О проблеме равномерной темперации.

В. Л. Гончаров.

Существующая со времен Себастиана Баха и до сих пор почти исключительно употребительная скала музыкальных тонов (12-ти тонная темперация) в наше время представляется уже стеснительной. Только немногие из выдающихся современных композиторов не делают попыток выйти из ее рамок; другие же принуждены в широкой мере жертвовать точностью интонации для того, чтобы дать физическое воплощение звучаниям, осуществление которых недоступно современным инструментам. Распространенное представление об изобилии диссонансов в новейшей музыке не является, таким образом, предрассудком.

Обогащение звуковой палитры направлено, главным образом, по линии увеличения числа употребительных гармонических призвуков— обертонов: искусственное конструирование тембров с помощью гармонически-чистых тонов могло бы—в отдаленном будущем—явиться завершением этого пути. Пока что „высшие" обертоны—11, 13 и даже 15 и 17 уже приемлются нашим сознанием и иногда (у Скрябина) составляют обычный материал звуковой ткани.

В следующих примерах, кроме порядка обертонов, я указываю (в долях полутона) абсолютную погрешность интонации при исполнении на фортепиано,

$\underline{\text{G}}$	Dis	A	cis	g	$\overline{\text{cis}}$	$\overline{\text{fis}}$	$\overline{\text{h}}$
7	11	1	5	7	5	13	9
0,31	0,49	0	0,14	0,31	0,14	0,60	0,04

(Скрябин, аккорд „Прометея" ор. 60).

$\underline{\text{E}}$	E	H	gis	h	$\overline{\text{e}}$	$\overline{\text{gis}}$	$\overline{\text{ais}}$	$\overline{\overline{\text{dis}}}$	$\overline{\overline{\text{gis}}}$	$\overline{\overline{\text{ais}}}$	$\overline{\overline{\overline{\text{dis}}}}$	$\overline{\overline{\overline{\text{gis}}}}$	$\overline{\overline{\overline{\overline{\text{cis}}}}}$
1	1	3	5	3	1	5	11	15	5	11	15	5	13
0	0	0,02	0,14	0,02	0	0,14	0,49	0,12	0,14	0,49	0,12	0,14	0,60

(Скрябин, заключительное звучание „Vers la flamme" ор. 72).

Погрешности достигают здесь четверти тона, что не может не быть оскорбительным даже для нашего (не столь уж взыскательного) европейского слуха.

Проблема нового строя,—а следовательно и нового инструмента,— в свое время весьма удачно разрешенная и потом основательно забытая, снова выступает перед нами.

Идеальным раскрепощением строя явилось бы изобретение „ультрахроматического“ инструмента, который, будучи многоголосным и допуская импровизацию, обладал бы непрерывной скалой, т.-е. мог бы доставлять тоны любой высоты. Может быть, быстро развивающаяся техника сделает нам когда-нибудь этот подарок.

Но небесполезно рассмотреть и возможности более легко осуществимого выхода из Баховского компромисса, путем нового компромисса: равномерной температции с числом тонов в октаве более 12-ти.

В этой работе я имею в виду показать, какими соображениями может быть мотивирован рациональный выбор одной из таких „утонченных“ температций. Вопрос приобретает и чисто-математический интерес, так как чрез посредство функции $\zeta(s)$ Riemann'а он оказывается связанным с аналитической теорией чисел.

Пусть дана система точек E на прямой. Требуется, возможно менее сдвинув эти точки на прямой, добиться того, чтобы система точек стала частью арифметической прогрессии с не очень маленькой разностью. Вот приблизительная формулировка проблемы температции в самом общем виде.

Но эту проблему необходимо формулировать более точно.

Пусть дана прогрессия точек:

$$\cdots -n, \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots n, \cdots \qquad (P_0)$$

Введем функцию $\omega(x)$, представляющую отклонение точки от ближайшей точки прогрессии (P_0), ограничиваемую следующими свойствами: $\omega(x)$ — непрерывная, четная, периодическая с периодом 1, положительна при не целых значениях x, обращается в нуль при целых, возрастает в промежутках $(n < x < n + \frac{1}{2})$, убывает в промежутках $(n + \frac{1}{2} < x < n + 1)$. В частности, можно под $\omega(x)$ подразумевать:

1) отклонение в обычном смысле слова, определяемое равенствами

$$\omega(x) \equiv |x| \quad (|x| \leqslant \tfrac{1}{2})$$
$$\omega(x+1) \equiv \omega(x)$$

2) гармоническое отклонение, определяемое равенством

$$\omega(x) \equiv 1 - \cos 2\pi x.$$

Температции, в основу которых положены эти специальные определения функции $\omega(x)$, условимся называть **модулярной** и **гармонической** (соответственно).

Отклонение точки x от ближайшей точки прогрессии

$$\cdots a - nd, \cdots a - 2d,\ a + d,\ a,\ a + d,\ a + 2d, \cdots a + nd \cdots \qquad (P)$$

мы получим посредством перенесения начала координат в точку a и увеличения маштаба в d раз. Это будет

$$d\,\omega\left(\frac{x-a}{d}\right),$$

или, полагая $d = \frac{1}{t}$,

$$\frac{1}{t}\,\omega\Big(t\,(x-a)\Big).$$

Пусть дана система точек $E(x_\nu)$ на прямой: система может быть конечной или бесконечной, но исчислимой. Пусть каждой точке x_ν соответствует вес p_ν (> 0). Ряд $\sum\limits_{\nu} p_\nu$, во всяком случае, будем предполагать сходящимся.

Составим сумму S из произведений отклонений точек системы от ближайших точек прогрессии (P) на соответственные веса:

$$S = \frac{1}{t}\sum_{\nu} p_\nu\,\omega\Big(t(x_\nu - a)\Big).$$

Отношение этой суммы к ее среднему значению

$$\overline{S} = \frac{1}{t}\sum_{\nu} p_\nu\,\overline{\omega}$$

(где $\overline{\omega}$ — среднее значение функции $\omega(x)$) — назовем **температионной функцией**:

$$T(a,\ t) = \frac{S}{\overline{S}} = \frac{\sum\limits_{\nu} p_\nu\,\omega\Big(t\,(x_\nu - a)\Big)}{\sum\limits_{\nu} p_\nu\overline{\omega}}$$

Т. к. знаменатель—положительное число, не зависящее от переменных a и t, то мы его отбросим и будем писать:

$$T(a,t) = \sum_{\nu} p_\nu\,\omega\Big(t\,(x_\nu - a)\Big).$$

Очевидно, T непрерывна и не отрицательна при каких угодно a и t. Мы убедимся, что в некоторых случаях эта функция очень энергично осциллирует.

Задачу темперации системы точек $E(x_\nu)$ с весами p_ν посредством функции $\omega(x)$ мы будем видеть в определении minimum'а minimorum темперационной функции $T(a, t)$ при t положительном и не превышающем заранее выбранного числа t_0. (Тривиальное решение $t = o$ в счет не идет). Нетрудно убедиться, что, если расстояния точек $x_{\nu_1} x_{\nu_2}$ не имеют общей меры, то искомый minimum отличен от нуля.

Специализируя условия, мы получаем ряд математических задач. Интересно заметить следующие обстоятельства (для простