\frac{1+k}{\frac{1}{2}+k}}$. При $k > 1$ образ поверхности в плоскости есть круговое кольцо между двумя концентрическими кругами радиусов $\sqrt{\frac{k-1}{k-\frac{1}{2}}}$ и $\sqrt{\frac{1+k}{\frac{1}{2}+k}}$. Совершенно не существует поверхности (9), соответствующей всему кругу, хотя линейный элемент вещественен для всех точек круга. Здесь мы наглядно видим, как нельзя изучать геодезические линии поверхности im Grossen только по свойствам линейного элемента. Для некоторых вещественных значений линейного элемента не существует соответствующих точек поверхности.

Возьмем для меридиана

$$\frac{dz}{dR}=\frac{\sqrt{\left[(\frac{1}{2}-k)p^2+k-1\right]\left[(\frac{1}{2}+k)p^2-(1+k)\right]}}{k(1-p^2)} \tag{13}$$

Последнее выражение показывает, что при $p=1$ мы имеем максимальный круг — геодезическую линию, служащую параллелью. Для поверхностей $k \leq 1$ в точке $p=0$, R также равно нулю: меридиан пересекает ось. Формула (13) показывает, что только при $k=1$ в точке $p=0$ имеем правильную точку, когда меридиан пересекает ось под прямым углом. При других значениях $k<1$ в точке $p=0$ имеем коническую точку, в которой меридиан образует с осью угол ($\arcsin k$).

При $k>1$ поверхность представляет зону, ограниченную двумя неравными параллелями. При $k \to \infty$, радиусы беспредельно увеличиваются, поверхность стремится превратиться в линию — максимальную параллель. Легко видеть, что поверхность параметра k не может целиком быть наложена на поверхность бóльшего параметра $k_1 > k$; поверхность параметра $k=1$ изображается целиком конформно на круг радиуса $\frac{2}{\sqrt{3}}$ плоскости, причем геодезические линии соответствуют эллипсам с центром в начале координат и обвиваются один раз вокруг поверхности, имея два maximum'а и два minimum'а удаления от полюса.

Геодезические линии поверхности $k={}^1/_2$ обвиваются также один раз, имея один maximum и один minimum; при изображении на плоскость (10) они соответствуют половине эллипса плоскости (10). Если мы сделаем подстановку

$$p=\sqrt{r} \quad \varphi=\frac{\overline{\varphi}}{2}, \tag{14}$$

то получим

$$ds^2 = \left(\frac{2}{r} - 1\right)(dr^2 + r^2 d\overline{\varphi}^2). \quad (15)$$

Геодезические линии соответствуют траэкториям точки плоскости

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\overline{\varphi}^2, \quad (16)$$

притягиваемой неподвижным центром по закону Ньютона с силой $F = -\frac{1}{r^2}$. Соответствие между плоскостями (10) и (16) такое же, как между плоскостями функции комплексной переменной — квадрата независимого переменного $(r, \overline{\varphi})$ и независимым переменным (p, φ),

Уравнение поверхностей вращения с линейным элементом (15)

$$x = k\sqrt{r(2-r)}\cos\frac{v}{k}$$

$$y = k\sqrt{r(2-r)}\sin\frac{v}{k}$$

$$z = \int\sqrt{\frac{(2-r)^2 - k^2(1-r)^2}{r(2-r)}}\,dr;$$

при k рациональном, каждой точке плоскости соответствует конечное число точек поверхности.

На этих поверхностях геодезические линии, не упирающиеся в края, или все замкнуты (для k рационального) или все обвиваются вокруг поверхности бесчисленное множество раз (при k иррациональном).

3. Обратимся к поверхности вращения с исключительно замкнутыми геодезическими линиями, данной Tannery[1]).

Уравнение этой поверхности в координатах Декарта

$$16a^2(x^2 + y^2) = z^2(2a^2 - z^2);$$

в начале координат имеем коническую точку.

Принимая за плоскость xy плоскость максимальной параллели, получим уравнение поверхности

$$x = \frac{a}{4}\cos u.\cos\Theta$$

$$y = \frac{a}{4}\cos u.\sin\Theta$$

$$z = a\left(1 - \cos\frac{u}{2} + \sin\frac{u}{2}\right).$$

[1]) „Sur une surface de révolution du quatrième dégré dont les lignes géodésiques sont algebriques“ (Bulletin des Sciences Math. 1892 г. T. XVI январь).

где u меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, а Θ от нуля до 2π. Все геодезические линии имеют равную длину $a\pi$. Легко видеть, что меридиан не имеет точек перегиба, поэтому описание вида этой поверхности „грушевидной формы“ нужно считать не совсем удачным.

Рассмотрим все поверхности вращения, наложимые на поверхность Tannery. Линейный элемент их

$$ds^2 = \frac{a^2}{16}\left[(2+\sin u.)^2\, du^2 + \cos^2 u.\, d\Theta^2\right]; \tag{17}$$

можно положить

$$\frac{a}{4}(2+\sin\ u)\, du = du_1 \qquad \frac{a^2}{16}k^2\cos^2 u = R^2,$$

где R радиус параллели, u_1 —дуга меридиана.

Для меридиана

$$dR = -\frac{ak}{4}\sin\ u.\ du$$

$$dz^2 = \frac{a^2}{16}\left[(2+\sin u)^2 - k^2\sin^2 u\right] du^2$$

$$dz = \frac{a}{4}\sqrt{(1-k^2)\left(\sin u - \frac{2}{1+k}\right)\left(\sin u - \frac{2}{1-k}\right)}\, du.$$

Ищем пределы изменяемости u для вещественности dz.

При $k \leq 1$

$$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$$

При $k < 1$ крайние точки являются коническими точками.

При $k = 1$ точка $u = \frac{\pi}{2}$ правильная точка.

При $1 < k < 3$

$$-1 \leq \sin u \leq \frac{2}{1+k}$$

поверхность не имеет вещественных точек вблизи $u = \frac{\pi}{2}$.

При $k = 3$ точка $u = -\frac{\pi}{2}$ является правильной точкой

$$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{6}.$$

При $k > 3$ поверхность имеет два края, нет точек $u = \frac{\pi}{2}$ и $u = -\frac{\pi}{2}$

$$\frac{2}{1-k} < \sin u < \frac{2}{1+k}.$$

Поверхность Tannery получается при $k = 1$.

Уравнение рассматриваемых поверхностей

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{ak}{4}\cos u.\ \cos\frac{\Theta}{k} \\ y &= \frac{ak}{4}\cos u.\ \sin\frac{\Theta}{k} \\ z &= \frac{a}{4}\int\sqrt{(2-\sin u)^2 - k^2\sin^2 u}\ du. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Формула (4) Darboux дает (19)

$$\frac{du_1}{dR} = \frac{2+\sin u}{k\sin u} \qquad \varphi(R) = \frac{2+\sin u}{k\sin u} \qquad \psi(R) = \frac{2-\sin u}{k\sin u}$$

$$\varphi(R) + \psi(R) = \frac{4}{k\sin u}$$

$$m = \frac{2}{k}. \qquad (19)$$

Угол ω между двумя максимумами расстояния геодезической линии от наибольшей параллели в какой либо части поверхности напр. верхней,

$$\omega = \frac{4\pi}{k}.$$

Отсюда

$$\frac{4\pi}{k}p = 2\pi l \qquad (20)$$

где p — число максимумов, l число оборотов геодезической линии вокруг поверхности. Из (20) имеем

$$\frac{p}{l} = \frac{k}{2},$$

соотношение, справедливое для всех поверхностей семейства при k рациональном.

На рассмотренных мною поверхностях (18) с рациональным параметром k все геодезические линии замкнуты, на поверхностях (18) с иррациональным параметром k геодезические линии обвиваются бесчисленное множество раз вокруг поверхности.

RÉSUMÉ.

En faisant abstraction du parallèle maximum et des lignes géodésiques qui aboutissent aux bords de la surface, l'auteur définit les surfaces de la première classe; celles dont les lignes géodésiques sont toutes fermées ou toutes tournent indèfiniment autour de l'axe; à la seconde classe il rapporte des surfaces dont les lignes géodésiques ne sont pas toutes fermees.

Il demontre que les surfaces de révolution applicables les unes sur les autres appartiennent à une même classe.

Les surfaces de la première classe applicables les unes sur les autres à géodésiques fermées forment un ensemble dénombrable.

Les lignes géodésiques fermées forment sur les surfaces de la seconde classe un ensemble dénombrable, les géodésiques tournant indéfiniment autour de l'axe forment un ensemble ayant la puissance du continu.

Il applique ses résultats à l'étude des géodésiques

1° des surfaces à courbure constante positive;

2° des surfaces de révolution à l'élement linéaire

$$ds^2 = 4(2 - \varrho^2)(d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2);$$

3° des surfaces de révolution applicables sur la surfaces de M. Tannery.

Н. Е. Жуковский и классификация особенных точек дифференциальных уравнений 1 порядка.

Д. М. Синцов.

Покойный ученый, почетный член Харьковского Математического Общества, пользовался широкою известностью в последние годы среди всех интересующихся воздухоплаванием. В среде ученых он был известен своим уменьем подойти к решению самых сложных на первый взгляд вопросов прикладной математики и дать их решение самыми простыми средствами.

Но самая простота предлагаемых им решений скрадывала отчасти другую сторону его исследований,—то, что при своих решениях он пользовался часто совершенно новыми методами, специально для данного случая созданными. И это делает и будет делать необходимым изучение его работ и для тех, кто, не интересуясь самыми решаемыми им вопросами, заинтересован методами их решения. Это тем более необходимо, что со свойственной ему скромностью Н. Е. Жуковский не имел обыкновения подчеркивать новизну применяемых им методов.

Таков в особенности вопрос о классификации критических точек кривых, определенных дифференциальным уравнением 1-го порядка и 1-й степени. В своей магистерской диссертации «Кинематика жидкого тела» напечатанной в Московском Математическом Сборнике т. VIII 1876, Н. Е. Жуковский исследует сначала движение точек частицы жидкости, предполагая, что известны не изменяющая своего направления линия и соответствующая плоскость, и разложив полное движение частицы на косоугольное удлинение относительно неизменяющей своего направления плоскости, проходящей через этот центр, которое направлено вдоль неподвижной линии, и на движение, параллельное неподвижной плоскости, замечает, что последнее определяется по движению точек, лежащих в этой плоскости. Для бесконечно малых линий токов точек частицы он получает дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{e_1 x - ry} = \frac{dy}{e_2 y + rx} = \frac{d\zeta}{\varepsilon_3 \zeta},$$

которое и интегрирует, приводя с помощью некоторых преобразований к виду: $(e_2+e_1)\frac{d\zeta}{\varepsilon_3\zeta}=\frac{(e_2-e_1)(ydx+xdy)+2r(xdx+ydy)}{(e_2-e_1)xy+r(x^2+y^2)}=$

$$=\frac{\frac{(e_2+e_1)}{r}d\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}+\frac{e_2-e_1}{2r}\right)^2+1-\frac{(e_2-e_1)^2}{4r^2}}. \tag{18'}$$

Изучив подробно кривые, удовлетворяющие дифференциальному уравнению в x, y, в § 20 Н. Е. Жуковский обращается к более общему случаю, когда скорости течения u,v,w внутри некоторой замкнутой области непрерывны, однозначны и конечны, и замечает, что линии токов, наполняющие такое пространство, не могут пересекаться или соприкасаться, так как для каждой точки косинусы углов касательной к линии тока имеют одно определенное значение. Этого нельзя сказать, замечает он далее,—когда скорости u,v,w обращаются в 0, ∞, $\frac{0}{0}$ или становятся многозначны. Будем называть, уславливается Н. Е. Ж., критическими точки, в которых линии токов пересекаются, соприкасаются или имеют бесконечно большую кривизну, и разбирает свойства таких точек сначала для плоского течения.

Относя начало в точку, для которой скорости плоского течения u и v обращаются 0, ∞ или становятся неопределенными, он отыскивает пред $\frac{v}{u}$ при $\varrho=\sqrt{x^2+y^2}=0$. Если этот предел имеет конечную величину $\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$, то уравнение линий токов, безконечно близких от начала координат, получится помощью интегрирования уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\Phi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{30}$$

И теперь Н. Е. Ж. обращается к рассмотрению различных критических точек. Когда скорости u и v обращаются в начале координат в нули, а их производные по координатам конечны (некоторые из производных могут быть равны 0), то уравнение (30), говорит он, может быть представлено в виде уравнения (18'). И получает следующие случаи критических точек:

A. $\frac{(e_2-e_1)^2}{4}>r^2$. Линии тока бесконечно-близко от критической точки представляют гиперболы бесконечно большой кривизны

$$\xi\eta^{-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}=\mathrm{Const},$$

где $\varepsilon_1 = \frac{e_1 + e_2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(e_2 - e_1)^2 - 4r^2}$, $\varepsilon_2 = \frac{e_1 + e_2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(e_1 - e_2)^2 - 4r^2}$

имеющие различный вид, смотря потому будет ли $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < 0$ (случай 1-й) или $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} > 0$ (случай 2-й). При $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 1$ гиперболы обращаются в прямые линии (сл. 3).

B. $\left(\frac{e_2 - e_1}{2}\right)^2 = r^2$. Линии токов на бесконечно близком расстоянии от критической точки будут определяться уравнением

$$\varrho^2 \ \mathrm{Sin}^2 u = \mathrm{Const.}\ e^{-\frac{e_2 + e_1}{r} \cdot \frac{1 \mp \mathrm{tang} u}{2\ \mathrm{tang} u}}, \text{ где } u = \varphi \mp \frac{\pi}{4}$$

Взяв верхний знак и предположив $\frac{e_2 + e_1}{r} > 0$, получим сл. 4 (при $e_2 + e_1 = 0$ получаем прямые линии,—точка не будет критической).

C. $\frac{(e_2 - e_1)^2}{4} > r^2$. Линии токов оказываются спиралями, для которых критическая точка есть асимптотический полюс (сл. 5).

$$(e_2 - e_1)\ xy + r\ (x^2 + y^2) = C.\ e^{a \cdot \psi}$$

где

$$a = \frac{e_2 + e_1}{\sqrt{1 - \frac{(e_2 - e_1)^2}{4r^2}}} \text{ и } \psi = \mathrm{arctang}\ \frac{\frac{y}{x} + \frac{e_2 - e_1}{2r}}{\sqrt{1 - \frac{(e_2 - e_1)^2}{4r^2}}}$$

При $e_2 + e_1 = 0$ спирали обращаются в эллипсы (сл. 6).

Достаточно сравнить рисунки Н. Е. Жуковского на стр. 92 его сочинений т. I. М. 1912 г. или в Моск. Мат. Сб. т. VIII (статья Н. Е. Ж., § 20) хотя бы с таблицей на стр. 9 в статье W. Dyck'a Über die singulären Stellen eines Systems von Differentialgleichungen I. O. (München Ber. 1909 г.), чтобы увидеть совпадение: сл. I. Н. Е. Жуковского это Doppelpunkt (col), 2.— Knotenpunkt (noeud), 3.— Büschelpunkt, 5.—Wirbelpunkt (foyer) и 6.—Isolierter Punkt (centre).

Обращает внимание различение Н. Е. Жуковским случая 4, не фигурирующего в схеме W. Dyck'a. Случай этот, если взять всю совокупность кривых, представляет большое сходство со случаем 2., но здесь имеется точка пресечения, а в случае 2—точка перегиба.

Н. Е. Жуковский называет далее (стр. 94) разобранные точки нулевыми точками 1. порядка и подчеркивает следующие результаты: при движении несжимаемой жидкой площади нулевые критические точки 1-го порядка (т. е. особенные точки интегральных кривых дифференциального уравнения 1-го порядка и 1 степени) бывают гиперболические или эллиптические. В 1-ом случае две линии тока пересекаются в критической точке, во 2-ом линии токов обхватывают критическую точку, обращаясь в пределе в бесконечно малые эллипсы. Если в нулевой критической точке 1 порядка вращение элемента площади равно нулю, то чрез эту точку проходят две пересекающиеся под прямым углом линии тока.

Не ограничиваясь нулевыми критическими точками 1-го порядка, Н. Е. Ж. обращает внимание на существование нулевых критических точек n-го порядка, когда в данной точке скорости u, v и их производные до n-го порядка обращаются в 0, а производные n-го порядка конечны, ограничиваясь в их исследовании для плоского течения случаем течения без сжатия и вращения, а также обращает внимание на случай, когда u и v обращаются в ∞ или $\frac{0}{0}$.

Таким образом в работе Н. Е. Жуковского 1876 г. есть различение основных типов критических точек дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Разумеется, это обстоятельство не уменьшает значения работ H. Poincaré, но в истории вопроса имя Н. Е. Жуковского не должно быть опущено.

Отметим в заключение, что анализ Н. Е. Жуковского существенно предполагает, что в разложении по степеням x,y функций M и N уравнения

$$Mdx + Ndy = 0$$

первые члены

$$M = c + ax + by + \dots$$
$$N = c' + a'x + by + \dots$$

имеют определитель $ab' - a'b \neq 0$, а потому исключается случай, когда $ab' - a'b = 0$, — когда изменением переменных уравнение соответствующее (18') может быть приведено к виду

$$-\alpha\, dy + \beta x\, dx = 0$$

с общим интегралом

$$\beta x^2 - 2\alpha y = c.$$

Проективным преобразованием мы можем особенную точку привести в начало координат и получаем случай

$$\beta x_2^{2'} - 2\alpha x_3 x_1 = C x_1^2$$

когда характеристическое уравнение коллинеации устанавливаемой уравнением Якоби имеет тройной корень, и мы имеем то, что можно назвать point d'osculation (Berührungspunkt).

Последнее обстоятельство обнаруживает значение введения при изучении расположения интегральных кривых вблизи особенной точки рассмотрения соотв. соприкасающегося билинейного коннекса и связывает этот вопрос с изучением различных типов самопроективных кривых (W—кривых)—интегральных кривых уравнения Якоби,—на что было мною указано в свое время (К вопросу об особенных элементах коннекса 1902 г.—Изв. Каз. Физ.-Мат. Общества и on the. theory of connexes в Трудах V. Матем. Конгресса в Кембридже. Отмечу, что это обстоятельство и побудило меня несколько лет тому назад поставить темою работы на премию изучение W—кривых.

Это изучение было сделано с большою обстоятельностью Н. М. Душиным темою, составившими великолепный атлас всех различных встречающихся при этом кривых; к сожалению, работа Н. М. Душина, несмотря на постановление факультета, по обстоятельствам времени осталась не напечатанной.

Как я указывал в свое время в отзыве, рассмотрение детально и точно выполненных чертежей соотв. кривых указывает с ясностью глубокое различие с геометрической стороны случаев 2 и 4 Н. Е. Жуковского.

Критерий неприводимости целых функций в любом алгебраическом поле.

М. Сопман.

Следующая теорема, представляющая значительное обобщение известного критерия Айзенштейна, имеет силу в любом алгебраическом поле.

Теорема Айзенштейна:

Полином

$$f(x) = x^n + pa_1 x^{n-1} + pa_2 x^{n-2} + \ldots \; pa_n$$

где p—простое число, $a_1, a_2, \ldots a_n$ — целые числа, из которых a_n на p не делится,—неприводим в области рациональных чисел.

Обобщение таково:

Дан полином $f(x) = x^n + \delta a_1 x^{n-1} + \delta a_2 x^{n-2} + \ldots + \delta a_n$, (*)
где δ, $a_1, a_2, \ldots a_n$ — целые числа некоторой области, причем δ и a_n - числа взаимно простые:

$$(\delta, a_n) = 1 \qquad (1)$$

Если f(x) имеет в данной области делителя степени r, то должно существовать равенство:

$$(\delta^r) = j^n$$

где j — идеал данной области.

Доказательство. Корни f(x) суть целые алгебраические числа, обозначим их $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$.

Из равенства $f(\omega_\iota) = 0$, по (*) следует

$$\omega_\iota^n = \delta(-a_1 \omega_\iota^{n-1} - a_2 \omega_\iota^{n-2} - \ldots - a_n)$$

или

$$\omega_\iota^n = \delta k_\iota \qquad \iota = 1, 2, \ldots n \qquad (2)$$

где k_ι— целые алгебраические числа.

Далее из равенства

$$\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \ldots \cdot \omega_n = \pm \delta a_n$$

по возвышении в n-ую степень при помощи (2) получаем:

$$k_1, k_2, \ldots k_n = \pm a_n^n \qquad (3)$$

Пусть теперь f(x) имеет делителя степени r

$$\varphi(x) = x^r + b_1 x^{r-1} + \ldots b_r, \qquad (^{**})$$

$b_1, b_2, \ldots b_r$ — числа данной области, как известно, целые.

Если корни $\psi(x) - \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_r$, то по (**)

$$\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_r = \pm b_r$$

По возвышении в n-ую степень при помощи (2) имеем:

$$\delta^r \cdot k_1 \cdot k_2 \ldots k_r = \pm b_r^n$$

или, полагая

$$k_1 \cdot k_2 \ldots k_r = K,$$

$$\delta^r \cdot K = \pm b_r^n \qquad (4)$$

K — целое алгебраическое число, по (4) принадлежащее к данной области. По (3) K—делитель a_n^n, отсюда из (1) заключаем, что K и δ— числа взаимно простые

$$(K, \delta) = 1.$$

Поэтому рассматривая в (4) разложение обеих частей на простые идеальные множители, мы и приходим к искомому равенству

$$(\delta^r) = j^n \qquad (5)$$

Следствие 1. Если (δ) не представляет степени некоторого идеала с показателем, равным делителю n, полином f(x) неприводим.

Следствие 2. При n простом полином f(x) неприводим, если (δ) не представляет n-ой степени некоторого идеала.

Примечание. В частном случае, когда $a_n = 1$, легко видеть, что идеал j должен быть главным. В этом случае равенство (5) можно написать так:

$$\delta^r = \varepsilon \alpha^n$$

где ε — единица, α — целое число данной области.

Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности.

С. Бернштейн.

I.

Предположим, что мы имеем N классов индивидов, обладающих свойством, что скрещивание каких-нибудь двух из рассматриваемых индивидов производит индивидов, принадлежащих к одному из упомянутых N классов. Рассматриваемую совокупность классов индивидов мы будем называть замкнутым биотипом. Мы оставляем совершенно в стороне вопрос о том, возможно ли непосредственно по внешнему виду определить, к какому классу относится каждый данный индивид; мы допускаем лишь, что при скрещивании индивида класса i с индивидом класса k, вероятность появления индивида класса l имеет вполне определенное значение $A^l_{i,k} = A^l_{k,i}$. Вероятности $A^l_{i,k}$, связанные соотношением $\sum\limits_{l=1}^{l=N} A^l_{i,k} = 1$, мы будем называть коэффициентами наследственности данного биотипа. В таком случае, если $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots \alpha_N^0$ представляют собой произвольные вероятности принадлежности каждого индивида к одному из N классов, то в ближайшем следующем поколении соответствующие вероятности $\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots \alpha^1_N$ определятся [1]) формулами:

$$\alpha_1^1 = \sum_{i,k} A^1_{i,k}\alpha^0_i\alpha^0_k, \quad \alpha_2^1 = \sum_{i,k} A^2_{i,k}\alpha^0_i\alpha^0_k, \ldots, \quad \alpha_N^1 = \sum_{i,k} A^N_{i,k}\alpha^0_i\alpha^0_k, \tag{1}$$

и точно также для следующего потомства:

$$\alpha_1'' = \sum_{i,k} A^1_{i,k}\alpha^1_i\alpha^1_k, \quad \alpha''_2 = \sum_{i,k} A^2_{i,k}\alpha^1_i\alpha^1_k, \ldots \alpha''_N = \sum A^N_{i,k}\alpha^1_i\alpha^1_k \tag{2}$$

и т. д.

Применяя те же итеративные формулы, мы можем получить распределение вероятностей для любого последующего поколения.

Задача, которую мы ставим, состоит в следующем:

---

[1]) Наши формулы, очевидно, предполагают полное отсутствие какого бы то ни было отбора: размножение биотипа происходит в условиях панмиксии. В следующей статье мною будут рассмотрены различные случаи отбора.

Каковы должны быть коэффициенты наследственности для того, чтобы при панмиксии распределение вероятностей, осуществленное в первом потомстве, передавалось неизменным во всех последующих поколениях?

Если коэффициенты наследования удовлетворяют поставленному условию, то мы говорим, что соответствующий им закон наследования удовлетворяет принципу стационарности.

2. В настоящей статье[1]) я не буду останавливаться на тех принципиальных соображениях, которые привели меня к убеждению, что при построении математической теории эволюции следует в основу ее положить законы наследования, подчиняющиеся принципу стационарности. Замечу только, что закон Менделя, которым определяется наследование большинства точно изученных элементарных признаков, подчиняется выше упомянутому принципу[2]). Закон Менделя касается трех классов индивидов, из которых первые два составляют 2 чистые расы, а третий — расу гибридов, возникающую всегда от скрещивания между собой двух индивидов, принадлежащих к противоположным чистым расам. Таким образом $A^1_{1,1}=A^2_{2,2}=1$, $A^2_{1,1}=A^1_{2,2}=0$, $A^3_{1,2}=1$, $A^3_{1,1}=A^3_{2,2}=A^1_{1,2}=A^2_{1,2}=0$. Остальные 9 коэффициентов, согласно экспериментам Менделя и его последователей имеют вполне определенное численное значение, а именно: $A^1_{3,3}=A^2_{3,3}=\frac{1}{4}$, $A^3_{3,3}=\frac{1}{2}$, $A^1_{1,3}=A^2_{2,3}=A^3_{1,3}=A^3_{2,3}=\frac{1}{2}$, $A^2_{1,3}=A^1_{2,3}=0$.

Таким образом, формулы (1) получают вид

$$a^1_1=\left(a^0_1+\frac{1}{2}a^0_3\right)^2,\quad a^1_2=\left(a^0_2+\frac{1}{2}a^0_3\right)^2,\quad a^1_3=2\left(a^0_1+\frac{1}{2}a^0_3\right)\left(a^0_2+\frac{1}{2}a^0_3\right), \tag{3}$$

из которых простой подстановкой получаем

$$a''_1=\left[\left(a^0_1+\frac{1}{2}a^0_3\right)^2+\left(a^0_1+\frac{1}{2}a^0_3\right)\left(a^0_2+\frac{1}{2}a^0_3\right)\right]^2=$$

$$=\left(a^0_1+\frac{1}{2}a^0_3\right)^2\left[a^0_1+a^0_2+a^0_3\right]^2 \tag{4}$$

т. е. $a''_1=a^1_1$, т. к. $a^0_1+a^0_2+a^0_3=1$.

Таким же образом убеждаемся что $a''_2=a^1_2$, $a''_3=a^1_3$. Следовательно, закон Менделя действительно подчиняется принципу стационарности.

---

[1]) См. мою статью „О приложении математики к биологии" в „Науке на Украине" 1922, I.

[2]) Johannsen. Elemente der exacten Erblichkeitslehre 3-e Aufl. (стр. 486).

3. Первый весьма важный результат, который мы хотим теперь получить, состоит в следующем:

Теорема. Если три класса индивидов составляют замкнутый биотип, подчиняющийся принципу стационарности, причем скрещивание индивидов 1-го и 2-го класса всегда приводит к индивидам 3-го класса, то 1-й и 2-й класс представляют собой чистые расы, подчиняющиеся при скрещивании закону Менделя.

Для упрощения письма, мы изменим обозначения формул (1), пользуясь тем, что у нас всего три различных класса, и будем обозначать через α, β, γ вероятности индивиду родительского поколения принадлежать соответственно к 1-му, 2-му и 3-му классам. Тогда, обозначая через α_1, β_1, γ_1 соответствующие вероятности для сыновнего поколения, можем формулы (1) написать в виде

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= A_{11}\alpha^2 + 2A_{12}\alpha\beta + A_{22}\beta^2 + 2A_{13}\alpha\gamma + 2A_{23}\beta\gamma + A_{33}\gamma^2 = f(\alpha, \beta, \gamma) \\
\beta_1 &= B_{11}\alpha^2 + 2B_{12}\alpha\beta + B_{22}\beta^2 + 2B_{13}\alpha\gamma + 2B_{23}\beta\gamma + B_{33}\gamma^2 = f_1(\alpha, \beta, \gamma) \\
\gamma_1 &= C_{11}\alpha^2 + 2C_{12}\alpha\beta + C_{22}\beta^2 + 2C_{13}\alpha\gamma + 2C_{23}\beta\gamma + C_{33}\gamma^2 = \varphi(\alpha, \beta, \gamma)
\end{aligned} \tag{5}$$

Вообще $A_{ik} + B_{ik} + C_{ik} = 1$. Поэтому, согласно условию теоремы, из того, что $C_{12} = 1$, заключаем, что $B_{12} = A_{12} = 0$, так как очевидно ни один из коэффициентов не отрицателен.

Математическая задача, стоящая перед нами, заключается в определении квадратичных форм с не-отрицательными коэффициентами f, f_1, φ, обладающих свойством, что $f + f_1 + \varphi = (\alpha + \beta + \gamma)^2$, по условию, что

$$\begin{aligned}
f(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) &= f(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha_1 \\
f_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) &= f_1(\alpha, \beta, \gamma) = \beta_1 \\
\varphi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) &= \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \gamma_1
\end{aligned} \tag{6}$$

(причем последнее равенство является следствием из первых двух), коль скоро $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Очевидно, что уравнения (6) не могут обладать только конечным числом решений, т. к. в этом случае α_1, β_1, γ_1 были бы функциями $\alpha + \beta + \gamma$, и, следовательно, мы имели бы $\alpha_1 = p(\alpha + \beta + \gamma)^2$, что невозможно, т. к. коэффициент при $\alpha\beta$ должен быть равен 0, поэтому уравнения (6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha(\alpha + \beta + \gamma) + k\,F(\alpha, \beta, \gamma) \\
\beta_1 &= \beta(\alpha + \beta + \gamma) + k_1 F(\alpha, \beta, \gamma) \\
\gamma_1 &= \gamma(\alpha + \beta + \gamma) - (k + k_1) F(\alpha, \beta, \gamma)
\end{aligned} \tag{7}$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma)$ есть однородная форма, характеризующаяся тем, что $F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 0$, каковы бы ни были начальные значения α, β, γ.

Легко видеть, что $F(\alpha, \beta, \gamma)$ должно быть квадратичной, а не линейной формой, т. к. между $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ не может быть линейного соотношения вида $l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1 = lf(\alpha, \beta, \gamma) + mf(\alpha, \beta, \gamma) + n\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ с $n \gtrless 0$, вследствие того, что f и f_1 лишены члена $\alpha\beta$, который имеется в φ. Предположение же, что $n = 0$, также невозможно, потому что оно влечет за собой $lm < 0$, так что можно положить $l = 1$, $m = -p$, где $p > 0$; поэтому последнее уравнение (7) получило бы форму

$$\gamma_1 = \gamma(\alpha + \beta + \gamma) + (A\alpha + B\beta + C\gamma)(\alpha - p\beta)$$

и, т. к. коэффициенты при α^2 и β^2 не отрицательны, то $A \geq 0$ и $B \leq 0$, а вместе с тем, по условию теоремы, $B - Ap = 2$. Итак $F(\alpha, \beta, \gamma)$ есть квадратичная форма, k и k_1 — численные коэффициенты, причем, не нарушая общности, можем положить $k = 1$; в таком случае очевидно $k_1 = 1$, и коэффициент при $\alpha\beta$ в многочлене $F(\alpha, \beta, \gamma)$ равен -1, т. к. $f(\alpha, \beta, \gamma)$ так же, как и $f_1(\alpha, \beta, \gamma)$ не содержит члена $\alpha\beta$. Остается определить коэффициенты многочлена $F(\alpha, \beta, \gamma) = a\alpha^2 + b\beta^2 - \alpha\beta + c\alpha\gamma + d\beta\gamma + e\gamma^2$. Прежде всего замечаем, что $a = b = 0$; действительно, a не может быть положительно, потому что коэффициент при α^2 в $f(\alpha, \beta, \gamma)$ не превышает 1, и не может быть отрицательным, т. к. иначе коэффициент при α^2 в $f_1(\alpha, \beta, \gamma)$ был бы отрицательным; аналогичным образом убеждаемся в том, что и $b = 0$.

Для определения остальных коэффициентов замечаем, пользуясь формулами (7), что уравнения (6) стационарности преобразуются в единственное уравнение

$$F(\alpha S + F, \beta S + F, \gamma S - 2F) = 0 \tag{8}$$

которое должно соблюдаться при всевозможных значениях α, β, γ, если мы для сокращения положим $S = \alpha + \beta + \gamma$.

Разлагая уравнение (8) по формуле Тейлора, находим

$$S^2F + SF.(F'_\alpha + F'_\beta - 2F'_\gamma) + F^2.F(1, 1, -2) = 0 \tag{9}$$

или, сокращая на F,

$$F(1, 1, -2).F(\alpha, \beta, \gamma) = -S^2 + S.(2F'_\gamma - F'_\alpha - F'_\beta) \tag{10}$$

Но, т. к., в силу ранее сделанного замечания, F не может разлагаться на множителей, то $F(1, 1, -2) = 0$ и сокращая уравнение (10) на S, получаем, наконец, тожество

$$S = 2F'_\gamma - F'_\alpha - F'_\beta, \tag{11}$$

или $\qquad \alpha + \beta + \gamma = 2(c\alpha + d\beta + 2e\gamma) + \beta - c\gamma + \alpha - d\gamma,$

откуда $\qquad c = d = 0, \quad e = \frac{1}{4}$

Следовательно, $F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{4}\gamma^2 - \alpha\beta$, поэтому

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(\alpha + \beta + \gamma) + \frac{1}{4}\gamma^2 - \alpha\beta = \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)^2$$

$$f_1(\alpha, \beta, \gamma) = \beta(\alpha + \beta + \gamma) + \frac{1}{4}\gamma^2 - \alpha\beta = \left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)^2 \tag{12}$$

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \gamma(\alpha + \beta +) + 2\alpha\beta - {}^1/_2\gamma^2 = 2\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)$$

Что и требовалось доказать.

4. Закон Менделя, как мы показали, является необходимым следствием из принципа стационарности, если скрещивание 1-го и 2-го класса всегда приводит к 3-му классу; при этом мы à priori не предполагали даже, что 1-й и 2-й классы представляют чистые расы. С теоретической точки зрения интересно исследовать возможны ли другие законы скрещивания чистых рас [1]), совместимые с принципом стационарности.

Итак, допустим теперь, что коэффициенты при α^2 в $f(\alpha, \beta, \gamma)$ и при β^2 в $f_1(\alpha, \beta, \gamma)$ равны соответственно единице. Повторяя рассуждение, которое привело нас к только что доказанной теореме, мы снова приходим к уравнениям (7), где $F = -a\alpha\beta + c\alpha\gamma + d\beta\gamma + e\gamma^2$, причем можем положить $k = 1$, $k_1 = \lambda$. Для определения 5 коэффициентов a, c, d, e, λ в данном случае имеем вместо (11) тожество

$$S = (1 + \lambda) F'_\gamma - F'_\alpha - \lambda F'_\beta, \tag{13}$$

из которого получаем значения c, d, e при помощи двух параметров a и λ

$$d = \frac{-a + 1}{\lambda + 1}, \quad c = \frac{-a\lambda + 1}{\lambda + 1}, \quad e = \frac{-a\lambda + \lambda + 1}{(\lambda + 1)^2}.$$

Таким образом самый общий вид многочлена F, удовлетворяющего нашему требованию:

$$F = -a\alpha\beta + \frac{-a\lambda + 1}{\lambda + 1}\alpha\gamma + \frac{-a + 1}{\lambda + 1}\beta\gamma + \frac{-a\lambda + \lambda + 1}{(\lambda + 1)^2}\gamma^2,$$

откуда, полагая $a\lambda = b$, можем написать

$$F = -a\alpha\beta + \frac{1 - b}{a + b}a\alpha\gamma + \frac{1 - a}{a + b}a\beta\gamma + \frac{a + b - ab}{(a + b)^2}a\gamma^2$$

[1]) Чистой расой мы называем такой класс, который при внутреннем скрещивании производит только индивидов собственного класса.

и, посредством простых алгебраических преобразований, находим, наконец:

$$
\begin{aligned}
f &= \left[\alpha + \frac{a}{a+b}\gamma\right]\left[\alpha + (1-a)\beta + \left(1 - \frac{ab}{a+b}\right)\gamma\right] \\
f_1 &= \left[\beta + \frac{b}{a+b}\gamma\right]\left[(1-b)\alpha + \beta + \left(1 - \frac{ab}{a+b}\right)\gamma\right] \qquad (14) \\
\varphi &= (a+b)\left[\alpha + \frac{a}{a+b}\gamma\right]\left[\beta + \frac{b}{a+b}\gamma\right]
\end{aligned}
$$

Для того, чтобы коэффициенты не были отрицательны, необходимо и достаточно прибавить еще условия $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$. В частности, если $a = b = 1$, формулы (14) совпадают с (12).

Вопрос о том, встречаются ли в действительности случаи наследования, подчиняющиеся формулам (14) при $a < 1$, $b < 1$, может быть решен только экспериментально. С точки зрения теоретической, формулы (14) дают самый общий закон наследования замкнутого биотипа, состоящего из трех классов при условии, что 2 класса являются чистыми расами. Легко видеть, что единственный закон наследования, при котором все 3 класса являлись бы чистыми расами выразится формулами

$$f = \alpha(\alpha + \beta + \gamma), \quad f_1 = \beta(\alpha + \beta + \gamma), \quad \varphi = \gamma(\alpha + \beta + \gamma), \qquad (15)$$

которые получаются из (7) при $k = k_1 = 0$.

5. Предполагая попрежнему соблюдение принципа стационарности, нам остается для завершения исследования всевозможных форм наследования биотипов, состоящих из 3 классов [1]) доказать следующую теорему:

Если каждый из классов может получаться от скрещивания остальных, то

$$f = p(\alpha + \beta + \gamma)^2, \; f_1 = q(\alpha + \beta + \gamma)^2, \; \varphi = \gamma(\alpha + \beta + \gamma)^2; \qquad (16)$$

если же только один из классов является чистой расой, то

$$f = (\alpha + \beta)\left[\frac{1+b}{2}(\alpha + \beta) + (1-d)\gamma\right], \; f_1 = (\alpha + \beta)\left[\frac{1-b}{2}(\alpha + \beta) + d\gamma\right], \qquad (17)$$

$$\varphi = \gamma(\alpha + \beta + \gamma) \text{ либо } f = \alpha S + a\alpha\left(\mu\beta + \gamma\right), \; \varphi + \mu f_1 = 0$$

---

[1]) Случай 2 классов исчерпывается очевидно формулами:

1) $f = \alpha(\alpha + \beta), f_1 = \beta(\alpha + \beta)$ и 2) $f = p(\alpha + \beta)^2, \; f_1 = q(\alpha + \beta)^2$

Действительно, если уравнения (6) обладают конечным числом решений, то они приводят к формулам (16); в противном же случае мы приходим к формулам (7), где возможны 2 случая: 1) F—квадратичная форма, не разлагающаяся на множителей, k и k_1 — численные коэффициенты, 2) F — линейная форма, k и k_1 — также линейные формы. Предположим сначала, что F квадратичная форма. Ясно, что, если ни одно из чисел $k, k_1, (k+k_1)$ не равно 0, то можно всегда два из них, например k и k_1, взять положительными, но в таком случае форма F должна быть лишена членов относительно α^2 и β^2 для того, чтобы форма $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ не имела отрицательных коэффициентов. Таким образом, этот случай надо отбросить, т. к. он возвращает нас к формулам (14), соответствующим двум чистым расам. Итак приходится допустить, что одно из чисел $k, k_1, (k+k_1)$ равно 0; можем принять, что $k+k_1=0$, т. е. третий класс представляет собой чистую расу (коэффициент при γ^2 равен 1). В таком случае в F коэффициент при γ^2 должен быть равен 0 и, применяя для определения остальных коэффициентов тот же метод, что и раньше, находим, полагая $k=1$:

$$F=(\alpha+\beta)\left[\frac{b-1}{2}\alpha+\frac{b+1}{2}\beta-d\gamma\right]+\beta\gamma,$$

откуда

$$f=(\alpha+\beta)\left[\frac{1+b}{2}(\alpha+\beta)+(1-d)\gamma\right],$$

$$f_1=(\alpha+\beta)\left[\frac{1-b}{2}(\alpha+\beta)+d\gamma\right] \tag{17}$$

Остается рассмотреть предположение, что F—линейная форма;

пусть
$$F=\lambda\alpha+\mu\beta+\gamma$$

Тогда условие стационарности, подобно предыдущему, приводит нас к тожеству

$$S+\lambda k+\mu k_1-(k+k_1)=0,$$

где k и k_1 — линейные формы.

$$k=a\alpha+b\beta+c\gamma,\quad k_1=a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma.$$

Таким образом, если бы мы не были связаны ограничениями относительно знаков, то мы могли бы выбрать k произвольно и, полагая $k_1=\dfrac{S+(\lambda-1)k}{1-\mu}$, получили бы для f, f_1, φ решения, зависящие от 5 параметров (λ, μ, a, b, c). Однако для первого условия теоремы ни одно из этих решений не подходит.

Действительно, т. к. в $f=\alpha S+kF$ коэффициенты при β^2, $\beta\gamma$ и γ^2 не отрицательны, то $\mu b \geqslant 0$, $b+\mu c \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, и точно так же из соответствующего свойства f_1 находим $\lambda a_1 \geqslant 0$, $c_1 \geqslant 0$, $a_1+\lambda c_1 \geqslant 0$.

Отсюда следует, что, если бы $\mu \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$, то в таком случае равенство вида $\lambda\mathfrak{f} + \mu\mathfrak{f}_1 + \varphi = 0$ было бы невозможно, т. к. все коэффициенты в левой части положительны.

Если же $\mu < 0$, тогда $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} = 0$, что несовместимо с допущением что индивиды 1-го класса могут получаться от скрещивания других классов.

Но, во всяком случае, из $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} = 0$, благодаря неотрицательности коэффициентов, нетрудно заключить, что $\lambda = 0$, а потому

$$\mathfrak{f} = \alpha S + \mathfrak{a}\alpha(\mu\beta + \gamma),\ \varphi = -\mu\mathfrak{f}_1 = \frac{\mu}{\mu - 1}\left[S(\beta + \gamma) - \mathfrak{a}\alpha\ (\mu\beta + \gamma)\right] \quad (17^{bis}).$$

Итак, все возможные случаи исчерпаны, и теорема наша доказана.

6. Резюмируем полученные результаты. Законы наследования замкнутого биотипа, состоящего из трех классов, совместные с принципом стационарности, могут быть разбиты на следующие типы:

1) Два класса представляют собой чистые расы. Наследование подчиняется формулам (14), выражающим, в частности, (12) закон Менделя, если скрещивание чистых рас всегда дает гибридную расу.

2) Ни один класс не представляет собой чистой расы и может получаться от скрещивания других классов. Наследование происходит согласно формулам (16). Распределение потомства по классам постоянно и независимо от свойств произвольно отобранных родителей. Никакой корреляции [1]) между родителями и детьми в данном случае нет, так что данный биотип, несмотря на свою полиморфичность, обладает существенным свойством, характеризующим чистую расу.

3) Все три класса представляют собой чистые расы. Наследование подчиняется формулам (15). Произвольное распределение по классам передается неизменным. Каждые два класса биотипа образуют также замкнутый биотип.

4) Один из классов представляет собой чистую расу. Наследование происходит по формулам (17) или (17^{bis}). Если соединить оба класса, не являющиеся чистыми расами, то они образуют вместе один замкнутый диморфичный биотип, в котором наследование подходит под вышеуказанный 2-й тип, и который совместно с классом, представляющим чистую расу, подчиняются закону наследования 3-го типа. Поэтому данный тип наследования, как приводящийся к 2-му и 3-му, самостоятельного значения не имеет. Случай (17^{bis}) отличается от случая (17) тем, что в то время, как последний, предопределяет стационарное относительное распределение чистой расы и совокупности гибридных рас, формулы (17^{bis}), напротив, предопределяют относительное распределение гибридных классов между собой.

---

[1]) Вопросам теории наследственной корреляции, в связи с идеями настоящей статьи, будет посвящена особая статья.

Примечание. В наших выводах существенную роль играло ограничение, наложенное на знак коэффициентов. Если допустить, что коэффициенты могут быть произвольных знаков, то решение, не считая формул (16), может быть 2 типов: 1-й тип, когда функция F линейна, зависит от 5 параметров (стр. 89), 2-й тип, когда функция F квадратична, выражается формулами:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{4P}\Big[P\alpha - Q\beta + (d-1)(d_1-1)S\Big]\Big[P\alpha - Q\beta + (d+1)(d_1+1)S\Big] \\ f_1 &= \frac{1}{4Q}\Big[P\alpha - Q\beta + (d-1)(d_1+1)S\Big]\Big[P\alpha - Q\beta + (d+1)(d_1-1)S\Big] \end{aligned} \quad (18)$$

$$f_2 = S^2 - f - f_1,$$

зависящими от 4 параметров P, Q, d, d_1.

Заметим, что из нашего исследования вытекает, между прочим, что уравнения $S\alpha = f(\alpha, \beta, \gamma)$, $S\beta = f_1(\alpha, \beta, \gamma)$ всегда независимы, если коэффициенты в f и f_1 положительны и $S^2 - f - f_1$ также имеет положительные коэффициенты (равенство коэффициентов 0 исключается).

II.

Переходя к биотипам, в которых число классов $N > 3$, мы решим поставленную вначале задачу при трех различных основных предположениях. Первый случай: известно, что среди биотипов имеется некоторое число чистых рас, которые при попарном скрещивании следуют закону Менделя; требуется определить, каковы должны быть коэффициенты наследственности при скрещивании остальных классов. Второй случай: определить коэффициенты наследственности биотипа, если известно, что каждое скрещивание может воспроизвести индивидов всего биотипа. Третий случай: определить закон наследственности биотипа, в котором имеются две чистые расы, которые при взаимном скрещивании производят все остальные классы, кроме самих себя.

Решение первой задачи не представляет труда и дается формулами:

$$f_{i,i} = \left(\alpha_{ii} + \frac{1}{2}\sum_h \alpha_{ih}\right)^2, \; f_{i,k} = 2\left(\alpha_{ii} + \frac{1}{2}\sum_h \alpha_{ih}\right)\left(\alpha_{k1k} + \frac{1}{2}\sum_h \alpha_{kh}\right), \quad (19)$$

где $\sum_h \alpha_{ih}$ распространяется на значения $h \gtrless i$, при этом α_{ii} означает вероятность родителю принадлежать к чистой расе A_{ii}, $\alpha_{i,k}$ — вероятность родителю принадлежать к гибридной расе $A_{i,k}$, $f_{i,i}$ — вероятность потомку принадлежать к чистой расе $A_{i,i}$, а $f_{i,k}$ — вероятность потомку принадлежать к гибридной расе[1]) $A_{i,k}$.

[1]) Число всех классов $N = \frac{n(n+1)}{2}$, если n есть число чистых рас.

Действительно формулы (19) удовлетворяют, очевидно, принципу стационарности, т. к.

$$f_{i,i}+\frac{1}{2}\sum_{l} f_{i,l}=\left[a_{i,i}+\frac{1}{2}\sum_{l} a_{\ ,l}\right]\left[\sum_{k} a_{kk}+\frac{1}{2}\sum_{kl} a_{kl}\right]$$

при чем выражение, стоящее во вторых скобках, равно 1.

Покажем, что формулы (19) дают единственное решение. Для этой цели предположим, что в родительском поколении скрещиванию подверглись только чистые расы, так что $a_{i.k}=0$, если $i \gtrless k$; причем $a_{1,1}=t_1, a_{2,2}=t_2, \ldots a_{n,n}=t_n$. В таком случае в следующем поколении $a^1_{i,i}=t^2_i$, $a^1_{i,k}=2t_it_k$. Таким образом, вследствие принципа стационарности, имеем

$$f_{11}\left(t_1^2,\ 2t_1t_2,\ldots t_n^2\right)=t_1^2\left(t_1+t_2\ldots+t_n\right)^2 \tag{20}$$

и аналогичные равенства для остальных функций. Обозначая через $A_{i,k,hl}$ коэффициент при $a_{ik}\ a_{hl}$ в функции $f_{1,1}$, заключаем отсюда, что $A_{ik,hl}=0$, если менее двух из чисел i, k, h, l равны единице. Отожествляя остальные коэффициенты находим

$$\begin{aligned} A_{11,11}&=1, & A_{11,hl}+2A_{1h,11}&=1\\ A_{11,1h}&=1 & A_{11,hh}+4A_{1h,1h}&=1. \end{aligned}$$

полагая h, l, 1 различными. Поэтому

$$f_{11}(a_{11},a_{12},\ldots a_{nn})=\left(a_{11}+\frac{1}{2}\sum_{k}a_{1k}\right)^2+\sum_{h,j}A_{11,hj}\left(a_{11}\,a_{hj}-\frac{1}{2}a_{1h}\,a_{1j}\right)+$$

$$+\sum_{h}A_{11hh}\left(a_{11}a_{hh}-\frac{1}{4}a_{1h}^2\right) \tag{21}$$

и, т. к. $A_{11,hh}=0$ (согласно предположению, что скрещивание расы $A_{[illegible]}$ и A_{hh} дает только расу A_{1h}), то

$$f_{11}(a_{11},a_{12}\ldots a_{nn})=\left(a_{11}+\frac{1}{2}\sum_{h}a_{1k}\right)^2+\sum_{hj}A_{11,hj}\left(a_{11}\,a_{hj}-\frac{1}{2}a_{1j}\,a_{1h}\right)$$

Уравнение стационарности для класса A_{11} выразится поэтому тожеством

$$(a_{11}+a_{12}\ldots+a_{nn})^2 f_{11}(a_{11},a_{12},\ldots a_{nn})=\left(f_{11}+\frac{1}{2}\sum_{k}f_{1k}\right)^2+$$

$$+\sum_{hj}A_{11,hj}\left[f_{11}\,f_{hj}-\frac{1}{2}f_{1h}\,f_{1j}\right]. \tag{22}$$

Приравняем в обеих частях коэффициенты при $\alpha_{11}\alpha_{hj}{}^3$: в первой части это будет $A_{11,hj}$, во второй же, принимая во внимание, что из всех функций, входящих в нее, только f_{hj} содержит $\alpha^2{}_{hj}$ (с коэффициентом $\frac{1}{2}$), $\frac{1}{2}A^2_{11,hj}$. Следовательно, $A_{11,hj}=0$, а потому уравнение (21) обращается в первое из уравнений (19), которое нам нужно было установить. Точно также получаются и остальные уравнения [1]).

Формулы (19) выражают, очевидно, что при скрещивании A_{ik} с A_{ii} получается $\frac{1}{4}$ чистых индивидов A_{ii} и по $\frac{1}{4}$ индивидов A_{ik}, A_{ij} и A_{kj}, при скрещивании A_{ik} и A_{jh} получается по $\frac{1}{4}$ индивидов A_{ih}, A_{ij}, A_{kh}, A_{kj} и, наконец, при скрещивании A_{ii} с чуждыми гибридами A_{kl} получается $^1/_2$ гибридов A_{ik} и A_{il}. Этот результат вполне согласуется с первоначальной физиологической гипотезой Менделя, но требует пересмотра гипотезы [2]) „присутствия и отсутствия генов".

8. Решение 2-й задачи выражается следующей теоремой.

Теорема. Если замкнутый биотип, состоящий из n классов, обладает свойством, что от скрещивания любых индивидов могут возникнуть индивиды всех классов (т.-е. если во всех формах (1) коэффициенты отличны от нуля), то наследственность определяется формулами:

$$\alpha'_1=\lambda_1(\alpha_1+\alpha_2\ldots+\alpha_n)^2,\qquad \alpha'_2=\lambda_2(\alpha_1+\alpha'_2\ldots+\lambda_n)^2,\ \ldots \tag{23}$$

где $\Sigma\lambda_i=1$.

Высказанная теорема представляет собой обобщение соответствующей теоремы для $n=3$, доказанной нами в § 5, которой мы и воспользуемся для доказательства методом математической индукции. Пусть $n=4$. Выберем из наших 4 классов 2 произвольных определенных класса A_1 и A_2; остальные 2 класса A_3 и A_4 составят особую совокупность, которая, вообще, не будет обладать характерным свойством класса, заключающемся в том, что при скрещивании его индивидов между собой или с другими классами существует постоянная вероятность появления индивида определенного класса. Но мы можем из этой последней сделать класс $A_3^{(k)}$, если мы всегда будем устраиваться так, чтобы отношение числа индивидов класса A_4 к числу индивидов класса A_3 сохраняло в нашей совокупности постоянное значение k.

---

[1]) Закон наследования, выраженный уравнениями (19), представляющий простое обобщение закона Менделя, находит, между прочим, применение у Aquilegia, исследованных Baur'ом (см. Johannsen, Elemente der exakten Erblichkeitslehre, стр. 581).

[2]) Наши теоретические выводы вполне подтверждаются экспериментальными исследованиями Morgan'a „The physical basis of heredity" 1919.

Итак, положим, что наши формулы наследственности имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &= f_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \\ \alpha'_2 &= f_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \\ \alpha'_3 &= f_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \\ \alpha'_4 &= f_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \end{aligned} \tag{24}$$

Положим $\alpha_4 = k\alpha_3$ и обозначим $\gamma = \alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_3(1+k)$.

В таком случае, подчиняя α_1, α_2, γ еще условию

$$kf_3\left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{\gamma}{1+k}, \frac{k\gamma}{1+k}\right) - f_4\left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{\gamma}{1+k}, \frac{k\gamma}{1+k}\right) = 0,$$

выражающему, что $k\alpha'_3 = \alpha'_4$, мы видим, что совокупности A_3 и A_4 сохраняют при наследовании свойство класса $A_3^{(k)}$.

Таким образом, полагая

$$\begin{aligned} f_1\left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{\gamma}{1+k}, \frac{k\gamma}{1+k}\right) &= \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2, \gamma) \\ f_2\left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{\gamma}{1+k}, \frac{k\gamma}{1+k}\right) &= \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2, \gamma) \\ f_3\left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{\gamma}{1+k}, \frac{k\gamma}{1+k}\right) + f_4\left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{\gamma}{1+k}, \frac{k\gamma}{1+k}\right) &= \varphi_3(\alpha_1, \alpha_2, \gamma), \end{aligned} \tag{25}$$

мы выражаем при помощи функций φ_1, φ_2, φ_3 закон наследственности в преобразованном биотипе, причем этот закон наследственности подчиняется принципу стационарности, если только первоначальное распределение индивидов по классам подчиняется уравнению

$$kf_3\left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{\gamma}{1+k}, \frac{k\gamma}{1+k}\right) - f_4\left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{\gamma}{1+k}, \frac{k\gamma}{1+k}\right) = F_k(\alpha_1, \alpha_2, \gamma) = 0 \tag{26}$$

С другой стороны, очевидно, что стационарный режим при четырех классах не может зависеть более, чем от одного параметра, т. к. представляя уравнения (24) в виде

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &= \alpha_1 S + \psi_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \\ \alpha'_2 &= \alpha_2 S + \psi_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \\ \alpha'_3 &= \alpha_3 S + \psi_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \\ \alpha'_4 &= \alpha_4 S + \psi_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \end{aligned} \tag{24 bis}$$

мы замечаем, что уравнения $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, $\psi_3 = 0$, $\psi_4 = 0$ не могут быть эквивалентны одному уравнению, ибо в противном случае, полагая $\alpha_4 = 0$, мы могли бы осуществить вопреки § 5 бесчисленное множество стационарных режимов при $n = 3$.

Поэтому уравнение (26) может дать только конечное число значений для α_1', α', α_3', α_4', если для некоторого k оно не удовлетворяется тождественно (в последнем случае мы непосредственно применяем теорему, доказанную для $n=3$ и получаем, что

$$\varphi_1 = \lambda_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)^2, \quad \varphi_2 = \lambda_2(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)^2, \quad \varphi_3 = \lambda_3(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)^2,$$

откуда теорема вытекает немедленно и для $n=4$).

Следовательно, при соблюдении уравнения (26) функции $\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$, $\varphi_2(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$, $\varphi_3(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$, данные формулами (25), могут получить лишь ограниченное число значений, а потому, благодаря своей непрерывности, получают вполне определенные значения. Откуда заключаем, что

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \lambda_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)^2 + \mu_1 F_k \\ \varphi_2 &= \lambda_2(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)^2 + \mu_2 F_k \\ \varphi_3 &= \lambda_3(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)^2 + \mu_3 F_k \end{aligned} \tag{27}$$

если только F_k не есть точный квадрат; при этом постоянные, зависящие от k, λ_1, λ_2, λ_3, связаны равенством $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, а μ_1, μ_2, μ_3 удовлетворяют условию $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$. Случай, когда F_k точный квадрат, мы рассмотрим позднее.

Подставляя в уравнения (27) на место φ_1, φ_2, φ_3, F_k их выражения при помощи f_1, f_2, f_3, f_4 и возвращаясь к первоначальным переменным α_1, α_2, α_3, α_4, мы получим три однородных линейных уравнения относительно f_1, f_2, f_3, f_4 и S^2, где $S = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, коэффициенты которых зависят от k,

$$\begin{aligned} f_1 + \mu_1 f_4 - k\mu_1 f_3 &= \lambda_1 S^2 \\ f_2 + \mu_2 f_4 - k\mu_2 f_3 &= \lambda_2 S^2 \\ f_4(1 + \mu_3) + f_3(1 - k\mu_3) &= \lambda_3 S^2 \end{aligned}$$

Эти уравнения независимы при $k \geq 0$; поэтому всегда возможно выразить три из форм f при помощи некоторой четвертой и S^2; так, для определенности, можем положить

$$\begin{aligned} f_2 &= h_2 S^2 + m_2 f_1 \\ f_3 &= h_3 S^2 + m_3 f_1 \\ f_4 &= h_4 S^2 + m_4 f_1 \end{aligned} \tag{28}$$

где $h_2 + h_3 + h_4 = 1$, $m_2 + m_3 + m_4 = -1$, причем h_1 и m_1 могут зависеть от $k = \dfrac{\alpha_4}{\alpha_3}$; во всяком случае отожествляя левые и правые части (28), легко заметить, что h_1 и m_1 могут представлять собой только линейные дробные выражения относительно $\dfrac{\alpha_4}{\alpha_3}$.

Но уравнение стационарности для f_1 дает

$$f_1(f_1, f_2, f_3, f_4) = S^2. f_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4),$$

или, пользуясь равенством (28),

$$f_1(f_1, h_2 S^2 + m_2 f_1, h_3 S^2 + m_3 f_1, h_4 S^2 + m_4 f_1) = S^2 f_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \quad (29)$$

Поэтому, разлагая первую часть равенства (29) в строку Тэйлора, получим

$$S^4 f_1(0, h_2, h_3, h_4) + S^2 f_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\left[h_2 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_2}(1, m_2, m_3, m_4) + h_3 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_3} + h_4 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_4}\right] +$$

$$+ f_1^2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) . f_1(1, m_2, m_3, m_4) = S^2 f_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \quad (29^{\text{bis}})$$

Отсюда заключаем, что либо $\frac{f_1}{S^2} = M$, где M может быт функцией от α_3 и α_4, либо коэффициенты при S^4, $S^2 f_1$ и f_1^2 равны 0. Но первое предположение осуществимо лишь при условии, что M постоянная, а потому теорема была бы уже доказана; следовательно, остается рассмотреть второе предположение, при котором

$$f_1(0, h_2, h_3, h_4) = 0, \quad f_1(1, m_2, m_3, m_4) = 0 \quad (30)$$

$$h_2 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_2}(1, m_2, m_3, m_4) + h_3 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_3}(1, m_2, m_3, m_4) + h_4 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_4}(1, m_2, m_3, m_4) = 1$$

Полагая затем $\psi_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = f_1 - \alpha_1 S_1$, заключаем отсюда, что $\psi_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0$ при всех значениях $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, связанных равенством

$$\frac{\alpha_2 - m_2\alpha_1}{h_2} = \frac{\alpha_3 - m_3\alpha_1}{h_3} = \frac{\alpha_4 - m_4\alpha_1}{h_4} = p, \quad (31)$$

каково бы ни было p, т. к.

$$\psi_1(0, h_2, h_3, h_4) = 0, \quad \psi_1(1, m_2, m_3, m_4) = 0. \quad (32)$$

$$h_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2}(1, m_2, m_3, m_4) + h_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_3} + h_4 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_4} = 0$$

Заметим еще, что равенства (31) равнозначны уравнениям

$$\begin{aligned} h_2 S + m_2\alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ h_3 S + m_3\alpha_1 - \alpha_3 &= 0 \\ h_4 S + m_4\alpha_1 - \alpha_4 &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

из которых только два независимы, т. к. $h_2 + h_3 + h_4 = 1, m_2 + m_3 + m_4 = -1$. Для того чтобы сделать полученный результат геометрически более наглядным можем однородные координаты заменить Декартовыми, положивши, например, $a_3 = 1$; тогда можно сказать, что поверхность 2-го порядка $\psi_1(x, y, 1, z) = 0$ проходит через линию пересечения поверхностей выраженных уравнениями (33). Но полагая затем

$$\psi_2 = f_2 - a_2 S = h_2 S^2 + m_2 f_1 - a_2 S = m_2 \psi_1 + S(h_2 S + m_2 a_1 - a_2)$$
$$\psi_3 = f_3 - a_3 S = m_3 \psi_1 + S(h_3 S + m_3 a_1 - a_3)$$
$$\psi_4 = f_4 - a_4 S = m_4 \psi_1 + S(h_4 S + m_4 a_1 - a_4),$$

заключаем, что поверхности $\psi_2 = 0$, $\psi_3 = 0$, $\psi_4 = 0$, проходят также через линию, определенную уравнениями

$$h_2 S + m_2 a_1 - a_2 = 0, \quad h_3 S + m_3 a_1 - a_3 = 0, \quad h_4 S + m_4 a_1 - a_4 = 0.$$

Кроме того вид функций ψ_2, ψ_3, ψ_4 показывает, что иных положительных совместных решений, кроме данных уравнениями (33), уравнения $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, $\psi_3 = 0$, $\psi_4 = 0$ не могут допускать. Следовательно, замечая, что при

$$f_1 = a_1 S + \psi_1, \quad f_2 = a_2 S + \psi_2, \quad f_3 = a_3 S + \psi_3, \quad f_4 = a_4 S + \psi_4,$$

все стационарные решения определяются совместным решением уравнений $\psi_1 = 0, \psi_2 = 0, \psi_3 = 0, \psi_4 = 0$, заключаем, что все эти решения определяются формулами (33), если параметру $к = \frac{a_4}{a_3}$ будем придавать всевозможные значения от 0 до ∞. Таким образом, существуют положительные значения $\frac{a_4}{a_3}$ при которых остальные координаты, определяемые уравнениями (33) $\frac{a_1}{a_3} \frac{a_2}{a_3}$ также положительны; поэтому непрерывным изменением параметра можем достигнуть того, чтобы одна по крайней мере из координат обращалась в 0, в то время как другие не отрицательны; пусть это будет, например, $\frac{a_4}{a_3}$. В таком случае, придавая a_1, a_2, a_3 соответствующие положительные значения, а a_4 заменяя нулем заметим, что $f_4 = \psi_4 + a_4 S$ обратится в нуль, но это невозможно, т. к. в f_4 все коэффициенты положительны.

Перейдем теперь к общему случаю и покажем, что, если теорема справедлива для некоторого n, то тем же методом можем убедиться в ее правильности для $n + 1$.

Действительно, если теорема верна для n, то в уравнениях

$$f_1 = a_1 S + \psi_1, \quad f_2 = a_2 S + \psi_2 \; \ldots\ldots \; f_n = a_n S + \psi_n$$

уравнения $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$ ..... $\psi_{n-1} = 0$ не могут быть зависимыми, когда все коэффициенты в f_i положительны. Поэтому аналогичные уравнения $\psi_1 = 0, \psi_2 = 0$ .... $\psi_n = 0$, где

$$f_1 = \alpha_1 S + \psi_1 \ , \ldots . \ f_n = \alpha_n S + \psi_n \ , \ f_{n+1} = \alpha_{n+1} S + \psi_{n+1} \ , \qquad (35)$$

не могут быть связаны более, чем одной зависимостью, т. е. стационарный режим при $(n+1)$ классе не может зависеть более, чем от одного параметра.

Следовательно, требование, чтобы $k f_n - f_{n+1} = 0$, приводит, если только для некоторого k оно не соблюдается тождественно, к ограниченному числу возможных значений для $f_1, f_2 \ldots, f_n, f_{n+1}$.

Поэтому, если мы об'единим в один класс $n^{ый}$ и $(n+1)^{ый}$ классы, взявши в первоначальном распределении $\alpha_n = \frac{\gamma}{1+k}$, $\alpha_{n+1} = \frac{k\gamma}{1+k}$, то функции

$$\varphi_1 = f_1\left(\alpha_1 \alpha_2 \ldots, \frac{\gamma}{1+k}, \frac{k\gamma}{1+k}\right), \ldots \varphi_{n-1} = f_{n-1}\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \frac{\gamma}{1+k}, \frac{\gamma}{1+k}\right)$$

$$\varphi_n = f_n\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \frac{\gamma}{1+k}, \frac{k\gamma}{1+k}\right) + f_{n+1}\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \frac{\gamma}{1+k}, \frac{k\gamma}{1+k}\right)$$

при условии, что

$$F_k = kf_n\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \frac{\gamma}{1+k}, \frac{k\gamma}{1+k}\right) - f_{n+1}\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \frac{\gamma}{1+k}, \frac{k\gamma}{1+k}\right) = 0 \qquad (36)$$

могут получить лишь ограниченное число значений, а следовательно, в виду своей непрерывности, получают только одну определенную систему значений (когда $\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_{n-1} + \gamma = 1$). Отсюда следует, что, если уравнение (36) не есть точный квадрат, то

$$\varphi_1 = \lambda_1 (\alpha_1 + \ldots \alpha_{n-1} + \gamma)^2 + \mu_1 F_k \qquad (37)$$

$$\varphi_2 = \lambda_2 (\alpha_1 + \ldots \alpha_{n-1} + \gamma)^2 + \mu_2 F_k$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_n = \lambda_n (\alpha_1 + \ldots \gamma)^2 + \mu_n F_k$$

Откуда заключаем, что

$$f_2 = h_2 S^2 + m_2 f_1 \qquad (38)$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$f_{n+1} = h_{n+1} S^2 + m_{n+1} f_1,$$

где $\quad h_2 \ldots + h_{n+1} = 1, \qquad m_2 + \ldots + m_{n+1} = -1$

Составляя затем стационарное уравнение для f_1, находим, как и раньше, что

$$\psi_1(0, h_2 \dots h_{n+1}) = 0 \qquad \psi_1(1, m_2 \dots m_{n+1}) = 0, \tag{39}$$

$$h_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial a_2}(1, m_2 \dots m_{n+1}) + \dots + h_{n+1} \frac{\partial \psi}{\partial a_{n+1}}(1, m, \dots m_{n+1}) = 0,$$

так что при всех значениях параметра p

$$\psi_1(a_1, a_2 \dots a_n, a_{n+1}) = 0,$$

если $\frac{a_2}{a_1} = m_2 + h_2 p, \dots \frac{a_{n+1}}{a_1} = m_{n+1} + h_{n+1} p$. При тех же значениях обращаются в 0 и

$$\begin{gathered}\psi_2 = m_2\psi_1 + S(h_2 S + m_2 a_1 - a_2) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \psi_{n+1} = m_{n+1}\psi_1 + S(h_{n+1} S + m_{n+1} a_1 - a_{n+1})\end{gathered} \tag{40}$$

Следовательно, все возможные значения параметра $k = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ дают все стационарные значения a_i; поэтому некоторым значениям этого параметра соответствует и совокупность положительных решений; следовательно непрерывно изменяя k, мы могли бы получить и такую совокупность значений, при которых одно или несколько $a_i = 0$, между тем как остальные положительны, но это противоречило бы допущению, что все коэффициенты в формах f_i положительны (отличны от 0).

Таким образом, теорема доказана за исключением случая, когда

$$F_k = kf_n\left(a_1, a_2, \dots \frac{\gamma}{1+k}, \frac{k\gamma}{1+k}\right) - f_{n+1}\left(a_1, a_2, \dots, \frac{\gamma}{1+k}, \frac{k\gamma}{1+k}\right)$$

представляет точный квадрат при всяком $k \geq 0$. Очевидно, что затруднение было бы существенным лишь тогда, когда указанное свойство сохранялось бы, как бы мы ни комбинировали об'единяемые попарно классы. Но это могло бы произойти лишь при предположении, что каждая из функций f_i представляет собой точный квадрат, если только одноименная переменная $a_i = 0$. Поэтому исключенный нами случай требует, чтобы все f_i были вида

$$\begin{gathered}f_1 = \lambda_1 P^2 + a_1 Q_1 \\ f_2 = \lambda_2 P^2 + a_2 Q_2 \\ \dots\dots\dots \\ f_{n+1} = \lambda_{n+1} P^2 + a_{n+1} Q_{n+1}\end{gathered} \tag{41}$$

где λ_i — некоторые положительные коэффициенты, а $P, Q_1 \ldots Q_{n+1}$ линейные формы. Составляя уравнение стационарности для f_1, получим

$$S^2 f_1 = \lambda_1^2 P^2(f_1, \ldots f_{n+1}) + f_1 Q_1(f_1, f_2 \ldots f_{n+1}), \text{ т. е.}$$

$$f_1\left[S^2 - Q_1(f_1, \ldots f_{n+1})\right] = \lambda_1^2 P^2(f_1 \ldots f_{n+1}), \tag{42}$$

следовательно, либо

$$f_1 = C_1 P(f_1, \ldots f_{n+1}), \tag{43}$$

где C_1 постоянная; либо f_1 есть точный квадрат. Т. к. уравнения стационарности для других f_i приводят к тому же заключению, то мы должны признать, что либо все f_i представляют собой точные квадраты, либо все, кроме одного, суть точные квадраты, либо существуют по крайней мере две функции f_i и f_k, отличающиеся только численным множителем (благодаря равенству (43)). Последний случай можем отбросить, т. к. к нему применим данный ранее метод доказательства. Итак, предположим, что существуют 3 функции f_1, f_2, f_3, которые являются точными квадратами; в таком случае исключая $P(f_1, \ldots f_{n+1})$ из их уравнений стационарности, получим

$$\lambda_2 f_1\left[S^2 - Q_1(f_1, \ldots . f_{n+1})\right] = \lambda_1 f_2 \cdot \left[S^2 - Q_2(f_1, \ldots f_{n+1})\right]$$

$$\lambda_3 f_1\left[S^2 - Q_1(f_1, \ldots . f_{n+1})\right] = \lambda_1 f_3\left[S^2 - Q_3(f_1, \ldots f_{n+1})\right]$$

откуда заключаем, что по крайней мере две из функций f_1, f_2, f_3 отличаются только численным множителем, так что прежний метод опять применим. Таким образом, теорема доказана во всей общности.

9. Теорема только что доказанная нами для квадратичных форм (соответствующих наследственности при двуполом размножении) справедлива, как легко видеть, для линейных форм (соответствующих однополому размножению), а именно: если

$$\begin{aligned} f_1 &= A_1' \alpha_1 + A_1^2 \alpha_2 \ldots\ldots + A_1^n \alpha_1 \\ f_2 &= A_2' \alpha_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_2^n \alpha_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n &= A_n' \alpha_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_n^n \alpha_n \end{aligned}$$

представляют собой линейные формы с положительными коэффициентами, удовлетворяющими равенствам $\sum_k A_k^i = 1$ при всяком i, то устанавливающийся стационарный режим вполне определен и при соблюдении принципа стационарсти $f_i = \lambda_i S$.

Действительно, полагая $\varphi_i = f_i - \alpha_i$, замечаем, что при стационарном режиме $\varphi_i = 0$; я говорю, что кроме зависимости $\Sigma\varphi_i = 0$, между формами φ_i никакой другой зависимости быть не может. В самом деле, если бы мы имели $\Sigma\lambda_i\varphi_i = 0$, то это означало бы, что

$$\begin{gathered}\lambda_1(A_2' + A_3' \ldots + A_n') = \lambda_2 A_2' + \lambda_3 A_3' + \ldots + \lambda_n A_n' \\ \lambda_2(A_1^2 + A_3^2 + \ldots + A_n^2) = \lambda_1 A_1^2 \ldots + \lambda_n A_n^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_n(A_1^n + \ldots + A_n^{n-1}) = \lambda_1 A_1^n + \ldots + \lambda_{n-1} A_n^{n-1}.\end{gathered}$$

Но так как все входящие здесь коэффициенты $A_k^i > 0$, то мы должны заключить, что каждое из λ_i является некоторой средней остальных λ; поэтому все λ равны, и наше утверждение относительно невозможности между φ_i другой зависимости кроме $\Sigma\varphi_i = 0$ доказано. Следовательно стационарный режим, устанавливающийся во втором поколении, не зависит от первоначальных значений α_i, а потому $f_i = \lambda_i S$.

Обе наши теоремы о линейных и квадратичных формах, очевидно, непосредственным переходом к пределу распространяются на случай $n = \infty$, т. е. соответственно, на случай линейных и двойных интегралов. Таким образом, получаются следующие две теоремы.

Теорема А. Уравнение $f(y) = \int_0^1 K(x, y) f(x)\, dx$, в котором $K(x, y)$ положительно и $\int_0^1 K(x, y)\, dy = 1$, имеет только одно решение (с точностью до постоянного множителя). Если же уравнение $\int_0^1 K(x, y)\varphi(x)\, dx = \int_0^1\int_0^1 K(x, x_1) K(x_1, y)\varphi(x)\, dx\, dy$ удовлетворяется для всякой положительной интегрируемой функции $\varphi(x)$, то $K(x, y)$ есть функция одного только y.

Теорема В. Если уравнение

$$\int_0^1\int_0^1 K(x, y, z)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\, dx\, dy = \int_0^1\int_0^1 K(x, y, z)\,\varphi_1(x)\,\varphi_1(y)\, dx\, d_1x$$

удовлетворяется для любой положительной функции $\varphi(x)$ подчиненной условию, что $\int_0^1 \varphi(x)\, dx = 1$, а $\varphi_1(u) = \int_0^1\int_0^1 K(x, y, u)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\, dx\, dy$, при чем $K(x, y, z)$ положительна и симметрична по x, y и $\int_0^1 K(x, y, z)\, dz = 1$, то $K(x, y, z)$ есть функция одного только z. Не останавливаясь здесь более подробно на случае $n=\infty$ и на его связи с теорией интегральных уравнений, перейдем к рассмотрению следующего важного случая, когда число классов конечно.

III

10. Предположим, что имеется всего $N=n+2$ классов, причем 2 класса представляют собой чистые расы, т. е. при внутреннем скрещивании каждый класс воспроизводит лишь себе подобных. При взаимном же скрещивании этих двух классов получаются все остальные (гибридные) классы. Согласно § 6, если бы вся совокупность гибридов представляла собой класс, то мы имели бы случай Менделевского наследования. Мы увидим, что, если гибриды представляют собой несколько классов, то нужно различать две возможности: 1) каждый гибридный класс при внутреннем скрещивании может дать индивида одного из первых двух чистых классов; 2) существует гибридный класс, который при внутреннем скрещивании не может воспроизвести индивидов первоначальных чистых классов.

Таким образом, обозначая функции воспроизведения для наших $n+2$ классов, соответственно через f и f_1 для чистых рас и через $\varphi_i (i=1, 2 \ldots n)$ для гибридных, а соответствующие вероятности через α, β, γ_i, наше основное предположение сводится к тому, что во всех квадратичных формах φ_i имеется член, содержащий $\alpha\beta$, но нет ни α^2, ни β^2; напротив форма f содержит α^2 (с коэффициентом 1) и не содержит ни $\alpha\beta$, ни β^2, а форма f_1 содержит β^2 (с коэффициентом 1), но не содержит $\alpha\beta$ и α^2.

Не трудно доказать прежде всего, что в таком случае f вовсе не зависит от β, а f_1 не зависит от α, т.-е. скрещивание, при котором один из родителей принадлежит к одной чистой расе никогда не дает индивида принадлежащего другой чистой расе. Действительно предположим, что первоначально $\gamma_i=0$ при всех i, тогда по принципу стационарности

$$(\alpha+\beta)^2 f = f^2 + f\sum A_i\varphi_i + \sum A_{ik}\varphi_i\varphi_k + f_1\sum D_i\varphi ,$$

но в данном случае $f=\alpha^2$, $f_1=\beta^2$, $\varphi_i=2c_1\alpha\beta$, где $c_i>0$.

Поэтому т. к. в первой части β входит в степени не выше второй, то все $D_i=0$, что и подтверждает сказанное выше.

11. Прежде чем перейти к доказательству общей теоремы, остановимся для большей ясности на случае $N=4$. Общая теорема будет непосредственным обобщением, требующим некоторых существенных дополнительных рассуждений, теоремы, которую мы сейчас докажем.

Теорема. При $N=4$ формулы воспроизведения должны иметь одну из следующих форм: либо

$$f=\left(\alpha+\frac{1}{2}A_1\gamma_1+\frac{1}{2}A_2\gamma_2\right)^2,\quad f_1=\left(\beta+\frac{1}{2}B_1\gamma_1+\frac{1}{2}B_2\gamma_2\right)^2,$$

$$\varphi_1=2c_1\left(\alpha+\frac{1}{2}A_1\gamma_1+\frac{1}{2}A_2\gamma_2\right)\left(\beta+\frac{1}{2}B_1\gamma_1+\frac{1}{2}B_2\gamma_2\right) \tag{44}$$

$$\varphi_2=2c_2\left(\alpha+\frac{1}{2}A_1\gamma_1+\frac{1}{2}A_2\gamma_2\right)\left(\beta+\frac{1}{2}B_1\gamma_1+\frac{1}{2}B_2\gamma_2\right),$$

где $\quad C_1+C_2=1,\qquad A_1+B_1=A_2+B_2=2,\qquad A_1c_1+A_2c_2=1;$

либо $\quad f=(\alpha+\gamma_1)(\alpha+\gamma_2),\qquad f_1=(\beta+\gamma_1)(\beta+\gamma_2)\qquad (45)$

$$\varphi_1=(\alpha+\gamma_1)(\beta+\gamma_1),\qquad \varphi_2=(\alpha+\gamma_2)(\beta+\gamma_2).$$

В самом деле, предположим сначала, что между φ_1 и φ_2 существует тожественно зависимость $c_2\varphi_1=c_1\varphi_2$. В таком случае, полагая с самого начала $c_2\gamma_1=c_1\gamma_2$, мы можем об'единить оба гибридных класса в один и получим биотип из трех классов, который должен подчиняться закону Менделя. Следовательно,

$$f(\alpha,\beta,c_1\gamma,c_2\gamma)=\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)^2$$

$$f_1(\alpha,\beta,c_1\gamma,c_2\gamma_2)=\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)^2$$

Поэтому полагая

$$f=\alpha^2+\alpha\sum A_i\gamma_i+\sum A_{ik}\gamma_i\gamma_k$$

$$f_1=\beta^2+\beta\sum B_i\gamma_i+\sum B_{ik}\gamma_i\gamma_k,$$

находим, что $A_1c_1+A_2c_2=B_1c_1+B_2c_2=C_1+C_2=1$

$$\sum A_{ik}C_iC_k=\sum B_{ik}C_iC_k=\frac{1}{4}(C_1+C_2)^2 \tag{46}$$

Но составляя уравнение стационарности для f, получим

$$ff_1=f\left[(A_1-1)\varphi_1+(A_2-1)\varphi_2\right]+\sum A_{ik}\varphi_i\varphi_k \tag{47}$$

и пользуясь равенствами (46) и соотношением $\frac{\varphi_1}{c_1}=\frac{\varphi_2}{c_2}$, заключаем, что $ff_1=\frac{1}{4}(\varphi_1+\varphi_2)^2$.

Отсюда следует, что f и f_1 должны быть точными квадратами и мы немедленно получаем формулы (44).

Предположим теперь, напротив, что между функциями φ_1 и φ_2 нет тождественной пропорциональности. В таком случае всякая зависимость между функциями воспроизведения должна содержать по крайней мере три из них. Но мы видели выше (§ 10), что существует бесчисленное множество стационарных режимов, при которых $c_2\varphi_1 - c_1\varphi_2 = 0$, (где $2c_1$ и $2c_2$ соответственно коэффициенты при $\alpha\beta$ в φ_1 и в φ_2), удовлетворяющих уравнению $4c_1^2 ff_1 = \varphi_1^2$. (48)

Поэтому, если между $f, f_1, \varphi_1, \varphi_2$ существует квадратичная зависимость $F(f, f_1, \varphi_1, \varphi_2) = 0$ (линейной зависимости быть не может), то она должна быть тождественно удовлетворена при одновременном выполнении равенств (48) и $c_2\varphi_1 - c_1\varphi_2 = 0$.

Следовательно,

$$F(\alpha, \gamma, \gamma_1, \beta_2) = P(\alpha, \gamma, \gamma_1, \gamma_2) \cdot (c_2\gamma_1 - c_1\gamma_2) + k\left[4c_1^2\alpha\beta - \gamma_1^2\right],$$

где P многочлен первой степени, а k постоянная, а потому, если бы существовала вторая подобная зависимость, то совместно с первой она привела бы нас к линейной зависимости, что невозможно. Отсюда заключаем, что уравнения стационарности, составленные для f и f_1

$$ff_1 = f\left[(A_1 - 1)\varphi_1 + (A_2 - 1)\varphi_2\right] + \sum A_{ik}\varphi_i\varphi_k$$

$$ff = f_1\left[(B_1 - 1)\varphi_1 + (B_2 - 1)\varphi_2\right] + \sum B_{ik}\varphi_i\varphi_k$$

должны быть эквивалентны. Следовательно $A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = 1$, $A_{ik} = B_{ik}$, уравнение стационарности превращается в

$$F = ff_1 - \sum A_{ik}\varphi_i\varphi_k = 0. \tag{49}$$

Поэтому φ_1 и φ_2 должны иметь форму

$$\varphi_1 = 2c_1\left(\alpha\beta - \sum A_{ik}\gamma_i\gamma_k\right) + \gamma_1 S$$

$$\varphi_2 = 2c_2\left(\alpha\beta - \sum A_{ik}\gamma_i\gamma_k\right) + \gamma_2 S \tag{50}$$

Но $A_{11} = A_{22} = 0$, т. к. иначе наши формы допускали бы отрицательные коэффициенты. Таким образом

$$ff_1 = 2A_{12}\,\varphi_1\,\varphi_2, \tag{51}$$

откуда заключаем, что

$$f = \alpha^2 + \alpha\,\gamma_1 + \alpha\,\gamma_2 + 2A_{12}\gamma_1\gamma_2 \text{ и } f_1 = \beta^2 + \beta\gamma_1 + \beta\gamma_2 + 2A_{12}\,\gamma_1\gamma_2$$

разлагаются на множителей, а потому $A_{12} = \frac{1}{2}$ и

$$f = (\alpha + \gamma_1)\,(\alpha + \gamma_2), \qquad f_1 = (\beta + \gamma_1)\,(\beta + \gamma_2);$$

замечая, наконец, что для положительности коэффициентов в φ_1 и φ_2 необходимо, чтобы $c_1 \leq \frac{1}{2}$, $c_2 \leq \frac{1}{2}$, находим $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, откуда

$$\varphi_1 = (\alpha + \gamma_1)\,(\beta + \gamma_1), \qquad \varphi_2 = (\alpha + \gamma_2)\,(\gamma + \gamma_2),$$

что и требовалось доказать.

Закон наследования, выражаемый формулами (44), не представляет принципиального уклонения от закона Менделя. Напротив, формулы (45) дают весьма своеобразный закон наследования, где оба гибридные класса представляют собой чистые расы. Этот закон «кадрильной» наследственности представляет собой единственный закон (не считая его простых видоизменений, которые будут вытекать из общей теоремы), допускающий непосредственное появление новой чистой расы при скрещивании данных чистых рас. Было бы интересно применить его к экспериментальному исследованию тех противоречащих менделизму случаев, где наблюдается факт появления «константных» гибридов.

Заметим еще принципиальное различие между формулами (44) и (45): первые формулы соответствуют случаю, когда каждый гибрид может воспроизвести первоначальные чистые расы, вторые формулы соответствуют противоположному случаю. Переходим к общей теореме.

12. Теорема. Если имеется замкнутый биотип состоящий из $(n+2)$ классов, из которых 2 представляют собой чистые расы, которые при взаимном скрещивании могут дать индивидов, принадлежащих к любому из остальных классов, но не могут дать индивидов родительских классов, то закон наследования, подчиняющийся принципу стационарности, должен быть одного из двух типов:

1) Если каждый из остальных (гибридных) классов при внутреннем скрещивании может дать индивида принадлежащего одному из вышеупомянутых чистых классов, то закон наследования является обобщенным Менделевским законом, выражающимся формулами:

$$f = \left[\alpha + \tfrac{1}{2}(A_1\gamma_1 + \ldots . A_n\gamma_n)\right]^2, \quad f_1 = \left[\beta + \tfrac{1}{2}(B_1\gamma_1 + \ldots . + B_n\gamma_n)\right]^2$$

$$\varphi_i = 2c_i\left[\alpha + \tfrac{1}{2}(A_1\gamma_1 + \ldots . + A_n\gamma_n)\right]\left[\beta + \tfrac{1}{2}(B_1\gamma_1 + \ldots . + B_n\gamma_n)\right]^2, \tag{52}$$

$$\text{где } \sum_i c_i = 1, \qquad \sum_i A_i c_i = 1, \qquad A_i + B_i = 2;$$

2) Если существуют гибридные классы, которые при внутреннем скрещивании не могут дать индивидов вышеупомянутых чистых рас, то закон наследования принадлежит к «кадрильному» типу и выражается формулами:

$$
\begin{aligned}
f &= (\alpha + \gamma_1 + \gamma_2 \cdots + \gamma_k)(\alpha + \gamma_{k+1} + \cdots + \gamma_n) \\
f_1 &= (\beta + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots \gamma_k)(\beta + \gamma_{k+1} + \cdots + \gamma_n) \\
\varphi_i &= c_i(\alpha + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k)(\beta + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k) \text{ для } i \leqslant k \qquad (53) \\
\varphi_j &= d_j(\alpha + \gamma_{k+1} \cdots + \gamma_n)(\beta + \gamma_{k+1} \cdots + \gamma_n) \text{ для } j > k
\end{aligned}
$$

$$\text{где } \sum c_i = \sum d_j = 1.$$

Сохраняя прежние обозначения,

$$
\begin{aligned}
f &= \alpha^2 + \alpha \sum A_i \gamma_i + \sum A_{ik} \gamma_i \gamma_k \\
f_1 &= \beta^2 + \beta \sum B_i \gamma_i + \sum B_{ik} \gamma_i \gamma_k
\end{aligned} \qquad (54)
$$

Мы ограничимся сначала случаем, когда $A_i = B_i = 1$ и $A_{ik} = B_{ik}$. Тогда уравнения стационарности для функций f и f_1 будут тожественны и получат вид

$$F = \alpha\beta - \sum A_{ik} \gamma_i \gamma_k = 0 \qquad (55)$$

Прежде чем перейти к доказательству нашей теоремы, существенно требующей, чтобы все коэффициенты были не отрицательны, я укажу для общей ориентировки самое общее решение (без ограничения о знаках коэффициентов) при условии, что стационарное распределение связано только одним уравнением. Так как это единственное уравнение должно быть (55), то общий вид функций φ_i будет

$$\varphi_i = 2c_i F + \gamma_i S, \qquad \text{где } \sum c_i = 1$$

Следовательно, уравнение стационарности получит форму

$$(\alpha S - F)(\beta S - F) = \sum_{ik} A_{ik} \left[2c_i F + \gamma_i S\right]\left[2c_k F + \gamma_k S\right],$$

т. е.

$$F^2 - (\alpha + \beta) FS + \alpha\beta S^2 = 4F^2 \sum_{ik} A_{ik} c_i c_k + 4SF \sum_{ik} A_{ik} c_i \gamma_k +$$
$$+ S^2 \sum_{ik} A_{ik} \gamma_i \gamma_k, \qquad (56)$$

или по сокращении на F

$$F\left(1-4\sum_{ik} A_{ik}\, c_i\, c_k\right)=S\left[\alpha+\beta+4\sum_{ik} A_{ik}\, c_i\, \gamma_k\right]-S^2 \qquad (57)$$

Таким образом необходимо и достаточно, чтобы

$4\sum_i A_{ik}\, c_i=1$ и $\sum c_i=1$ т. к. из этих условий вытекает также

$$4\sum_{i,k} A_{ik}\, c_i\, c_k=1$$

Поэтому общее решение зависит от $\frac{n(n+1)}{2}+n$ параметров, связанных $n+1$ уравнением, т.-е. в конечном счете от $\frac{(n+2)(n-1)}{2}$ независимых параметров.

Однако, как легко видеть, при $n>2$ ни одно из этих решений для нас не подходит, т.-е. при $n>2$ число независимых стационарных уравнений всегда более одного. Итак, вообще, мы должны положить

$$\varphi_i=2c_i F+\gamma_i S+\alpha S_i+\beta S_i'+\psi_i, \qquad (58)$$

где S_i и S_i' линейные функции $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n)$, а ψ_i квадратичная функция тех же переменных, при чем $\sum_i S_i=\sum_i S_i'=\sum_i \psi_i=0$ (59)

Вычислением функций S_i, S_i', ψ_i, мы сейчас займемся, заметив что условия стационарности для каждого φ_i получают форму:

$$f\cdot S_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)+f_1\cdot S_i'(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)+\psi_i(\varphi_1, \ldots \varphi_n)=0 \qquad (60)$$

Положим $S_i=\sum_h A_h^i\gamma_h$, $\qquad S_i'=\sum_h B_h^i\gamma_h$ (61)

В таком случае, приравнивая 0 коэффициент при α^3 в тожестве (60), мы получим:

$$S_i(\gamma_1+S_1, \gamma_2+S_2, \ldots, \gamma_n+S_n)=0 \qquad (62)$$

т.-е. $\sum_h A_h^i S_h+S_i=0 \qquad i=(1, 2 \ldots n)$

Точно таким же образом мы получили бы

$$\sum_h B_h^i S_h'+S_i'=0, \qquad (63)$$

поэтому все выводы, которые мы сделаем относительно S_i, буду
правильны по отношению к S'_i.
Составим таблицу

$$
\begin{array}{llll}
A_1^1+1 & A_1^2 & A_1^3 \ldots\ldots & A_1^n \\
A_2^1 & A_2^2+1 & \ldots\ldots & A_2^n \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
A_n^1 & A_n^2 \ldots\ldots & \ldots\ldots & A_n^n+1,
\end{array} \tag{64}
$$

каждая колонна которой в силу уравнений (62) обладает свойство
что сумма $\sum\limits_h \lambda_h^i S_h = 0$, если λ_h^i есть член $i^{\underline{ой}}$ колонны, лежащ
в $h^{\underline{ой}}$ горизонтали (считая сверху).

Заметим, что в S_h все коэффициенты, кроме A_h^h, не отрицательн
т.-к. в φ_h коэффициенты не отрицательны, причем

$$-A_h^h = A_h^1 + \ldots\ldots A_h^{h-1} + A_h^{h+1} \ldots\ldots + A_h^n,$$

Пусть $\lambda_{h_1}^i$, $\lambda_{h_2}^i$, $\lambda_{h_3}^i$ будут максимальные члены $i^{\underline{ой}}$ колонны (для опр
деленности мы взяли число этих максимумов равным 3, но ничего
изменилось бы в рассуждении, если бы мы взяли другое число).
имеем, вообще, $\sum\limits_h \lambda_h^i A_p^h = 0$ для любого значения p, поэтому выби
в частности, $p = h_1, h_2, h_3$, находим

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_1^i - \lambda_{h1}^i)\, A_{h_1}^1 + (\lambda_2^i - \lambda_{h_1}^i)\, A_{h_1}^2 + \ldots\ldots + (\lambda_n^i - \lambda_{h_1}^i)\, A_{h_1}^n = 0 \\
&(\lambda_1^i - \lambda_{h_2}^1)\, A_{h_2}^1 + (\lambda_2^i - \lambda_{h_2}^i)\, A_{h_2}^2 + \ldots\ldots + (\lambda_n^i - \lambda_{h_2}^i)\, A_{h_2}^n = 0 \\
&(\lambda_1^i - \lambda_{h_3}^i)\, A_{h_3}^1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (\lambda_n^i - \lambda_{h_3}^i)\, A_{h_3}^n = 0
\end{aligned}
$$

и замечая, что $\lambda_\kappa^i - \lambda_{h1}^i = \lambda_\kappa^i - \lambda_{h_2}^i = \lambda_k^i - \lambda_{h_3}^i < 0$, если k отлично от
h_2, h_3, заключаем, что $A_{h1}^\kappa = A_{h2}^\kappa = A_{h3}^\kappa = 0$ для указанных значений k.
$\lambda_h^i = A_h^i$, при $i \gtrless h$ и $\lambda_i^i = A_i^i + 1$. Поэтому i должно быть равно одном
чисел h_1, h_2, h_3 и кроме того, если в $h_1^{\underline{ой}}$ колонне максимумы
ответствуют $h_1^{\underline{ой}}$, $h_2^{\underline{ой}}$, $h_3^{\underline{ей}}$ горизонтали, то на тех же горизонта
будут максимумы $h_2^{\underline{ой}}$ и $h_3^{\underline{ей}}$ колонн. Отсюда следует, что

$$
\begin{gathered}
S_{h1} + \gamma_{h1} = \lambda_{h1}^{h1}(\gamma_{h1} + \gamma_{h2} + \gamma_{h3});\; S_{h2} + \gamma_{h2} = \lambda_{h2}^{h2}(\gamma_{h1} + \gamma_{h2} + \gamma_{h3}); \\
S_{h3} + \gamma_{h3} = \lambda_{h3}^{h3}(\gamma_{h1} + \gamma_{h2} + \gamma_{h3}),
\end{gathered}
$$

при чем $\lambda_{h_1}^{h1} + \lambda_{h_2}^{h2} + \lambda_{h_3}^{h3} = 1$. Вообще все наши линейные формы
распадаются на несколько групп, так что только формы одной и

же группы зависят от тех же переменных и подчиняются соотношениям вида (66). Докажем далее, что число групп, на которые распадаются S_h, не может быть более двух.

В самом деле, пусть для определенности первые i форм $S_1, S_2 \ldots S_i$ принадлежат одной группе, так что:

$$\frac{S_1+\gamma_1}{\lambda_1}=\frac{S_2+\gamma_2}{\lambda_2}=\frac{S_i+\gamma_i}{\lambda_i}=(\gamma_1+\gamma_2\ldots+\gamma_i) \tag{67}$$

В таком случае, уравнения стационарности для $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_i$ будут иметь вид

$$\begin{gathered} f.\left[\lambda_1(\varphi_1+\varphi_2\cdots+\varphi_i)-\varphi_i\right]+f_1.S_1'(\varphi_1,\cdots\varphi_n)+ \\ +\psi_1(\varphi_1,\cdots\varphi_n)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f.\left[\lambda_i(\varphi_1+\varphi_2\cdots\varphi_i)-\varphi_i\right]+f_1.S'_i(\varphi_i\cdots\varphi_n)+ \\ +\psi_i(\varphi_1\cdots\varphi_n)=0 \end{gathered} \tag{68}$$

Складывая эти равенства, мы видим, что в в первой части исчезает член, содержащий f, а потому квадратичная форма, являющаяся коэффициентом при α^2 в сумме $\psi_1(\varphi_1,\varphi_2\cdots\varphi_n)+\cdots+\psi_i(\varphi_1,\ldots\varphi_n)$ должна быть тожественно равна 0. Следовательно,

$$\psi_1(S_1+\gamma_1, S_2+\gamma_2, \ldots S_n+\gamma_n)+\cdots+\psi_i(S_1+\gamma_1,\ldots S_n+\gamma_n)=0, \tag{69}$$

но т. к., вообще, в функции $\psi_k(\gamma_1,\gamma_2\cdots\gamma_u)$ члены, не содержащие γ_k, не могут быть отрицательны, то мы должны заключить, что во всех функциях ψ рассматриваемой группы коэффициенты при $\gamma_k\gamma_l$ равны 0, если $k>i$ и $l>i$; отсюда следует, что для указанных значений k и l тем более и $A_{kl}=0$. Ясно, что то же рассуждение может быть применено к каждой группе, а потому, если бы число групп было более двух, то все $A_{kl}=0$, что невозможно, т. к. уравнение стационарности (55) приняло бы вид $f.f_1=0$. Применяя то же рассуждение к формам S_h', мы убеждаемся, что эти формы также распадаются на две группы, обладающие выше выведенными свойствами.

Таким образом все функции φ_i разбиваются по группам, как относительно S, также и относительно S^1, образуя в общем не более 4 подгрупп. Следует еще заметить, что приравнивая 0 коэффициенты при $\alpha^3\beta$ в каждом из уравнений (68), мы получаем, что $\lambda_1=\dfrac{c_1}{c_1+c_2+\cdots c_i}$ и т.д. Поэтому, предполагая, что φ_1 и φ_2 принадлежат к одной и той же подгруппе, выводим из соответствующих им уравнений стационарности, что

$$(f+f_1)(c_2\varphi_1-c_1\varphi_2)=c_2\psi_1(\varphi_1,\varphi_2\cdots\varphi_n)-c_1\psi_2(\varphi_1,\cdots\varphi_n) \tag{70}$$

откуда
$$(f+f_1)\Big[(c_2\gamma_1-c_1\gamma_2)(\gamma_1+\gamma_2+\cdots\gamma_n)+c_2\psi_1-c_1\psi_2\Big]=$$
$$=c_2\psi_1(\varphi_1,\cdots\varphi_n)-c_1\psi_2(\varphi_1,\cdots\varphi_n) \tag{71}$$

Приравнивая коэффициенты при α^2 и β^2 в обеих частях, находим

$$(c_2\gamma_1-c_1\gamma_2)(\gamma_1+\gamma_2+\cdots\gamma_n)+c_2\psi_1-c_1\psi_2=c_2\psi_1(S_1+\gamma_1,\cdots S_n+\gamma_n)-$$
$$-c_1\psi_2(S_1+\gamma_1,\cdots S_n+\gamma_n)= \tag{72}$$
$$=c_2\psi_1(S'_1+\gamma_1,\cdots S'_n+\gamma_n)-c_1\psi_2(S'_1+\gamma_1,\cdots,S'_n+\gamma_n).$$

Следовательно, если группы относительно S и S' не совпадают, то

$$(c_2\gamma_1-c_1\gamma_2)(\gamma_1+\gamma_2\cdots+\gamma_n)+c_2\psi_1-c_1\psi_2=$$
$$=A(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n)^2, \tag{73}$$

где A численный коэффициент. Но т. к. в первой части нет членов, содержащих произведения $\gamma_k\,\gamma_l$, где k и l не относятся к рассматриваемой подгруппе, то $A=0$. Следовательно,

$$c_2\varphi_1-c_1\varphi_2=0 \tag{74}$$

К весьма важному соотношению (74) мы прийдем также, если допустим, что группы относительно S и S' совпадают, т. к. в таком случае $S'_h=S_h$, и следовательно квадратичная форма, которая служит коэффициентом при $2\alpha\beta$ во второй части равенства (71) и должна быть тожественно равна 0, должна быть также равна выражению (72).

Итак, во всяком случае, функции φ_h, принадлежащие одной подгруппе, отличаются только численным множителем. Остается показать что таких подгрупп может быть не более двух. Для этой цели преобразуем наш биотип, об'единив все классы каждой подгруппы. В таком случае преобразованный биотип каждой подгруппы будет иметь только один класс. Нужно проверить невозможность допущений n=4 и n=3.

Пусть сначала n=4, тогда согласно предыдущему

$$F=\alpha\beta-A_{14}\gamma_1\gamma_4-A_{23}\gamma_2\gamma_3, \tag{75}$$

если мы положим для определенности что S_1 и S_2 принадлежат одной группе, а S_3 S_4 другой, и в то же время S_1' и S_3' принадлежат одной группе, а S_2' и S_4' другой.

Из уравнения стационарности

$$f.f_1=A_{14}\varphi_1\varphi_4+A_{23}\varphi_2\varphi_3$$

получим, приравнивая коэффициенты при α^2

$$A_{14}\gamma_1\gamma_4+A_{23}\gamma_2\gamma_3=(A_{14}\lambda_1\lambda_4+A_{23}\lambda_2\lambda_3)(\gamma_1+\gamma_2)(\gamma_3+\gamma_4),$$

из которого приходим к невозможному заключению $A_{14} = A_{23} = 0$. Точно также, если $n = 3$, то

$$F = \alpha\beta - A_{13}\gamma_1\gamma_3 - A_{22}\gamma_2^2,$$

и мы приходим к невозможному равенству

$$A_{13}\gamma_1\gamma_3 + A_{22}\gamma_2^2 = A_{13}\lambda_1\lambda_3(\gamma_1 + \gamma_2)\gamma_3 + A_{22}(\gamma_1 + \gamma_2)^2.$$

Следовательно, $n < 2$; т.-е., вообще число подгрупп, в которых все φ_n отличаются лишь численным множителем не более двух, если только

$$f = \alpha^2 + \alpha(\gamma_i + \cdot \cdot \cdot \gamma_n) + \sum A_{ik}\gamma_i\gamma_k$$

$$f_1 = \beta^2 + \beta(\gamma_1 + \cdot \cdot \cdot \gamma_n) + \sum A_{ik}\gamma_i\gamma_k$$

13. Покажем теперь, что тот же вывод остается в силе и в общем случае, когда f и f_1 можно представить в виде:

$$f = \alpha^2 + \alpha(\gamma_1 + \cdot \cdot \cdot + \gamma_n) + \alpha S_o + \sum A_{ik}\gamma_i\gamma_k$$

$$f_1 = \beta^2 + \beta(\gamma_1 + \cdot \cdot \cdot + \gamma_n) + \beta S'_o + \sum B_{ik}\gamma_i\gamma_k \tag{76}$$

где $S_o = \sum\limits_h A_h^o\gamma_h$, $S_o^1 = \sum\limits_h B_h^o\gamma_h$, при чем $\left|A_h^o\right| \leqslant 1$, $\left|B_h^o\right| \leqslant 1$.

В таком случае уравнения стационарности для f и f_1 получат вид

$$F = \alpha\beta - \alpha S_o - \sum A_{ik}\gamma_i\gamma_k = 0, \quad F_1 = \alpha\beta - \beta S'_o - \sum B_{ik}\gamma_i\gamma_k = 0 \tag{77}$$

Поэтому можем положить:

$$\varphi_i = C_i(F + F_1) + \gamma_i S + \alpha S_i + \beta S'_i + \psi_i \tag{78}$$

где по прежнему $\sum\limits_i C_i = 1 \quad \sum\limits_i S_i = \sum\limits_i S'_i = \sum \psi_i = 0;$

и уравнение стационарности для φ_i сохраняет форму (60). Приравнивая 0 коэффициенты при α^3 в (60), мы получим теперь для всякого i

$$S_i(-c_1S_o + \gamma_1 + S_1, -c_2S_o + \gamma_2 + S_2, \cdot \cdot \cdot \cdot, -c_nS_o + \gamma_n + S_n) = 0 \tag{79}$$

Но очевидно также из уравнения стационарности для f

получим $S_o(-c_1S_o + \gamma_1 + S_1, \cdot \cdot \cdot, -c_nS_o + \gamma_n + S_n) = 0 \qquad (80)$

Поэтому, если положить $P_i = S_i - c_i S_o$,

то $P_i(\gamma_1 + P_1, \gamma_2 + P_2, \cdot \cdot \cdot, \gamma_n + P_n) = 0 \qquad (i = 1, 2 \cdot \cdot \cdot \cdot n)$ (81)

Таким образом формы P_i обладают свойством, что $\sum_h \lambda_h^i P_h = 0$,

где λ_h^i член $i^{ой}$ колонны и $h^{ой}$ горизонтали в таблице

$$\begin{array}{lll} A_1^1 - c_1 A_1^o + 1 & A_1^2 - c_2 A_1^o \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot A_1^n - c_n A_1^o \\ A_2^1 - c_1 A_2^o & A_2^2 - c_2 A_2^o + 1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot A_2^n - c_n A_2^o \\ A_3^1 - c_1 A_3^o & A_3^2 - c_2 A_3^o \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \\ A_n^1 - c_1 A_n^o \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & A_n^n - c_n A_n^o + 1 \end{array} \qquad (82)$$

Кроме того $\sum A_h^o (P_h + \gamma_h) = 0$

Разделим теперь члены каждой $h^{ой}$ горизонтали на $1 - A_h^o$ и предположим, что $\dfrac{\lambda_{h_1}^i}{1 - A_{h_1}^o}, \dfrac{\lambda_{h_2}^i}{1 - A_{h_2}^o}$ представляют два (для определенности) наибольших значения, которые у нас тогда получатся в $i^{ой}$ колонне.

В таком случае

$$(1 - A_{h1}^0) \sum_h \lambda_h^i P_h + \lambda_{h1}^i \sum_h A_h^0 (P_h + \gamma_h) = 0$$

откуда приравнивая 0 коэффициент при γ_{h1}

$$(1 - A_{h1}^0) \sum_h \lambda_h^i (A_{h1}^h - c_h A_{h1}^0) + \lambda_{h1}^i \left[\sum_h A_h^0 (A_{h1}^h - c_h A_{h1}^0) + A_{h1}^0 \right] = 0 \qquad (83)$$

и аналогичное равенство для h_2.

Замечая далее, что $\sum_h (A_{h1}^h - c_h A_{h1}^0) = - A_{h1}^0$,

преобразуем равенство (83) к виду

$$(1 - A_{h1}^0) \sum_h (\lambda_h^i - \lambda_{h1}^i)(A_{h1}^h - c_h A_{h1}^0) + \lambda_{h1}^i \left[\sum_h A_h^0 (A_{h1}^h - c_h A_{h1}^0) + (A_{h1}^0)^2 \right] = 0,$$

или, наконец,

$$\sum_h \left[(1 - A_{h1}^0) \lambda_h^i - \lambda_{h1}^i (1 - A_h^0) \right] (A_{h1}^h - c_h A_{h1}^0) = 0 \qquad (84)$$

Но так как с одной стороны $A^h_{h1} - c_h A^0_{h1} \geqq 0$, а множитель $(1 - A^0_{h1}) \lambda^i_h - \lambda^i_{h1} (1 - A^0_h) = 0$, при $h = h_1$ и при $h = h_2$, и отрицателен при остальных значениях h, то мы должны заключить, что при всех отличных от h_1 и h_2 значениях h, необходимо

$$A^h_{h1} - c_h A^0_{h1} = 0 \text{ и точно также } A^h_{h2} - c_h A^0_{h2} = 0.$$

Отсюда мы заключаем, что одно из значений h_1 и h_2 должно совпадать с i, и максимумы h_1ой и h_2ой колонны должны лежать в горизонталях с теми же номерами. Таким образом все формы P_h можно соединить по группам вида:

$$\frac{P_1 + \gamma_1}{\lambda_1} = \frac{P_2 + \gamma_2}{\lambda_2} \cdots = \frac{P_k + \gamma_k}{\lambda_k} = (1 - A^0_1) \gamma_1 + 1 - A^0_2) (\gamma_2 + \ldots + (1 - A^0_k) \gamma_k, \quad (85)$$

где $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots . \lambda_k = 1$. Аналогичный результат мы получили бы для

$$P_h' = S_h' - c_h S_0'.$$

Из этого основного результата легко вывести, что уравнение стационарности для φ_1 получает форму:

$$\begin{gathered} f \left\{ \lambda_1 \left[(1 - A^0_1) \varphi_1 + (1 - A^0_2) \varphi_2 + \ldots + (1 - A^0_k) \varphi_k \right] - \varphi_1 + c_1 (A^0_1 \varphi_1 + \ldots + A^0_k \varphi_k \right\} \\ + f_1 \left\{ \lambda^1_1 \left[(1 - B^0_1) \varphi_1 + \cdots\cdots + (1 - B^0_e) \varphi_e \right] - \varphi_1 + c_1 (B^0_1 \varphi_1 + \cdots + B^0_e \varphi^1_e) \right\} \\ + \varphi_1 (\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n) = 0 \end{gathered} \quad (86)$$

Составляя стационарные уравнения для φ_i, принадлежащих к той же группе относительно S, находим, приравнивая 0 коэффициенты при $\alpha^3 \beta$

$$\begin{gathered} \frac{\lambda_1}{c_1} = \frac{\lambda_2}{c_2} = \cdots = \frac{\lambda_k}{C_k} = \frac{1 - (A^0_1 c_1 + \cdots + A^0_k c_k)}{(1 - A^0_1) c_1 + \cdots + (1 - A^0_k) c_k} = \\ = \frac{1}{c_1 + c_2 + \cdots c_k} \end{gathered} \quad (87)$$

Поэтому, если $\sum\limits_1^k c_i A^0_i \gtreqq 0$, то $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 1$. Следовательно, $k = n$, т. к. в противном случае, остальные $c_i = 0$, что противоречит условию теоремы. Таким образом мы имеем только одну группу относительно S, за исключением случая, когда $\sum\limits_1^k c_i A^0_i = 0$. Но последнее равенство влечет за собой отсутствие в сумме $\sum\limits_{1}^{k} A_i^0 \varphi_i$ членов содер-жащих α. Поэтому в сумме $\sum\limits_{1}^{k} \psi_i(\varphi_1 \varphi_2, \cdot \cdot \varphi_n)$ не будет членов, содер-жащих α^2. Откуда заключаем, как и раньше, что во всех ψ_i, принад-лежащих к данной группе, отсутствуют произведения $\gamma_g \gamma_h$, где оба значка g и h больше k. Следовательно, для указанных значений g и h, $A_{gh} = B_{gh} = 0$, а потому число групп относительно S не превышает двух. Тоже самое получим и для S'. Наконец, при предположении, что φ_1 и φ_2 принадлежат к одной и той же группе относительно S и S', находим, что

$$(f + f_1)(c_2\varphi_1 - c_1\varphi_2) = c_2\varphi_1(\varphi_1\varphi_2, \cdot \cdot \varphi_n) - c_1\varphi_2(\varphi_1, \varphi_2, \cdot \cdot \varphi_n),$$

откуда, подобно предыдущему, убеждаемся, что $c_2\varphi_1 - c_1\varphi_2 = 0$.

Таким образом, все гибридные расы опять распадаются на число подгрупп, не превышающее четырех, для которых функции φ_i отли-чаются лишь численным множителем. Нетрудно показать, как и раньше, что число подгрупп в действительности не более двух. Следовательно, и самый общий случай приводится к случаю $n = 2$, рассмотренному в § 11, и теорема доказана.

14. Укажем вкратце некоторые выводы из нашего исследования. Замкнутый биотип, в котором каждое скрещивание может дать индивида любого класса, должен обладать свойствами, что пропорция индивидов различного рода, рождающихся от некоторого скрещивания, совершенно не зависит от скрещиваемых родителей. Несмотря на видимое различие родителей, свойства их половых клеток подчинены одному и тому же закону случайности. Если бы в данном случае наблюдалась бы все-таки корреляция между роди-телями и детьми, то причину этой корреляции нужно было бы искать только в различии влияния среды и условий отбора. Рас-сматриваемые биотипы, несмотря на внешнюю полиморфичность, по существу не отличаются от чистых рас. Можно было бы доказать, что скрещивание различных биотипов такого рода, вообще, подчиняется тем же законам, что и скрещивание чистых рас (формулы 17). Основ-ным вопросом является вопрос о скрещивании чистых рас. Как видно из доказанной в последней части теоремы[1]), если при скрещивании возни-кают различного рода гибриды, то возможны только 2 случая:

1) пропорция возникающих гибридов не зависит от скрещи-ваемых родителей (если родители сами гибриды, то некоторая часть

---

[1]) Случай, когда кроме гибридов могли бы получиться и индивиды родитель-ских классов, привел бы к соответствующему обобщению формул (14).

потомства, зависящая от рода родителей, принадлежит к чистым расам, но пропорция различных видов гибридного потомства одна и та же), в таком случае вся совокупность гидридов в целом следует закону Менделя, удовлетворяя, как видно из формул (52), основному соотношению $4ff_1 = (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdot \cdot \cdot + \varphi_n)^2$. Таким образом, обычное массовое статистическое наследование, не производящее дифференцировки между гибридами, констатировало бы существование элементарного закона Менделя, отметив лишь более или менее повышенную дисперсию.

2) Гибриды делятся на две существенно различные группы. Предполагая для простоты каждую группу однородной, оба эти гибридные класса представляют собой также чистые расы, характеризующиеся тем, что при взаимном скрещивании они, в свою очередь воспроизводят первоначальные чистые расы. Рассматриваемые 4 чистые расы образуют своебразную „кадриль", и закон их наследования, существенно отличающийся от Менделевского, я называю „кадрильным". В литературе я нашел лишь несколько спорных случаев (De Vries), подходящих к указанному закону, но необходимо было бы произвести более тщательную проверку и установить, применим ли здесь элементарный кадрильный закон или какая-нибудь его обобщенная форма.

Наконец, задача, которую мы решили при помощи формул (19) в частном случае простой Менделевской наследственности, указывает характер законов наследования сложного биотипа, включающего какое-угодно число чистых рас.

О проблеме равномерной темперации.

В. Л. Гончаров.

Существующая со времен Себастиана Баха и до сих пор почти исключительно употребительная скала музыкальных тонов (12-ти тонная темперация) в наше время представляется уже стеснительной. Только немногие из выдающихся современных композиторов не делают попыток выйти из ее рамок; другие же принуждены в широкой мере жертвовать точностью интонации для того, чтобы дать физическое воплощение звучаниям, осуществление которых недоступно современным инструментам. Распространенное представление об изобилии диссонансов в новейшей музыке не является, таким образом, предрассудком.

Обогащение звуковой палитры направлено, главным образом, по линии увеличения числа употребительных гармонических призвуков—обертонов: искусственное конструирование тембров с помощью гармонически-чистых тонов могло бы—в отдаленном будущем—явиться завершением этого пути. Пока что „высшие“ обертоны—11, 13 и даже 15 и 17 уже приемлются нашим сознанием и иногда (у Скрябина) составляют обычный материал звуковой ткани.

В следующих примерах, кроме порядка обертонов, я указываю (в долях полутона) абсолютную погрешность интонации при исполнении на фортепиано,

$\underline{\text{G}}$	Dis	A	cis	g	$\overline{\text{cis}}$	$\overline{\text{fis}}$	$\overline{\text{h}}$
7	11	1	5	7	5	13	9
0,31	0,49	0	0,14	0,31	0,14	0,60	0,04

(Скрябин, аккорд „Прометея“ ор. 60).

$\underline{\text{E}}$	E	H	gis	h	$\overline{\text{e}}$	$\overline{\text{gis}}$	$\overline{\text{ais}}$	$\overline{\overline{\text{dis}}}$	$\overline{\overline{\text{gis}}}$	$\overline{\overline{\text{ais}}}$	$\overline{\overline{\overline{\text{dis}}}}$	$\overline{\overline{\overline{\text{gis}}}}$	$\overline{\overline{\overline{\overline{\text{cis}}}}}$
1	1	3	5	3	1	5	11	15	5	11	15	5	13
0	0	0,02	0,14	0,02	0	0,14	0,49	0,12	0,14	0,49	0,12	0,14	0,60

(Скрябин, заключительное звучание „Vers la flamme“ ор. 72).

Погрешности достигают здесь четверти тона, что не может не быть оскорбительным даже для нашего (не столь уж взыскательного) европейского слуха.

Проблема нового строя,—а следовательно и нового инструмента,— в свое время весьма удачно разрешенная и потом основательно забытая, снова выступает перед нами.

Идеальным раскрепощением строя явилось бы изобретение „ультрахроматического" инструмента, который, будучи многоголосным и допуская импровизацию, обладал бы непрерывной скалой, т.-е. мог бы доставлять тоны любой высоты. Может быть, быстро развивающаяся техника сделает нам когда-нибудь этот подарок.

Но небесполезно рассмотреть и возможности более легко осуществимого выхода из Баховского компромисса, путем нового компромисса: равномерной температии с числом тонов в октаве более 12-ти.

В этой работе я имею в виду показать, какими соображениями может быть мотивирован рациональный выбор одной из таких „утонченных" темпераций. Вопрос приобретает и чисто-математический интерес, так как чрез посредство функции $\zeta(s)$ Riemann'а он оказывается связанным с аналитической теорией чисел.

Пусть дана система точек E на прямой. Требуется, возможно менее сдвинув эти точки на прямой, добиться того, чтобы система точек стала частью арифметической прогрессии с не очень маленькой разностью. Вот приблизительная формулировка проблемы темперации в самом общем виде.

Но эту проблему необходимо формулировать более точно.

Пусть дана прогрессия точек:

$$\cdots -n, \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots n, \cdots \qquad (P_0)$$

Введем функцию $\omega(x)$, представляющую отклонение точки от ближайшей точки прогрессии (P_0), ограничиваемую следующими свойствами: $\omega(x)$ — непрерывная, четная, периодическая с периодом 1, положительна при не целых значениях x, обращается в нуль при целых, возрастает в промежутках $(n < x < n + \frac{1}{2})$, убывает в промежутках $(n + \frac{1}{2} < x < n + 1)$. В частности, можно под $\omega(x)$ подразумевать:

1) отклонение в обычном смысле слова, определяемое равенствами

$$\omega(x) \equiv |x| \quad (|x| \leqslant \tfrac{1}{2})$$
$$\omega(x+1) \equiv \omega(x)$$

2) гармоническое отклонение, определяемое равенством

$$\omega(x) \equiv 1 - \cos 2\pi x.$$

Температии, в основу которых положены эти специальные определения функции $\omega(x)$, условимся называть **модулярной** и **гармонической** (соответственно).

Отклонение точки x от ближайшей точки прогрессии

$$\cdots a-nd, \cdots a-2d,\ a+d,\ a,\ a+d,\ a+2d, \cdots a+nd \cdots \qquad (P)$$

мы получим посредством перенесения начала координат в точку a и увеличения маштаба в d раз. Это будет

$$d\,\omega\left(\frac{x-a}{d}\right),$$

или, полагая $d=\frac{1}{t}$,

$$\frac{1}{t}\,\omega\left(t(x-a)\right).$$

Пусть дана система точек $E(x_\nu)$ на прямой: система может быть конечной или бесконечной, но исчислимой. Пусть каждой точке x_ν соответствует вес p_ν (>0). Ряд $\sum\limits_\nu p_\nu$, во всяком случае, будем предполагать сходящимся.

Составим сумму S из произведений отклонений точек системы от ближайших точек прогрессии (P) на соответственные веса:

$$S=\frac{1}{t}\sum_\nu p_\nu\,\omega\left(t(x_\nu-a)\right).$$

Отношение этой суммы к ее среднему значению

$$\overline{S}=\frac{1}{t}\sum_\nu p_\nu\,\overline{\omega}$$

(где $\overline{\omega}$ — среднее значение функции $\omega(x)$)—назовем **температационной функцией**:

$$T(a,t)=\frac{S}{\overline{S}}=\frac{\sum\limits_\nu p_\nu\,\omega\left(t(x_\nu-a)\right)}{\sum\limits_\nu p_\nu\overline{\omega}}$$

Т. к. знаменатель—положительное число, не зависящее от переменных a и t, то мы его отбросим и будем писать:

$$T(a,t)=\sum_\nu p_\nu\,\omega\left(t(x_\nu-a)\right).$$

Очевидно, T непрерывна и не отрицательна при каких угодно a и t. Мы убедимся, что в некоторых случаях эта функция очень энергично осциллирует.

Задачу темперации системы точек $E(x_\nu)$ с весами p_ν посредством функции $\omega(x)$ мы будем видеть в определении minimum'a minimorum темперационной функции $T(a, t)$ при t положительном и не превышающем заранее выбранного числа t_0. (Тривиальное решение $t=0$ в счет не идет). Нетрудно убедиться, что, если расстояния точек $x_{\nu_1} x_{\nu_2}$ не имеют общей меры, то искомый minimum отличен от нуля.

Специализируя условия, мы получаем ряд математических задач. Интересно заметить следующие обстоятельства (для простоты фиксируем a priori начальный член прогрессии: $a=0$).

1) Гармоническая темперация геометрической прогрессии точек $x_\nu = \alpha^\nu$ с весами $p_\nu = \beta^\nu$ $(0 < \beta < 1;\ \nu = 1, 2 \cdot \cdot \cdot)$ приводит к темперационной функции не имеющей ни в одной точке производной (при $\alpha\beta > 1$), указанной Weierstrass'ом:

$$f(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta^\nu \cos 2\pi t \alpha^\nu$$

2) Любая функция, разлагающаяся в данном промежутке в ряд Фурье, при допущении отрицательных весов, может быть рассматриваема, как темперационная функция прогрессии $x_\nu = \nu$ $(\nu = 1, 2 \cdot \cdot \cdot)$ (гармоническая темперация).

Перейдем к задаче темперации музыкального строя. Пусть тон определенной высоты принят за основной. Если числа его колебаний в секунду примем за единицу, то числа колебаний всех „родственных“ тонов выразятся всеми рациональными числами.

$$i/j \quad (i, j = 1, 2 \cdot \cdot \cdot)$$

В выборе весов заключается известная произвольность. Проще всего принять за вес тона i/j число

$$p_{ij} = \frac{1}{i^\sigma j^\sigma},$$

где непременно $\sigma > 1$ (для сходимости ряда); в остальном же выбор σ зависит от того, какое преимущество в смысле желательности точной интонации мы отдаем более „родственным“ тонам по сравнению с менее „родственными“. Эту систему тонов мы желаем подвергнуть темперации посредством ряда равноотстоящих (в смысле равенства интервалов) тонов, числа колебаний которых, очевидно, составляют геометрическую прогрессию. Перейдем к логарифмам. Тогда получим систему $E(\lg {}^i/_j)$ с весами $p_{ij} = i^{-\sigma} j^{-\sigma}$ $(i, j \geq 1)$, которую т ребуется темперировать равномерно т.-е. с помощью арифметической прогрессии.

В таком случае температионная функция принимает замечательный вид. Именно (пользуясь гармонической температией и отбрасывая постоянное слагаемое и положительный множитель) получаем:

$$-T(a, t) = \sum_{i,j} \frac{\cos 2\pi t(\lg {}^i/_j - a)}{i^\sigma \; j^\sigma} = \sum_{i,j} \frac{\cos \; \tau(\lg {}^i/_j - a)}{i^\sigma \; j^\sigma},$$

где $\tau = 2\pi t$

Далее:

$$-T(a, t) = \cos \tau a \sum_{i,j} \frac{\cos \tau \lg {}^i/_j}{i^\sigma \; j^\sigma} + \sin \tau a \sum_{i,j} \frac{\sin \tau \lg {}^i/_j}{i^\sigma \; j^\sigma} =$$

$$= \cos \tau a \sum \frac{\cos \tau \lg {}^i/_j}{i^\sigma \; j^\sigma}$$

$$\text{Но} \quad \sum_{i,j} \frac{\cos \tau \lg {}^i/_j}{i^\sigma \; j^\sigma} = \left| \sum_n \frac{1}{n^{\sigma + i\tau}} \right|^2 = \left| \sum_n \frac{1}{n^s} \right|^2 = \zeta(s)^2,$$

где ζ (s) — введенная B. Riemann'ом функция

$$\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s} \qquad (s = \sigma + i\,\tau),$$

известная своими приложениями в аналитической теории чисел. Ряд Dirichlet, которым она определяется, сходится в полуплоскости $\sigma > 1$. Итак:

$$-T(a, t) = |\zeta(s)|^2 \cos at$$

Т. к., как известно, функция ζ (s), будучи голоморфна в полуплоскости $\sigma > 1$, не имеет в ней нулей, то при определенном t, чтобы T имело minimum, выберем

$$a = 0.$$

$$\text{Тогда} \qquad -T(0, t) = |\zeta(s)|^2$$

Итак, при заранее установленном σ (т.-е. на прямой, параллельной мнимой оси в комплексной плоскости $s = \sigma + i\tau$) и при τ не превышающем некоторого определенного предела, надо искать точки s, в которых модуль ζ(s) будет maximum.

При не гармонической температии результаты получаются более сложные. Так, при модулярной температии:

$$a = 0$$

$$-\frac{\pi^2}{2} T(0, t) = \sum_n \frac{1}{n^2} \left| \zeta^2(\sigma + in\tau) \right|.$$

В наиболее общем случае нельзя быть даже уверенным в том, что $a = 0$.

Можно, оставаясь при гармонической температии, видоизменить выбор весов. Именно, пусть имеем ряд чисел

$$\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \varkappa_3 \cdot \cdot \cdot \cdot \geqslant \varkappa \geqslant \cdot \cdot \cdot > 0,$$

убывающих достаточно быстро, чтобы употребляемые в дальнейшем ряды были сходящимися, в остальном произвольных. Пусть выбрано и число $\sigma > 1$. Всю систему точек E разобьем на классы. К первому классу отнесем все обертоны и унтертоны основного тока (точки $\lg n_1$ и $\lg 1/n_1$ с весами $\varkappa_1/n_1^\sigma$); ко второму—все обертоны и унтертоны тонов первого класса (точки $\lg n_1 n_2$, $\lg n_1/n_2$, $\lg n_2/n_1$, $\lg 1/n_1 n_2$ с весами $\varkappa_2/n_1^\sigma n_2^\sigma$); вообще к m-ому классу отнесем все обертоны и унтертоны m—1-го класса (точки

$$\lg n_1 n_2 \cdot \cdot \cdot n_m,\ \lg \frac{n_1 n_2 \cdot \cdot \cdot n_{m-1}}{n_m}, \cdot \cdot \cdot \lg \frac{n_2 \cdot \cdot \cdot n_m}{n_1},\ \lg \frac{n_1 \cdot \cdot \cdot n_{m-2}}{n_{m-1} n_m} \cdot \cdot \cdot$$

$$\left. \lg \frac{1}{n_1 n_2 \cdot \cdot \cdot n_m} \text{ с весами } \frac{\varkappa_m}{n_1^\sigma n_2^\sigma \cdot \cdot \cdot n_m^\sigma} \right).$$

Числа n_i пробегают все целые положительные значения. Одна и та же точка рассматривается, как принадлежащая различным классам и даже как принадлежащая бесконечное число раз одному и тому же классу.

Составим темперационную функцию:

$$T = \sum_1^\infty T_m,$$

где T_m — та часть T, которая связана с точками m-го класса. Именно

$$-T_m = \varkappa_m \sum \sum \frac{\cos\tau(\pm \lg n_1 \pm \lg n_2 \cdot \cdot \cdot \pm \lg n \ \ - a)}{n_1^\sigma n_2^\sigma \cdot \cdot \cdot n_m^\sigma}$$

$$= \varkappa_m \cos a\tau \sum \sum \frac{\cos\tau(\pm \lg n_1 \ \ \cdot \cdot \pm \lg n_m)}{n_1^\sigma n_2^\sigma \cdot \cdot \cdot n_m^\sigma} +$$

$$\left. + \varkappa_m \sin a\tau \sum \sum \frac{\sin\tau(\pm \lg n_1 \pm \cdot \cdot \cdot \mp \lg n_m}{n_1^\sigma n_2^\sigma \cdot \cdot \cdot n_m^\sigma} \right),$$

причем в двойных суммах первая распространяется на все целые положительные значения $n_1, \cdot \cdot \cdot n_m$, вторая — на все комбинации знаков $\pm$.

Обозначим:

$$C_m = \sum_{\pm} \cos(\pm\theta_1 \pm \cdot \cdot \cdot \pm \theta_m) \quad S_m = \sum_{\pm} \sin(\pm\theta_1 \pm \cdot \cdot \quad \pm \theta_m).$$

Очевидно $S_m = 0$. Что же касается C_m, то

$$C_m = \sum_{\mp} \cos(\pm\theta_1 \pm \cdot \cdot \pm \theta_m) = \sum_{\mp} \cos(\pm\theta_1 \pm \cdot \cdot \pm \theta_{m-1} + \theta_m) +$$

$$+ \sum_{\mp} \cos(\pm\theta_1 \pm \cdot \cdot \pm \theta_{m-1} - \theta_m) =$$

$$= 2 \sum_{\mp} \cos(\pm\theta_1 \pm \cdot \cdot \pm \theta_{m-1}) \cos\theta_m = 2\, C_{m-1} \cos\theta_m,$$

так что $C_m = 2^m \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cdot \cdot \cdot \cos\theta_m$.

Вернемся к T_m:

$$-T_m = \varkappa_m \cos a\tau \sum_{n_1 .. n_m} \frac{2^m \cos\tau \lg n_1 \cdot \cdot \cdot \cos\tau \lg n_m}{n_1{}^\sigma \cdot \cdot \cdot n_m{}^\sigma} =$$

$$= 2^m \varkappa_m \cos a\tau \left(\sum \frac{\cos\tau \lg n}{n^\sigma} \right)^m = 2^m \varkappa_m \cos a\tau . \left[R\zeta(s) \right]^m$$

($R\,a =$ вещественная часть a), так что

$$-T = -\sum_m T_m = \underset{m}{\qquad} \varkappa_m u^m \cos\tau, \text{ где } u = 2R\zeta(s).$$

Если $R\zeta(s) > 0$ (что, наверное, имеет место при $\sigma \geqslant 2$), то, очевидно, придется взять $a = 0$ и искать τ, придающее maximum $R\zeta(s)$ на прямой, параллельной мнимой оси,—независимо от чисел $\varkappa_m$.

Таким образом, при первой системе выбора весов приходится искать maxima $|\zeta(s)|$ на прямой σ=const., при второй—maxima $R\zeta(s)$ на той же прямой.

Переходя к вычислениям, заметим, что на значения τ должно быть на практике наложено еще одно важное ограничение: τ должно быть кратным $\frac{2\pi}{\lg 2}$. Это вытекает из того, что при конструкции скалы мы вряд ли откажемся от чистых октав, так что темперация должна непременно делить октаву на целое число частей (N), Поэтому

$$\lg 2 = N\,d = \frac{N}{t} = \frac{2\pi N}{\tau}, \text{ откуда } \tau = \frac{2\pi N}{\lg 2}.$$

Что касается пределов, в которых может изменяться число N, то можно считать обязательным условие

$$N < 60;$$

даже темперация $N = 40$ уже была бы весьма громоздкой и мало удобной. Ведь все же приходится иметь в виду исполнителя-импровизатора, физические способности которого очень ограничены.

Известное преобразование дает:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

где произведение распространяется на все простые числа.

Далее

$$-\lg \zeta(s) = \sum_p \lg\left(1 - \frac{1}{p^s}\right),$$

$$\lg \zeta(s) = \sum_p \sum_n \frac{1}{np^{ns}},$$

и разделяя вещественную и мнимую части и подставляя значение τ: получим:

$$\lg \zeta(s) = \sum_p \sum_n \frac{\cos 2\pi n \frac{\lg p}{\lg 2} N}{np^{n\sigma}}$$

$$\arg \zeta(s) = -\sum_p \sum_n \frac{\sin 2\pi n \frac{\lg p}{\lg 2} N}{np^{n\sigma}}$$

Эти формулы особенно удобны для вычислений. Из них мы получим и

$$R\left[\zeta(s)\right] = \left|\zeta(s)\right| \cos \arg \zeta(s).$$

Заметим, что

$$\arg \zeta(s) < \sum_p \sum_n \frac{1}{np^{n\sigma}} = -\sum_p \lg\left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right) = \lg \zeta(\sigma).$$

Поэтому при σ весьма больших $\arg \zeta(s)$ мало отличается от нуля, $\cos \arg \zeta(s)$ близко к единице, так что оба способа выбора весов дают практически почти одинаковые результаты.

Если σ весьма велико, то главную часть ряда, представляющего $\lg |\zeta(s)|$, дает член

$$\frac{\cos 2\pi \frac{\lg 3}{\lg 2} N}{3^\sigma}$$

Определяя наибольшие значения его при целых N, мы должны добиваться, чтобы $\frac{\lg 3}{\lg 2}N$ возможно меньше отличалось от целого числа, а это сводится к разысканию знаменателей подходящих дробей к $\frac{\lg 3}{\lg 2}$. Эти подходящие дроби таковы:

$$1,\ 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{8}{5},\ \frac{19}{12},\ \frac{65}{41},\ \frac{84}{53},\ \frac{485}{306}\ \ldots$$

Температура $N = 5$ составляет так называемую „сиамскую" гамму.

Температура $N = 12$ — наша общеупотребительная температура.

Температура $N = 53$ была указана Helmholtz'ем. Она обладает тем свойством, что и член

$$\frac{\cos 2\pi \frac{\lg 5}{\lg 2} N}{5^{\sigma}}$$

в ней оказывается весьма малым.

Температура $N = 41$, насколько мне известно, никем предложена не была.

Нет основания, однако, принимать σ бесконечно большим — это равносильно игнорированию всех обертонов, кроме простейшего — квинты.

Для определенности мы положим $\sigma = 2$, т.-е. будем считать вес обертона обратно пропорциональным квадрату его порядка.

Чтобы ориентироваться в относительных преимуществах и недостатках различных температур, в дальнейшем составлена табличка, охватывающая значения N от 12 до 60, и приблизительно оценивающая 5 главных членов:

$$\frac{\cos 2\pi \frac{\lg p}{\lg 2} N}{p^{\sigma}} \quad (p = 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13)\ ^{1)}.$$

Именно, числа $\frac{\lg p}{\lg 2}N$ разделены на 5 классов, причем к 1-му классу отнесены те из них, которых первый десятичный знак после запятой есть 0 или 9, ко 2-му — 1 или 8, к 3-му — 2 или 7, к 4-му — 3 или 6, наконец, к 5-му — 4 или 5. Эти классы и указываются в табличке.

---

1) Члены с $p > 13$ просто отбрасываются. Это означает, что вес тона i/j принимается равным нулю, если i или j содержат множителем простое число > 13. Получаемые результаты должны рассматриваться, как приближенные.

	P						P						P				
N	3	5	7	11	13	N	3	5	7	11	13	N	3	5	7	11	13
12	1	2	4	5	5	29	1	4	5	4	4	46	2	2	2	2	3
13	5	2	5	1	2	30	5	4	3	3	1	47	5	2	1	5	1
14	2	5	4	5	2	31	2	1	1	3	3	48	1	5	3	1	4
15	3	2	2	2	5	32	4	4	2	3	5	49	4	3	5	5	4
16	4	2	1	4	3	33	3	4	4	2	2	50	3	1	4	1	1
17	1	5	3	2	1	34	2	1	5	4	2	51	3	5	2	5	3
18	5	3	5	3	4	35	5	3	3	1	5	52	4	3	1	2	5
19	2	2	4	3	4	36	1	5	1	5	3	53	1	1	3	4	2
20	4	5	2	2	1	37	4	1	2	1	1	54	5	4	5	2	2
21	3	3	1	4	3	38	3	3	4	5	4	55	2	3	5	3	5
22	2	1	3	2	5	39	3	5	5	1	4	56	3	1	3	3	3
23	5	5	5	5	2	40	4	2	3	4	1	57	4	4	1	2	1
24	1	3	4	1	2	41	1	2	2	2	3	58	2	4	2	4	4
25	4	1	2	5	5	42	5	5	1	3	5	59	5	1	4	2	4
26	2	4	1	1	3	43	2	2	3	3	2	60	1	4	5	5	1
27	3	4	3	5	1	44	3	2	5	3	2						
28	4	1	4	2	4	45	3	5	4	4	5						

Внимательное рассмотрение таблички приводит нас к наиболее интересным темперациям: $N = 31$, 41 и 53. К ним прибавим употребительную $N = 12$ (по полутонам) и $N = 24$ (по четвертям тонов), а также для контраста — как одну из плохих темпераций — $N = 42$.

Вот результаты выкладки:

N	31	41	53	12	24	42
$\lvert\zeta(s)\rvert$	1,523	1,547	1,564	1,501	1,477	1,179

$R\,\zeta(s)$ только тысячными долями отличается от $\lvert\zeta(s)\rvert$. К этому добавим, что при любом τ, соответствующем целому N:

$$\lg\frac{16}{9} - \lg\zeta(2) = \sum_{n}\frac{1}{n.\,4^n} - \sum_{p\geq 3}\sum_{n}\frac{1}{np^{2n}} < \lg\lvert\zeta(2+i\tau)\rvert < \sum_{p,n}\frac{1}{np^{2n}} = \lg\zeta(2),$$

т. е.

$$1{,}079\ldots = \frac{16}{9\,\zeta(2)} < \lvert\zeta(2+i\tau)\rvert < \zeta(2) = 1{,}644\ldots$$

(пределы не достигаются).

Эти цифры говорят, что темперации 53 и 41 имеют безусловные преимущества в теоретическом отношении, однако, несомненно, слишком громоздки и вряд ли будут пользоваться успехом на практике. Напротив, темперации 24 и 31 требуют увеличения числа клавиш всего лишь в 2—$2^1/_2$ раза и, кроме того, обладают практическими удобствами. Укажу лишь на то, что обе они очень легко позволяют сохранить преемственную связь с 12-ти тонной температией как в смысле устройства клавиатуры, так и в смысле нотации.

Вот каковы, наконец, абсолютные прогрешности простейших обертонов в рассмотренных температиях, выраженные в тысячных долях полутона.

N	3	5	7	11	13
31	52	8	11	94	111
41	3	59	33	46	80
53	1	14	47	79	28
12	20	137	312	487	405
24	20	137	188	13	95
42	123	137	26	85	120

В температии 31, как видно, сравнительно нечистой оказывается квинта. Ее погрешность, в $2^1/_2$ раза превышая погрешность квинты же в температии 12,—почти в 3 раза, однако, меньше чем погрешность терции в температии 12. Повидимому, с этим недостатком, за неимением лучшего выбора, можно было бы мириться.

Очень желательно попытаться применить температию 24 и особенно 31 к конструкции фортепиано. Гармоническое обогащение инструмента не только послужит стимулом к оживлению творческой деятельности композиторов, но и даст возможность в новом освещении взглянуть на музыку недавнего прошлого.

Résumé

Sur la température uniforme.

On part d'un problème mathématique suivant: étant donné un ensemble de points E sur une droite (fini ou dénombrable), il faut déterminer une répartition de points coïncidants avec ceux d'une progression arithmétique à différence bornée inférieurement et éloignés le moins possible des points de l'ensemble donné (la „distance généralisée" et les „poids" étant donnés à priori). La méthode, liée à celle des moindres carrés, mène à considérer la fonction (dite de température), oscillant en général assez fort, et dont il s'agit de déterminer les minima dans un intervalle fini. (Les conditions initiales particulières nous donnent par exemple la fonction bien connue de Weierstrass n'ayant pas de dérivée).

Ce résultat est appliqué à la recherche des températions des instruments musicaux plus fines que celle de S. Bach. En spécifiant convenablement les conditions initiales on est conduit á la détermination des maxima soit du module soit de la partie réelle de la fonction de Riemann ζ (s) sur une droite σ=const. Le calcul montre que (outre la température 53 connue depuis longtemps) les températions 31, 41, 24 sont à regarder comme préférables.

Изостатический слой с точки зрения теории упругости.

Б. Герасимович.

§ 1. Изостатическая гипотеза.

В основании изостатической теории строения ближайшего к поверхности слоя земли (будем называть его корою) лежит предположение о том, что внутри его массы расположены симметрично по отношению к рельефу земной поверхности—в том смысле, что под континентами и горными массивами имеет место относительное уменьшение плотности коры, наоборот, под океаническими бассейнами эта плотность больше. К этой идее о неравенствах распределения масс внутри коры, компенсирующих неравенства рельефа, можно подойти разными путями.

Она зародилась в связи с теорией Lowthian'a Green'a о тетраэдрической форме твердого ядра земли—реальное же значение она получила благодаря результатам определения тяжести, указавших на существование внутри коры неравенств, компенсирующих в значительной части неравенства тяжести, являющиеся следствием существования земного рельефа. Таким образом, к изостатической теории мы подходим, логически развивая данные геодезии. Однако, мы можем идти и другим путем. Еще в 1882 г. G. Darwin[1]), вычисляя разрывные силы, развиваемые внутри однородной земли весом неравенств ея рельефа, нашел их лежащими около тех критических значений, при переходе через которые происходит разрыв почти всех известных нам материалов. Вывод G. Darwin'a, не оставшийся, впрочем, без возражений принципиального характера, заставил, однако, думать, что в основе его лежала неправильная предпосылка об однородности земной коры, что, введя компенсирующее влияние внутренних неравенств, можно добиться значительного уменьшения соответствующих разрывных сил, вызываемых неравенствами рельефа.

Весь вопрос заключается в том, каков закон распределения масс внутри коры.

---

[1]) Philos. Trans. Vol 173.

Конечно, наблюденные значения тяжести не позволяют нам сделать заключения о законе распределения плотности в коре, ибо одним и тем же потенциалом на поверхности земли может обладать бесконечное число систем распределения масс внутри коры. Однако, новые предположения, чисто физического характера, делают этот вопрос более определенным.

Так, при определенных гипотезах, на основании уклонений отвеса, Hayford нашел толщину изостатического слоя равной 113 км., Helmert из наблюдении тяжести—118 км. Нечего, конечно, говорить, о том, что результаты эти чрезвычайно гипотетичны и неточны.

Допуская полную компенсацию тяжести рельефа, т.-е. идеальную изостазию, нужно принять два предположения об изостатическом слое.

Во первых: средняя поверхность земли (отвлекаясь от сфероидальности ее) есть поверхность уровня и, во вторых, такою же поверхностью является сферическая поверхность, ограничивающая изостатический слой „снизу". Эти два предположения, конечно, не позволяют нам определить строго аналитически закон изменения плотности в коре; однако, как я покажу, они допускают вычисление первых двух членов в разложении плотности по степеням расстояния от внутренней границы изостатического слоя.

Результат G. Darwin'a, с точки зрения теории изостазии, был пересмотрен Love [1]). Love подчиняет потенциал неравенств тому условию, что он равен нулю на обоих ограничивающих слой поверхностях; на внутренней поверхности, кроме того, равна нулю и производная этого потенциала. Эти условия, конечно, не определяют потенциала внутри слоя,—поэтому Love принимает для него совершенно произвольную функцию, удовлетворяя поставленным условиям введением соответствующих множителей. Получив отсюда аналитически полный, но произвольный закон распределения масс внутри коры, Love, принимая, что на внутренней поверхности слоя неравенства давления равны нулю, равно как и касательная упругая сила, находит разрывные силы во много раз меньшие тех, которые вычислил G. Darwin—величина их, при самых смелых предположениях о прочности материалов коры, вполне обеспечивает устойчивость упругого равновесия земного шара. Результат Love очень интересен; однако, то обстоятельство, что он пользуется произвольным законом распределения масс, по существу, значительно уменьшает ценность вывода. Может, например, случиться, что действительный закон изостазии формально не обеспечивает устойчивого равновесия, что возможность последнего не есть следствие изостазии, но других, не учтенных ни Darwin'ом, ни Love факторов. Поэтому, представляется важным показать, что упругое равновесие не только допускается, как возможность, при принятой гипотезе изостазии,

---

[1]) Some problems of geodynamics, гл. II. Cambridge. 1911 г.

благодаря свободе выбора между различными законами распределения масс, но есть необходимое следствие того приближенного закона, который вытекает из основных посылок изостатической теории.

Таким образом, наша задача будет заключаться в приближенном определении закона распределения масс внутри коры, а затем вычислении самых разрывных упругих сил.

§ 2. О законе распределения плотности внутри земной коры.

Мы будем делать об изостатическом слое следующие предположения:

Неравенство земного рельефа мы рассматриваем как некоторое распределение масс на поверхности сферической земли радиуса а. Это неравенство мы мыслим гармоническим, т.-е. выражающимся рядом типа $\varrho_1 \Sigma h_n S_n$, где ϱ_1 плотность горных пород, S_n - шаровая функция n порядка, h_n - амплитуда соответствующего неравенства.

Как показывает гармонический анализ земного рельефа для малых n (1, 2, 3), S_n мало зависит от угла долготы, так что мы можем считать эту функцию зональной, причем, разумеется, полюса неравенств различных порядков не совпадают [1]). Плотность неравенства будем принимать равным средней плотности коры.

Изостатический слой построен следующим образом. Он соединяет в себе две системы распределения масс. Во первых—постоянную плотность ϱ_1 (считаем ее независимой от радиуса в виду тонкости слоя) и, во вторых, плотность ϱ' — функцию радиуса и полярного угла (по отношению к оси соответствующ. шаровой функции) — последнее распределение таково, что компенсирует собой совершенно в изостатическом смысле поверхностное неравенство.

Таким образом, плотность внутри слоя будет

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho' = \varrho_1 + \sum A_n(r) S_n \qquad \ldots . [A]$$

где A_n (r) функция только радиуса, S_n - зональная шаровая функция.

Пусть радиус земли—а, радиус внутренней поверхности изостатического слоя — x, между $r = 0$ и $r = x$ распределение масс есть функция одного r; — эту область, в противоположность коре, будем называть ядром.

Основная гипотеза изостазии заключается в том, что

1) Поверхность $r = a$ изопотенциальна,

2) Поверхность $r = x$ изопотенциальна.

---

[1]) По Love (Proc. R. Soc. London 1908 г.) максимум S_1 около точки $\varphi = +23^0$; $\lambda = 30^0$ (от Гринв.); максимум S_2 около $\varphi = -75^0$, $\lambda = 15^0$; максимум S_3 около $\varphi = +15^0$; $= 35^0$. Ампл. h_n около 2 кл.

Как следствие этого, мы, пренебрегая квадратом толщины коры, находим в согласии с гипотезой геодезистов, что сумма гармонических масс внутри вертикального столба от $r = x$ до $r = a + \Sigma h_n S_n$ равна нулю.

Определим потенциал на точку коры двух неравенств—поверхностного и об'емного. Потенциал поверхностного на сфере распределения масс $\varrho_1 \Sigma h_n S_n$, если ограничиться неравенством только n порядка, на внутреннюю точку, как известно, выражается формулой [1])

$$V_s = \frac{4\pi\gamma r^n \varrho_1 h_n S_n}{(2n+1)a^{n-1}}$$

где γ—постоянная тяготения. Формула эта действительна и для самой поверхности.

Об'емное распределение плотности ϱ' дает потенциал на ту же внутренюю точку слоя r для n-й шаровой функции [2])

$$V^1 = \frac{4\pi\gamma S_n}{(2n+1)}\left[r^n \int_r^a s^{-n+1} A_n(s)\,ds + r^{-n-1}\int_x^r s^{+n+2} A_n(s)\,ds\right].$$

Если V_0 есть потенциал на ту же точку ядра и постоянного распределения плотности ϱ_1 в коре, то полный потенциал в данной точке слоя:

$$V = V_0 + V^1 + V_s.$$

причем V_0 от полярного угла не зависит. Если положить:

$$V_s = W_s S_n$$
$$V^1 = W^1 S_n$$
$$V = V_0 + (W^1 + W_s) S_n$$

то изостатическая гипотеза выразится равенствами

$$W_s + W^1 = 0 \quad \text{на } r = a \tag{1}$$
$$W_s + W^1 = 0 \quad \text{на } r = x \tag{2}$$

Если бы слой был бесконечно тонок, потенциал гармонических масс на точку ядра равнялся бы нулю, по смыслу теории притяжения (δ) тонкого шарового слоя на внутреннюю точку. Предполагая функцию $A_n(r)$ непрерывной, мы должны положить $A_n(x) = 0$, а если так, то и при конечной толщине коры, потенциал гармонических масс на точки

[1]) Tomson's Natural philosophy, II p. 84.

[2]) Tomson's. Natural philosophy, II. p. 88.

ядра будет нулем. В самом деле, если U_0 потенциал в центре шара радиуса x от масс, лежащих вне него, если U его значение в точке поверхности $r=x$, то, по теореме Гаусса о среднем потенциале, имеем

$$U_0=\int\frac{U\,d\sigma}{4\pi x^2}$$

где интегрируем по сфере. В нашем случае гармонические массы лежат вне сферы радиуса x, и потенциал от них на поверхности ее есть нуль; равен нулю, следовательно, и потенциал на центр сферы, и, по свойству гармонических функций, он будет нулем везде внутри ядра. Таким образом, гармонические неравенства не влияют на распределение масс внутри ядра.

Наша задача заключается в определении $A_n(r)$. Предположим, что эта функция разложима в ряд по степепям $y=r-x$, т.-е. расстояния от внутренней поверхности коры. Тогда

$$A_n(r)=\varrho_1\left[\alpha_n y+\beta_n y^2+\gamma_n y^3+\cdots\right].$$

Условие (1) дает:

$$\int_x^a r^{n+2}A_n(r)\,dr=-h_n a^{n+2}\varrho_1.$$

Условие (2) дает:

$$\int_x^a r^{-n+1}A_n(r)\,dr=-h_n a^{-n+1}\varrho_1.$$

Эти уравнения позволяют нам определить два члена в разложении $A_n(r)$. Положим:

$$a-x=l$$

где l толщина слоя.

Преобразуя интегралы к переменному y, и ограничиваясь при интеграции низшими степенями l, допускающими определение α_n, β_n, из первого уравнения получаем:

$$x^n\left[\alpha_n x^2\frac{l^2}{2}+\frac{(n+2)\,\alpha_n x\,l^3}{3}+\beta_n\frac{x^2 l^3}{3}\right]=-h_n a^{n+2}.$$

Второе уравнение дает:

$$x^{-n-1}\left[\alpha_n x^2\frac{l^2}{2}-\frac{(n-1)\,\alpha_n x\,l^3}{3}+\beta_n\frac{x^2\,l^3}{3}\right]=-h_n a^{-n+1}.$$

Положим:

$$\alpha'_n = \alpha_n\, a;\ \beta'_n = \beta_n\, a^2;\ t = \frac{1}{a},\ h'_n = \frac{h_n}{a},\ \text{т.-е.}$$

$$A_n(r) = s_1\left[\alpha'_n \frac{y}{a} + \beta_n' \frac{y^2}{a^2} + \cdots\right] \cdots [B]$$

Тогда, преобразуя полученные результаты, имеем:

$$\alpha'_n\left[\frac{t^2}{2} - \frac{(n+2)}{6} t^3\right] + \beta'_n \frac{t^3}{3} = -h'_n$$

$$\alpha'_n\left[\frac{t^2}{2} - \frac{(n+2)}{3} t^3\right] + \beta'_n \frac{t^3}{3} = -h'_n\left[1 - (n+1)\,t + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n+1)}{2} t^2 - \frac{n(n^2-1)}{6} t^3 + \cdots\right].$$

И отсюда:

$$\alpha'_n \frac{(n+2)}{6} t^2 = -h'_n\left[(n+1) - n(n+1)\,t/2 + \frac{n(n^2-1)}{6} t^2 + \cdots\right].$$

$$\beta'_n \frac{t^3}{3} = h'_n\left[\frac{2n+1}{n+2} - \frac{(n+1)(5n+4)}{2(n+2)} t + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2(n+2)} t^2 - \frac{n(n^2-1)}{6} t^3 - \cdots\right]$$

В частных случаях:

При $n = 1$ $\quad \alpha'_1 \frac{t^2}{2} = -h'_1(2 - t);\ \frac{\beta'_1}{3} t^3 = h'_1(1 - 3t + t^2)$

при $n = 2$ $\quad \alpha'_2 \frac{t^2}{3} 2 = -h'_2(3 - 3t + t^2);\ \beta'_2 \frac{t^3}{3} =$

$$= h'_2\left[\frac{5}{4} - \frac{21}{4} t + \frac{15}{4} t^2 - t^3\right].$$

При $n = 3$ $\quad \alpha'_3 t^2 \frac{5}{6} = -h'_3(4 - 6t + 4t^2);\ \beta^1_3 \frac{t'^3}{3} =$

$$= h'_3\left[7/5 - \frac{38}{5} t + \frac{42}{5} t^2 + 4t^3\right].$$

По данным геодезии $l = 120$ км.. т.-е. t около $1/50$. Далее, без ощутительной погрешности можно принять $h_1 = h_2 = h_3 = 2$ км., т.-е.

$h'_1 = h'_2 = h'_3 = \frac{1}{3180}$ и тогда выражение приближенного закона плотности в коре будет:

$$\begin{aligned}
n=1 \quad \varrho &= \varrho_1 \left[1 + \left(-3.1 \frac{y}{a} + 117 \frac{y^2}{a^2} + \cdots \right) S \right] . \\
n=2 \quad \varrho &= \varrho_1 \left[1 + \left(-3.5 \frac{y}{a} + 86 \frac{y^2}{a^2} + \cdots \right) S_2 \right] \quad [C]. \\
n=3 \quad \varrho &= \varrho_1 \left[1 + \left(-3.8 \frac{y}{a} + 140 \frac{y^2}{a^2} + \cdots \right) S_3 \right] .
\end{aligned}$$

Полученный ряд сходится у поверхности довольно плохо, при малых y он сходится хорошо. Ясно, что поверхности равной плотности идут симметрично по отношению к рельефу, являясь его искаженным зеркальным отражением. Различие плотности у полюса и экватора неравенства очень мало — оно максимально у самой поверхности и равно для $n = 2$ лишь $0.05\varrho_{,}$, где $\varrho_{,}$ — средняя плотность коры.

Итак, точный закон изменения плотности в коре, конечно, остается неизвестным, однако, сделанные выше предположения позволили нам определить его приближенно, в смысле двух первых членов предполагаемого сходящегося ряда. Этих сведений для даль йшего анализа будет достаточно.

§ 3. Влияние изостазии на моменты инерции земного сфероида.

Как известно, между значением основной функции моментов инерции земного сфероида $\frac{A - C}{C}$, к которому приводит гидростатическая теория строения земли, и значением, полученным из наблюдений (посредством постоянных прецессии и нутации) существует различие, большее, чем этого можно было бы ожидать [1]). Такое же, но значительно большее различие существует и для $\frac{A - C}{C}$ луны, получаемого по гидростатической теории и из наблюденных коэффициентов либрации, последнее Laplace об'яснял влиянием горных неравенств луны на ее моменты инерции. Посмотрим, можно ли об'яснить эту невязку для земли существованием изостатических неравенств.

Нетрудно, однако, видеть, что главные моменты инерции гармонических неравенств равны нулю. В самом деле, центр тяжести неравенств совпадает с центром шара. Главной осью, следовательно, будет ось полярная и любая ось в экваториальной плоскости соответствующего

---

[1]) Poincaré. Figures d'equilibre p. 91-95.

неравенства. Для получения главных моментов инерции прийдется взять интеграл типов.

$$\int_0^{\pi/2} S_n(\theta) \operatorname{Sin}^3\theta \, d\theta \quad и \quad \int_0^{\pi/2} S_n(\theta) \operatorname{Sin}\theta \cos^2\theta \, d\theta,$$

где θ - полярный угол относительно оси неравенства. Полагая $\operatorname{Cos}\theta = \mu$, преобразуем их к виду

$$\int_{-1}^{+1} \mu^2 S_n(\mu) \, d\mu \quad и \quad \int_{-1}^{+1} S_n(\mu) \, d\mu$$

Последний интеграл, по теории шаровых функций, равен нулю. Равенство нулю первого интеграла доказываем, пользуясь рекурентной формулой Гаусса-Бонне:

$$(n+1) S_{n+1}(\mu) - (2n+1) \mu S_n(\mu) + n S_{n-1}(\mu) = 0$$

Итак, главные моменты инерции неравенства равны нулю. Поэтому, будут нулями и моменты инерции относительно главных осей инерции земного сфероида, т.-е. $\frac{A - C}{C}$ изостазией не меняется и ею указанная невязка не об'ясняется.

§ 4. Решение уравнений теории упругости для изостатического слоя.

Полученный выше приближенный, но не произвольный закон изменения плотности внутри коры позволяет нам поставить на реальную почву вопрос об упругих разрывных силах, вызываемых внутри земли весом поверхностных неравенств.

Наши дальнейшие предположениям об упругом режиме внутри земли будут заключаться в следующем:

Ядро построено гидростатически, т.-е. усилия внутри него—гидростатические давления, которые, по предыдущему, являются функциями только радиуса. Относительно закона изменения плотности ядра мы никаких предположений не делаем, кроме того, что плотность ядра при $r = x$ равна плотности коры.

Таким образом, область, где упругие силы могут быть растяжением или касательными усилиями, ограничивается корою. Упругое равновесие коры поддерживается на $r = x$ гидростатическим давлением и на поверхности $r = a$ весом неравенств рельефа.

Ближайшая наша задача заключается в вычислении упругих сил внутри коры. Решение этой задачи, однако, осложняется тем, что к ней не приложима обычная теория упругости.

В самом деле, последняя существенно предполагает, что до действия поверхностных деформирующих сил тело находилось в состоянии свободном от упругих натяжений. Если это условие не осуществляется, но начальные усилия настолько малы, что к ним применим принцип Hook'a, обычная теория упругости приложима в несколько видоизмененном виде. Решая геофизическую задачу упругости мы находимся в несколько ином положении.

Земная кора под влиянием собственного тяготения находится в состоянии начальных усилий, настолько огромных, что приложить к ним принцип Hook'a было бы совершенно неправильно. На это обстоятельство, пренебрегаемое геофизиками, впервые указал Chree [1]) в своей критике указанной работы G. Darwin'a. Возникшую трудность, делавшую совершенно невозможной математическую трактовку вопросов геофизики, разрешил Rayleigh [2]). Он предполагает, что начальное усилие есть гидростатическое давление, что усилия, возникающие вследствие тех или иных дефформаций, малы сравнительно с начальными; тогда эти «добавочные» усилия отделяются от начальных, и теория упругости в обычном виде к ним применима.

Будем считать кору несжимаемой, постоянной упругости. Будем обозначать упругие коэффициенты через λ, μ (обозначение Lamé). Пусть $\triangle$ — коэффициент расширения; пусть p_1 — начальное давление в коре — (p_1, конечно, функция радиуса). Будем решать задачу об упругом равновесии коры в сферических координатах [3]).

Пусть r, φ, ψ сферические координаты точки слоя (широта отнесена к экватору неравенства), ϱ — плотность, причем $\varrho = \varrho_1 + A_n\,(r)\,S_n$

Пусть R_o, Φ_o, ψ_o — компоненты тяготения по осям криволинейной системы координат.

Положим $c = \cos\varphi$; $s = \sin\varphi$.

Тогда общие уравнения равновесия, в преобразованном Lamé [4]) виде, будут:

$$(\lambda + 2\,u)\ cr^2\ \frac{d\varDelta}{dr} + \mu\ \left[\frac{d\varGamma}{d\varphi} - \frac{dB}{d\psi}\right] + \varrho\, cr^2\, R_o = 0$$

$$(\lambda + 2\,\mu)\ c\ \frac{d\varDelta}{d\varphi} + \mu\ \left[\frac{dA}{d\psi} - \frac{d\varGamma}{dr}\right] + \varrho\, cr\ \varPhi_o = 0$$

---

[1]) On some applicat. of physics to geology. Phil. Mag. 1891 г.

[2]) Proc. R. Soc. London—1906 г.

[3]) В вопросе об удобстве решения статической задачи теории упругости для однородного шарового слоя мнения разделяются. W. Tomson решает ее в прямоугольных осях; Lamé и Chree предпочитают координаты сферические. Для неоднородного шарового слоя существует единственное решение Love в прямоугольных координатах.

[4]) Lamé. Leçons sur la theorie mathematique d'elasticité, Paris 1852 г. стр. 200.

$$(\lambda+2\mu)\ \frac{1}{c}\ \frac{d\Delta}{d\psi}+\mu\left[\frac{dB}{dr}-\frac{dA}{d\varphi}\right]+\varrho\, r\, \Phi_0=0$$

$$\text{здесь } A=\frac{1}{r^2c}\left[\frac{drV}{d\psi}-\frac{drcW}{d\varphi}\right],$$

$$B=\frac{1}{c}\left[\frac{drcW}{dr}-\frac{dU}{d\varphi}\right] \text{ и } \Gamma=c\left[\frac{dU}{d\varphi}-\frac{drV}{dr}\right].$$

а U, V, W—компоненты деформации по осям. Найця U, V, W, определим и упругие силы по формулам:

$$R_1=\lambda\,\triangle+2\,\mu\frac{dU}{dr}$$

$$\Phi_2=\lambda\,\triangle+2\,\mu\left[\frac{U}{r}+\frac{1}{r}\frac{dV}{d\varphi}\right],$$

$$\Psi_3=\lambda\,\triangle+2\,\mu\left[\frac{U}{r}-\frac{s}{c}\frac{V}{r}+\frac{1}{rc}\frac{dW}{d\psi}\right].$$

$$\Phi_3=\Psi_2=\mu\left[\frac{1}{rc}\frac{dV}{d\psi}+\frac{1}{r}\frac{dW}{d\varphi}+\frac{s}{c}\frac{W}{r}\right].$$

$$\Psi_1=R_3=\ \left[\frac{dW}{dr}-\frac{W}{r}+\frac{1}{rc}\frac{dU}{d\varphi}\right].$$

$$R_2=\Phi_1=\mu\left[\frac{1}{r}\frac{dU}{d\varphi}+\frac{dV}{dr}-\frac{V}{r}\right].$$

$$\triangle=\frac{1}{r^2}\frac{dr^2U}{dr}+\frac{1}{rc}\frac{dcV}{d\varphi}+\frac{1}{rc}\frac{dW}{d\psi}$$

Здесь R_1 —проэкция на r усилия на перпенд. к r площадку.
„ R_2— „ „ нормальн. к касат. к меридиану пл-ку.
„ R_3— „ „ нормальн. к касат. к параллели пл-ку.
„ Φ_1—проэкция на касательн. к меридиану усилия на площадку, перпенд. к r.
„ Φ_2— „ усилия на нормальн. к касат. к мерид. площадку.
„ Φ_3— „ „ „ нормальн. к касат. к параллели пл-ку.
„ Ψ_1—проэкция на касат. к параллели усилия на перпенд. к r площадку.
„ ψ_2— „ „ касат. к паралл. усилия на норм. к кас. к мер. площадку.
„ ψ_3— „ „ касат. к паралл. усилия на норм. к кас. к пар. площадку.

Условие несжимаемости дает:

$$\triangle=0 \qquad\qquad \lambda\,\triangle=-p'$$ [1])

---

[1]) Love. Lehrbuch d. Elastizität. S. 301.

где p'—гармоническое давление. Ввиду того, что гармонические неравенства зональны, т.-е. не зависят от угла φ, от этого угла будут независимы U, V, W, кроме того $W = 0$; присоединяя начальное усилие (гидростатическое давление p_1 — функцию радиуса), ищем систему усилий.

$$R_1 = -p_1 - p' + 2\mu \frac{dU}{dr}$$

$$\Phi_2 = -p_1 - p' + 2\mu \left[\frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{dV}{d\varphi}\right]$$

$$\psi_3 = -p_1 - p' + 2\mu \left[\frac{U}{r} - \frac{s}{c}\frac{V}{r}\right]$$

$$\Phi_3 = \psi_2 = \psi_1 = R_3 = 0\,; R_2 = \Phi_1 = \mu\left[\frac{1}{r}\frac{dU}{d\varphi} + \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}\right].$$

Кроме того, так как

$$\triangle = \frac{1}{r}\frac{dr^2U}{dr} + \frac{1}{c}\frac{dcV}{d\varphi} = 0 \qquad (\alpha)$$

очевидно: $\Phi_2 + \varphi_3 + R_2 = -3\,p_1 - 3\,p'$.

Помня, что полный потенциал тяжести равен $V = V_o + V^1 + V_s$, где V_0 не зависит от φ, получаем уравнения равновесия —

$$-cr^2\frac{dp_1}{dr} - cr^2\frac{dp'}{dr} + \mu\frac{d\Gamma}{d\varphi} + c(\varrho_1 + \varrho')\left[\frac{\partial V_0}{\partial r} + \frac{\partial V' + V_s}{\partial r}\right]r^2 = 0$$

$$-c\frac{dp'}{d\varphi^1} - \mu\frac{d\Gamma}{dr} + c(\varrho_1 + \varrho')\left[\frac{\partial(V^1 + V_s)}{\partial\varphi}\right] = 0$$

где

$$\Gamma = c\left[\frac{dU}{d\varphi} - \frac{drV}{dr}\right]\cdot\,\cdot\left[\beta\right].$$

С другой стороны, начальное усилие p_1 связано с V_0 уравнением гидростатики:

$$-\frac{dp_1}{dr} + \varrho_1\frac{\partial V_0}{\partial r} = 0.$$

Отсюда, пренебрегая квадратом ϱ', имеем окончательно уравнения равновесия:

$$-cr^2\frac{dp^1}{dr} + \mu\frac{d\Gamma}{d\varphi} + cr^2\varrho_1\frac{\partial V^1 + V_s}{\partial r} + cr^2\varrho'\frac{\partial V_0}{\partial r} = 0\cdot\,\cdot\,\cdot\left[\gamma\right]$$

$$c\frac{dp'}{d\varphi} - \mu\frac{d\Gamma}{dr} + c\varrho_1\frac{\partial V^1 + V_s}{\partial\varphi} = 0\cdot\,\cdot\,\cdot\left[\delta\right]$$

Уравнения $(\alpha), (\beta), (\gamma) (\delta)$ должны определить нам U, V, Γ и p'.

Так как $V^1 + V_s$ и ϱ' — шаровые функции, определяемые формулами § 1, таковыми должно быть p' и $\frac{1}{c}\frac{d\Gamma}{d\varphi}$.

Поэтому, можно положить,

$$\frac{d\Gamma}{d\varphi} = -cXn(n+1)S_n$$

Где X-ф-iя только r. Но по основному в теории шаровых функций уравнению:

$$\frac{d}{d\varphi} c \frac{dS_n}{d\varphi} + cn(n+1)S_n = 0 \qquad [\alpha^1]$$

Поэтому—

$$\frac{d}{d\varphi} c \frac{dXS_n}{d\varphi} = \frac{d\Gamma}{d\varphi}.$$

Т.-е. $\Gamma = cX\frac{dS_n}{d\varphi} + f(r)$, причем из (δ) видно, что $f(r) = const$, а по (β) ясно, что $f(r)=0$.

Далее, по (β) видно, что можно положить:

$$U = YS_n; \; V = Z\frac{dS_n}{d\varphi}.$$

Кроме того, $p' = \xi S_n$

Y, Z, ξ — функции одного r.

Наша задача — в определении X, Y, Z и ξ.

Деля (γ) на c и дифференцируя по r, дифференцируя (δ) по φ и деля на c, складывая результаты и деля сумму на r^2, имеем:

$$-\triangle^2 p' + \varrho_1 \triangle^2 (v' + V_s) + \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \varrho' \frac{\partial V_0}{\partial r}\right) = 0$$

где $\triangle^2$ — оператор Laplace'a.

Но

$$\triangle^2 p' = \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\xi}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2}\xi\right] S_n.$$

Далее, уравнение Poisson'a дает:

$$\triangle^2 (V^1 + V_s) = -4\pi\gamma\varrho'$$

Наконец, если σ — средняя плотность земли, мы легко вычисляем:

$$\frac{dV_0}{dr} = \frac{4}{3}\pi\gamma\frac{x^3}{r^2}(\varrho_1 - \sigma) - {}^4/_3\,\pi\gamma\,\varrho_1 r.$$

Затем, подставляя первый член найденного в § 1 разложения плотности по степеням $(r - x)$, имеем для определения ξ следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\xi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\xi}{dr} - \frac{n(n+1)\,\xi}{r^2} = -4\pi\gamma\varrho_1{}^2\alpha_n(r-x) + \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV_0}{dr}\alpha_n(r-x)\,\varrho_1\right)$$

Общий интеграл его имеет вид:

$$\xi = D_1 r^n + D_2 r^{-n-1} - \frac{a^1}{n(n+1)} - \frac{b^1 r^2}{(n-2)(n+3)} - \frac{c^1 r^3}{(n-3)(n+4)}$$

где D_1 и D_2 — произвольные постоянные и

$$a^1 = \frac{4}{3}\pi\gamma x^3\varrho_1\alpha_n(\varrho_1 - \sigma);\ b^1 = 8\pi\gamma\alpha_n\varrho_1{}^2 x;\ c^1 = -\frac{28}{3}\pi\gamma\alpha_n\varrho_1{}^2.$$

К сожалению, полученное решение не может нас удовлетворить. Оно обращается в бесконечность в наиболее интересных случаях, т.-е. при $n = 2, n = 3$; оказывается невозможным подобрать дополнительные частные решения основного уравнения для ξ так, чтобы они были конечны при всяком n. Остается фиксировать n и решать частную задачу, относящуюся к неравенству определенного типа. Это не понизит значительно ценности окончательного результата, ибо à priori ясно, что для n мало отличных друг от друга $(n = 1; n = 2; n = 3)$ разрывные упругие силы также будут близки друг другу.

Возьмем наиболее интересную часть неравенства рельефа. Фиксируем $n = 2$. Уравнение для определения ξ будет иметь вид:

$$\frac{d^2\xi}{dr} + \frac{2}{r}\frac{d\xi}{dr} - \frac{6}{r^2}\xi = a^1 r^{-2} + b^1 + c^1 r$$

Откуда:

$$\xi = D_1 r^2 + D_2 r^{-3} - \frac{a^1}{6} + b^1\frac{r^2 \log r}{5} + \frac{c^1 r^3}{6}$$

Уравнение (γ) дает для определения X:

$$\mu X n(n+1) = -r^2\frac{d\xi}{dr} + \varrho_1\frac{dW^1 + W_s}{dr} + \varrho_1\alpha_2(r-x)\frac{dV_0}{dr}.$$

(β) дает:

$$У - \frac{drZ}{dr} = X$$

и по (α) и (α'):

$$rZ = \frac{1}{n(n+1)}\frac{d^2У}{dr} \qquad (\beta')$$

Отсюда для определения У получаем дифференц. уравнение:

$$\frac{d^2У}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{dУ}{dr}=\frac{(n-1)(n+2)}{r^2}У=\frac{-Xn(n+1)}{r^2}\,;n=2$$

Z определится по (β^1).

Для $n=2$ легко получаем:

$$-\mu\frac{6X}{r^2}=r^{-4}\left[\frac{b^1}{100}x^5-3D_2\right]+r^2a^1x-a^1r^{-1}+\frac{1}{5}b^1r\log r+$$
$$+r\left[2D_1+\frac{6}{35}ac^1+\frac{1}{5}b^1\log a-\frac{b^1h'_2}{5x\alpha_2}-\frac{2b'}{75}\right]-$$
$$-r^2\frac{181}{142}c'.$$

Решение уравнения:

$$\frac{d^2\mu У}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{d\mu У}{dr}-\frac{4\mu У}{r^2}=-6\mu\frac{X}{r^2}$$

дает окончательно:

$$\mu У=E_1r+E_2r^{-4}-\frac{a'}{5}r\log r+\frac{1}{70}b'r^3\log r-\frac{a'x}{r}+r^{-2}\left[\frac{3}{10}D_2-\frac{b'}{1000}x^5\right]$$
$$+r^3\left[\frac{D_1}{7}-\frac{3}{245}ac'+\frac{1}{70}b'\log a-b'\frac{h'_2}{70x\alpha_2}-\frac{b'}{105}\right]-\frac{5}{28}c'r^{-4}$$

где E_1 и E_2 — произвольные постоянные. По уравнению (β^1) получаем:

$$\mu Z=r\left[\frac{E_1}{2}-\frac{a'}{30}\right]-\frac{5}{28}c'r^4-\frac{a^1x}{2}-\frac{1}{10}a^1r\log r+\frac{1}{84}b^1r^3\log r+$$
$$+r^3\left[\frac{5}{42}D_1+\frac{1}{98}ac^1+\frac{1}{84}b^1\log a-\frac{b^1h'_2}{84x\alpha_2}-\frac{1}{82}b^1\right].$$

Этих данных достаточно для определения усилий в функции четырех произвольных постоянных D_1, D_2, E_1, E_1. Положим:

$$\frac{a-r}{a}=z$$

$\sigma=2\varrho_1$ (что весьма близко к истине), далее:

$$\beta=4/3\,\pi\gamma\,\varrho_1{}^2\alpha_2a^3$$

$$E'_1=E_1\beta^{-1};\ E'_2=E_2\beta^{-1}a^{-5};\ D'_1=D_1\beta^{-1}a^2;\ D'_2=D_2\beta^{-1}a^{-3}.$$

Тогда, вычисляя усилия с точностью до z^2, найдем для R_1 и R_2 (определяющих произвольные постоянные) следующие выражения:

$$R_1 = -p_1 + S_2\beta\Bigg[\Bigg(2E'_1 - \frac{D'_1}{7} - \frac{11}{5}D'_2 - 8E'_2 + \frac{74}{7} - \frac{3}{5}t + \frac{54}{35}t^2 + \left(\frac{8}{35} - \frac{36}{35}t + \frac{6}{5}t^2\right)\log a\Bigg) + z\Bigg(2/7\,D'_1 - 40E'_2 - \frac{33}{5}D'_2 - \frac{5557}{25} - \frac{29}{25}t + \left(\frac{12}{35} - \frac{12}{35}t\right)\log a\Bigg) + z^2\Bigg(-\frac{D'_1}{7} - \frac{33}{5}D'_2 - 120E'_2 + 32 - \frac{6}{35}\log a\Bigg) + \ldots\Bigg]$$

$$R_2 = \frac{dS_2}{d\varphi}\beta\Bigg[\Bigg(E'_1 + E'_2 + \frac{3}{10}D'_2 + \frac{8}{21}D'_1 + \frac{25}{2} + \frac{64}{25}t + \frac{12}{5}t^2 + \left(\frac{23}{35} - \frac{37}{25}t + \frac{3}{5}t^2\right)\log a\Bigg) + z\Bigg(5E'_2 - \frac{16}{21}D'_1 + 9/10\,D'_2 - \frac{187}{10} + \frac{117}{70}t + \left(-\frac{32}{35} + \frac{96}{35}t\right)\log a\Bigg) + z^2\Bigg(15E'_2 + 9/10\,D'_2 + \frac{8}{21}D'_1 + \frac{92}{5} + \frac{16}{35}\log a\Bigg) + \ldots\Bigg]$$

В дальнейшем будем полагать $\log a = 0$ т.-е. будем рассчитывать упругую силу на площадь в $(a)^2$.

Нам остается определить произвольные постоянные из условий на пределах. Эти условия следующие:

а) На свободной поверхности касательныя усилия нули, нормальное же давление сводится к весу неравенства, т.-е. если g ускорение тяжести, то при $r = a$

$$R_2 = 0\,;\ R_1 = -g\varrho_1 h_2 S_2$$

ибо p_1 при $r = a$ равно нулю.

в) На поверхности $r = x$, где кора переходит в ядро, гидростадтически построенное, касательные усилия нули, нормальное же сводится к гидростатическому давлению $-p_1$ т.-е. на $r = x$ имеем $R_2 = 0$ и $R_1 = -p_1(x)$ (т.-е. зависящая от φ часть R_1 равна нулю).

Определение произвольных постоянных из этих условий дает для них следующие выражения:

$$D'_1 = -54{,}29 + 36{,}09\,t + 197{,}23\,t^2 - \frac{0{,}10\,g\varrho_1 h_2}{\beta t} - \frac{0{,}07\,g\varrho_1 h_2}{\beta} + \frac{0{,}10\,g\varrho_1 h_2 t}{\beta}$$

$$D'_2 = +79{,}54 - 341{,}63\,t + 1897{,}15\,t^2 + \frac{0{,}29\,g\varrho_1 h_2}{\beta t} - \frac{0{,}36\,g\varrho_1 h_2}{\beta} + \frac{1{,}37\,g\varrho_1 h_2 t}{\beta}$$

$$E'_1 = +3{,}12 + 15{,}17\,t - 73{,}93\,t^2 + \frac{0{,}04\,g\varrho_1 h_2}{\beta t} - \frac{0{,}05\,g\varrho_1 h_2}{\beta} - \frac{0{,}23\,g\varrho_1 h_2 t}{\beta}$$

$$E'_2 = -19{,}07 + 101{,}29\,t - 559\,34\,t^2 + \frac{0{,}07\,g\varrho_1 h_2}{\beta t} + \frac{0{,}19\,g\varrho_1 h_2}{\beta} - \frac{0{,}36\,g\varrho_1 h_2 t}{\beta}$$

Отсюда для упругих сил находим окончательно:

$$R_1 = -p_1 + S_2 \left[-g\varrho_1 h_2 + z\left(\frac{g\varrho_1 h_2}{t} - 6{,}5\,g\varrho_1 h_2\right) + z^2 \frac{6{,}5\,g\varrho_1 h_2}{t} + \right.$$
$$\left. + 6\pi\gamma\varrho^2_1 \frac{h^1{}_2}{t_2}\left(1810\,z\,t - 1810\,z^2\right) \right].$$

$$R_2 = \frac{dS_2}{d\varphi}\left[0{,}84\,g\varrho_1 h_2 z - 0{,}84\,g\varrho_1 h_2 \frac{z^2}{t} - \frac{6\pi\gamma\varrho_1 h'_2}{t^2}\left(228\,t\,z - 228\,z^2\right)\right].$$

$$\Phi_2 = -p_1 + S_2\left[g\varrho_1 h_2\left(-\frac{0{,}11}{t} + 0{,}49 - 1{,}80\,t\right) + z\left(-\frac{1{,}2}{t} + 2{,}2\right) + z^2\,3/t - \right.$$
$$- 6\pi\gamma\varrho^2_1 \frac{h^1{}_2}{t^2}\Big\{(-21{,}82 + 393{,}00\,t - 2160\,t^2) + z\,(-371{,}8 + 1369{,}4\,t) -$$
$$\left. - 716\,z^2\Big\}\right] +$$
$$+ \frac{d^2 S_2}{d\varphi^2}\left[g\varrho_1 h_2\left\{\left(\frac{0{,}02}{t} - 0{,}07 - 0{,}21\,t\right) + z\left(\frac{0{,}05}{t} + 0{,}04\right) - \frac{0{,}02\,z}{t}\right\} - \right.$$
$$\left. - 6\pi\gamma\varrho^2_1 \frac{h'_2}{t^2}\left\{\left(-7{,}15 + 2{,}05\,t - 18{,}42\,t^2\right) + z\left(20{,}8 + 14{,}5\,t\right) - 5{,}1\,z^2\right\}\right].$$

$$\times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [D]$$

Аналогичное выражение (вместо $\frac{d^2 S_2}{d\varphi^2}$ будет $-\operatorname{tang}-\varphi\,\frac{dS_2}{d\varphi}$ получим и для Φ_3.

Итак, упругие силы нами определены.

§ 5. О разрывных упругих силах внутри земной коры.

Определим теперь главные усилия в данной точке коры, понимая под ними (N_1, N_2, N_3) усилия, соответствующие осям элипсоида упругости. Теория дает для них, как известно, следующие выражения:

$$N_1 = \frac{1}{2}\left[(\Phi_2 + R_1) + \sqrt{(\Phi_2 - R_1)^2 + 4R_2^2}\right]$$

$$N_2 = \Phi_3$$

$$N_3 = \frac{1}{2}\left[(\Phi_2 + R_1) - \sqrt{(\Phi_2 - R_1)^2 + 4R_2^2}\right].$$

Упругую разрывную силу можно, как известно, определить двояко. Можно принять за нее максимальное главное усилие (если оно не давление), или можно принять за нее максимальную из разностей главных усилий (то, что английские авторы называют stress difference). Ввиду того, что максимальное главное усилие у нас, наверно, давление, мы должны воспользоваться, вслед за G. Darwin'ом, вторым методом. Разность усилий (stress difference), определяющая собою разрывную силу, есть наибольшая из разностей главных усилий, т.-е. независимо от знака, максимальная из величин:

$$\triangle_1 = \frac{1}{2}\left[(\Phi_2 + R_1 - 2\psi_3) + \sqrt{(\Phi_2 - R_1)^2 + 4R_2^2}\right]$$

$$\triangle_2 = \frac{1}{2}\left[(\Phi_2 + R_1 - 2\psi_3) - \sqrt{(\Phi_2 - R_1)^2 + 4R_2^2}\right]$$

$$\triangle_3 = \sqrt{(\Phi_2 - R_1)^2 + 4R_2^2}.$$

Вычислим главные части найденных упругих сил. Ввиду того, что

$$S_2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\operatorname{Cos} 2\varphi\,;\quad \frac{dS_2}{d\varphi} = {}^3/_2 \operatorname{Sin} 2\varphi\,;\quad \operatorname{tang}\varphi \frac{dS_2}{d\varphi} = {}^3/_2 - {}^3/_2 \operatorname{Cos} 2\varphi$$

$$\frac{d^2S_2}{d\varphi^2} = 3\operatorname{Cos} 2\varphi$$

отбрасывая гидростатическое давление p_1, которое не влияет на разность усилий, получаем главные части:

$$R_1 = -g\varrho_1 h'_2\left[\left(-0{,}25 + 1018\frac{z}{t} - 1018\frac{z^2}{t^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(0{,}75 - 3054\frac{z}{t} + 3054\frac{z^2}{t^2}\right)\operatorname{Cos} 2\varphi\right].$$

$$R_2 = g\varrho_1 h'_2\left[-770\frac{z}{t} + 770\frac{z^2}{t^2}\right]\operatorname{Sin} 2\varphi\,.$$

$$\Phi_2 = -12{,}2\, g\varrho_1 \frac{h'_2}{t^2}(1 + \operatorname{Cos} 2\varphi)\,.$$

$$\psi_3 = -12{,}2\, g\varrho_1 \frac{h'_2}{t^2}(1 + \operatorname{Cos} 2\varphi)\,.$$

Мы видим, таким образом, что касательное усилие очень мало сравнительно с Φ_2 и ψ_3. Далее $\Phi_2 + \psi_3 = 0$, что и надо было ожидать, вследствие условия несжимаемости и малости R_1.

Очевидно, максимальная Δ есть Δ_1, т.-е.

$$\Delta = \Phi_2 - \psi_3$$

или —

$$\Delta = 24{,}4\, g\varrho_1 \frac{h'_2}{t^2}(1 + \mathrm{Cos}\, 2\varphi)$$

или —

$$\Delta_{max} = 48{,}8\, g\varrho_1 \frac{h'_2}{t^2}$$

Выражая Δ_{max} на площадку в 1 см. ^{2} надо помнить, что мы должны умножить Δ_{max} на $(a)^2$ для перехода к C. G. S. но так как мы расчитывали силу раньше на площадь в $(a)^2$ см., мы должны результат разделить вновь на $(a)^2$.

Положим, как и раньше:

$$\varrho_1 = {}^1/_2\, \sigma = 2{,}8 \qquad h'_2 = 3{,}10^{-3}.$$

Тогда

$$\Delta_{max} = \frac{5{,}10^{-2}}{t^2} \text{ килогр. на кв. сант.} = \frac{4486{,}10^{-2}}{t^2} \text{ дин на кв. сант.}$$

Или, так как британская тонна на кв. дюйм. равна 15.10^7 дин на кв. сант.

$$\Delta_{max} = \frac{2984{,}10^{-10}}{t^2} \text{ брит. тонн на кв. дюйм.}$$

Если по данным геодезии положить $t = 1/50$, то

$$\Delta_{max} = 0{,}0008 \text{ бр. тонн на кв. дюйм.}$$

Интересно отметить, что для $n = 2$ Darwin получает:

$$\Delta_{max} = 5{,}43 \text{ бр. тонн на кв. дюйм.}$$

Love при произвольном законе плотности, с изостатической гипотезой получает для $n = 2$

$$\Delta_{max} = 0{,}05 \text{ бр. тонн на кв. дюйм.}$$

Полученное нами ничтожно малое значение разрывной силы чрезвычайно благоприятно для изостатической гипотезы.

Нечего говорить, что эти значения много ниже критических значений этой силы для тех материалов, из которых составлена земная кора. Важно отметить, что мы получили наш результат без каких-либо произвольных гипотез, сводящих на нет по существу все построения Love.

Не имеет смысла искать распределение разрывной силы внутри коры, ввиду ее малости. Само собой понятно, что она максимальна при широте в 45^0 (относительно экватора неравенства) и равна нулю на его полюсах.

Вычисляя усилия вызываемые элипсоидальностью земли, мы вместо $h'_2 = 3.10^{-3}$ должны поставить $h'_2 = 10^{-3}$; это дает для разрывной силы на геогр. широте в 45^0 значение лишь в 0,0003 бр. тонн на кв. дюйм.

Полученный результат позволяет определить нижний предел толщины изостатического слоя на основании одних только соображений теории упругости. Возьмем наименее прочный материал—красный твердый кирпич; для него, как показывают опыты с раздавливанием, критическое значение $\triangle$ есть

$$\triangle = 0{,}5 \text{ бр. тонн на кв. дюйм.}$$

Принимая это наименьшее значение в основу расчетов, пренебрегая множителем безопасности, находим нижний предел для t из неравенства:

$$\frac{2984{,}10^{-10}}{t^2} < 0{,}5$$

т.-е. $t > \frac{1}{5000}$, т.-е. предел l. (толщины изостатического слоя) несколько больше километра. Для мрамора (критическая $\triangle = 2{,}5$) l около сотни сажен.

Пределы эти, конечно, слишком низки для того, чтобы они могли нас чему-нибудь научить.

Теория § 2 учит нас большему. Положим, что максимальная разность плотностей слоя у поверхности земли меньше разности плотностей экстремальных в этом отношении пород—тогда найденный закон плотности установит нам неравенство для определения t.

Возьмем характерные в этом смысле породы—базальт ($\varrho_1 = 3$) и мел ($\varrho_1 = 2{,}2$; это также средняя плотность песчаников и глиноземов). Наш закон плотности в таком случае определяет неравенство:

$$l > 45 \text{ км.}$$

В числе определенных значений l, полученных Hayford'ом [1]), также недурно удовлетворяющих наблюдениям, фигурируют величины ниже 45 км.; на основании полученного результата их во всяком случае надо отбросить.

Итак, теория упругости пока не позволяет фиксировать значение l. Мы должны только пользоваться пока данными геодезистов, определенными чисто формальным условием минимальности суммы квадратов уклонений при исследовании аномалии отвеса и тяжести. Нет сомнения в том, что теория сейсмических волн в связи с результатами наблюдений землетрясений позволит теории упругости найти более реальное значение толщины изостатического слоя, чем то, которое было найдено геодезистами:

Харьков.
Астрономическая Обсерватория.
1921 г.

---

[1]) К сожалению, по условиям времени и места, автору не была доступна работа Hayford'a. С ее результатами он познакомился по данным Rudzk'ого (Physik d. Erde стр. 72).

Prof. B. P. Gerasimovič.

The isostatic layer from the standpoint of the theory of elasticity.

Contents.

In this paper are investigated the conditions of the elastical equilibrium of the isostatic layer. Following suppositions are introduced: spherical surfaces, limiting the isostatic layer from above and from below, are isopotential, the inequality of earth relief is expressed by serie of spherical functions; the density distribution in the inner of the layer, compensating the statical action of the earth relief, is expressed by the formula (A). Thus the isostatical hypothesis is expressed by the equalities (1) and (2) for the layer surfaces. Supposing A(r) as devel-loped in serie (B), we found the first members of this serie, according to (1) and (2), as (C). In § 3 we investigate the influence of the harmonical unequality upon the moments of inertia of earth. spheroid.; it is = 0. In § 4 are resolved equations of theory of elasticity for the isostatic layer in spherical coordinates. We suppose, that the elastical forces on the interior surface of the layer are hydrostatical pressures, and those on the superior are pressures of relief unequalities. Introducing the expressions of density, found in § 2, we determine in (D) the elastical forces. In § 5 we are studying disruptive forces, produced in the inner of the layer by relief unequality (G. Darwin's problem). Their maximal value does not excede 0,0008 british tons pro square inche, which assures completely the stability of equilibrium. It confirmes the results obtened by Love in another way for the isostatic layer. Then we determine the interior limit for the thickness of the isostatic layer. Applying only the considerations of the theory of elasticity, we find it too low and consequently theoreticaly useless. Applying the density law (C) of § 2, we obtain another theoretical value of the abovesaid limit. The thickness of the isostatic layer is > 45 km.

The theory of elasticity does not allow in the present time to determine the thickness of the layer; probably it will be possible in the future, applying the theory of seismic waves.

Kharkow. Astronomical Observatory. 1921.

Извлечение из отчета[1]) о заграничной командировке проф. С. Н. Бернштейна, сделанного Научному Комитету (Научная часть).

Главным предметом моей научной работы во время пребывания в Париже (от 3-го мая до 29-го июля 1923 года) было составление и чтение курса лекций „О наилучшем приближении и экстремальных свойствах аналитических функций действительной переменной“, ради которого я был приглашен Парижским Университетом, а затем подготовка этого курса к печати в виде отдельной монографии, принятой Борелем в его коллекцию, издаваемую Готье-Вилляром. В виду того, что по договору с издателем, курс моих лекций появится в ближайшее время, я считаю излишним останавливаться на изложении его содержания; замечу лишь, что часть новых результатов, которые вошли в этот курс, была мною доложена Парижской Академии тогда же и напечатана в номерах Comptes Rendus от 4-го июня (Sur une propriété des fonctions entières), 18-го июня (Sur les proprietés extremales des polynomes et des fonctions entières sur e' axe réel) и 9-го июля (Sur la meilleure approximatlion des fonctions analy tiques possédant un point singulier essentiel). В прочитанном курсе я не успел коснуться вопроса, смежного с моими прежними исследованиями об обобщениях аналитических функций — недавно открытых Denjoi и Carlemann'ом, из которых последний как раз заканчивал свой курс на эту тему в Collège de France, когда я начинал свои лекции в Сорбонне. Поэтому, я прибавил к выше названной книге дополнительную главу о квази-аналитических функциях, окончательную редакцию которой выслал в Париж уже из Харькова.

Научная моя работа в других направлениях, не считая двух заметок[2]) в Comptes Rendus (за 16-е сентября и 1-е октября), посвященных закону наследственности Менделя и его обобщениям, ограничивалась ознакомлением с новейшей математической литературой. При этом значительное внимание мною было уделено теории относительности, которая за последнее десятилетие занимает центральное место в развитии научно-математической мысли. Вообще, у наиболее крупных

---

[1]) Печатается по постановлению Научного Комитета.

[2]) Резюмирующих результаты статьи, напечатанной в настоящем сборнике.

современных математиков замечается в той или иной форме тяга к теоретической физике (Hilbert, Hadamard, Borel, Levi Civita, Weyl и др.). Исследования по так называемому чистому анализу носят, по преимуществу, характер систематизации, упрощения и обобщения ранее известных идей, которыми наука обязана Poincaré, Picard'у и другим математикам прошлого поколения. Здесь на первом месте продолжает оставаться теория функций (включая сюда и теорию интегральных уравнений и вариационное изчисление и проч., поскольку фактически трактуемые в этих областях задачи уже со 2-й половины прошлого столетия проникнуты духом и методами теории функций); менее значительна работа в направлении алгебры и теории чисел, а также геометрии, поскольку последняя не связана с теорией относительности. В области теории функций из молодых математиков, которые появились на научном горизонте уже после войны, обращают на себя внимание Carlemann, Julia, Островский; отмечу также еще совсем молодого математика Мандельбройта, который в 1920 году окончил Харьковский Университет, и в настоящее время защитил в Париже докторскую диссертацию, получивший весьма интересные результаты, относящиеся к свойствам строк Тейлора на круге сходимости.

С. Бернштейн

ВСЕУКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ НАУК.

НАУКОВІ ЗАПИСКИ.

Орган Київських науково-дослидчих катедр. Т. I.

Лежащий перед нами первый том трудов Киевских исследовательских кафедр свидетельствует о развивающейся научной деятельнисти в области чистой науки, прерванной всемирною и гражданской войною и поставленной в чрезвычайно тяжелые условия трудностью печатания. Киевские исследовательские кафедры поставлены, как видно, в довольно благоприятные условия, имея возможность печататься в специальной типографии Украинской Академии Наук.

К области наук математических относятся в нем всего две статьи: во первых, доц. М. Кравчука. К теории кривых 4-ой степени (стр. 76 — 84). Автор занимается вопросом о числе вещественных двойных касательных такой кривой, дает в §§ 1 и 2 простое доказательство теорем, что возможны 4 случая: 28, 16, 8 и 4 вещественных касательных, в § 3 доказывает, что все 4 случая и осуществляются на самом деле (вопросам этим посвящен 13 отдел 2-го тома Lehrbuch d. Algebra H. Weber'a), разыскивает систему Аронгольда для первых трех случаев и обнаруживает отсутствие ее для некоторых кривых 4-й категории. Результатами в § 5 и 6 пользуется для установления классификации кривых 4-го порядка данной Zeuthen'ом (Math. Ann. VII. 1873).

Другая статья—проф. А. П. Котельникова. Відбівання в лініях передачі енергій змінного струменю на великі віддалі (стор. 94 — 96) относится скорее к области энектротехники.

Отметим еще таблацы смертности для Украины 1896 — 1897 г.г., составленные М. Птухою (стр. 110 — 127).

Необходимо отметить, что этим конечно не исчерпывается деятельность Киевских математиков за 1922 год, — большая часть работ их вошла в издания самой академии, из которых мы имеем под руками:

Записки фізично-математичного відділу, т. 1, вып. 1, под ред. М. М. Крылова, П. А. Тутковского, А. В. Фомина, І. І. Шмальгаузена. (Bulletin de la Classe des Sciences physiques et Mathématiques. T. I, fasc. 1. 1922), содержащие следующие статьи, (напечатанные на французском языке) Ак. Д. А. Граве: 1) Об одной теореме Эйлера, в которой автор доказывает невозможность решения в целых числах уравнения $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$), 2). О корнях 5-й степени из единицы, (с которыми автор составляет область, и с помощью этого доказывает невозможность уравнения Фермата $\alpha^5 + \varepsilon^5 + \varrho^5 = o$). 3) Обобщение одной теоремы Абеля. Ак. Н. М. Крылов: 1) Различные обобщения основной леммы вариационного исчисления, — где дело идет об обобщении теоремы, доказанной Размадзе, Üeber Fundamental lemma d, Varationsrechnung (Math. Ann. 1921). 2) Об одной формуле Г. Дарбу, где доказывается, что в остаточном члене формулы Taylor'а для комплексного переменного, выведенном Дарбу, множитель X. отличающий от случая вещественных переменных, м. б. опущен. 3) О некоторых формулах интерполяции, сходящихся для каждой вещественной функции вм. с Е. Штаерманом (обобщение результатов L. Fejer'a Goetting Nachrichten H. 1. 1916). 4) Его-же приложение теории механических квадратур для определения последовательными приближениями решения интегрального уравнения (вм. с С. Я. Тамаркиным). 5) О методе интеграции Ритца (справка о приоритете). 6) Заметки о некоторых формулах интерполяции (вм. с Штайерманом). Далее идет статья Г. Соколова. О движении материальной точки притягиваемой неподвижным центром, и подверженной действию постоянной возмущающей силы. Выпуск заканчивается статьею ак. Г. Пфейфера. Об одной специальной методе интегрирования уравнений и систем уравнений не линейных в частных производных 1-го порядка — сообщ. 1-е и 2-е. Применение к уравнениям или системам уравнений, допускающим интегралы S. Lie, метода разделения переменных В. Г. Имшенецкого приводит к линейным уравнениям и не требует приведения к формам, установленным Н. Н. Салтыковым.

Д. Синцов.

Замеченные опечатки.

Стр.	Строка	Напечатано	Исправить
4	5 (снизу)	$f_{k'} - \frac{d}{dt}$	$f_k - \frac{d}{dt}$
„	3 „	$+$	$-f\left(t, k(t), k'(t)\right) +$
„	„ „	$-f$	$-f_{k'}$
„	1 „	$a +$	$a' +$
6	13 (сверху)	23	26
8	12 „	c_0	c
9	14 „	$f(x,y,y)$	$f(x,y,y')$
22	2 „	$\frac{\partial k'}{\partial n}$	$\frac{\partial k'}{\partial t}$
„	7 (снизу)	69	68
24	12 „	$tb(t)$	$b(t)$
28	„ (сверху)	système	tableau
30	7 „	y_j	x_j
34	14 „	b	c
36	8 „	a	n'a
38	4 (снизу)	$<$	$\leq$
38	4 „	$>$	$\geq$
„	1 „	$>$	$\geq$
40	6 (сверху)	$<$	$\leq$
43	10 (снизу)	$n^k y^{k-2}$	$u^k y^{k-2}$
44	4 (сверху)	e	e^{-z^2}
45	2 „	$\triangle z_e - \left(z_0 - \frac{\triangle z}{2}\right)^2$	$\triangle z e^{-\left(z_0 - \frac{\triangle z}{2}\right)^2}$
47	11 „	$\frac{4pqn}{(p\quad{}^2}$	$\frac{4pqn}{(p-q)^2}$
48	14 „	$<$	$\leqslant$
49	3 (снизу)	$\left[1 - \frac{p-q}{2pqn}(np-m)\right]^{\frac{4pq}{(p-q)^2}}$	$\left[1 + \frac{p-q}{2pqn}(np-m)\right]^{\frac{4pqn}{(p-q)^2}}$
78	10 (сверху)	$>$	$<$
„	14 „	a	*a*
80	1 „	значение	значение
„	7 „	on the.	On the

Стр.	Строка	Напечатано	Исправить
„	12 „	темою,	,
86	3 (сверху)	mf	mf_1
87	4 „	$(\alpha + \beta +)$	$(\alpha + \beta + \lambda)$
90	3 (снизу)	собй	собой
91	7 „	α_{kik}	α_{kk}
92	3 (сверху)	$\alpha_{,l}$	α_{il}
„	13 „	$A_{i,k,hl}$	$A_{ik,hl}$
93	21 „	$\alpha_1 + \alpha_2^1 - \ldots + \gamma_n$	$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$
95	4 (снизу)	h_1 и m_1	h_i и m_i
„	2 „	„	„
99	4 (сверху)	m,	m_2
100	9 (снизу)	$A_1^n a_1$	$A_1^n a_n$
101	10 „	dy	dx_1
„	5 „	d_1x	dy
104	10 „	ff	ff_1
132	3 (сверху)	$A_n(r) = s_1$	$A_n(r) = g_1$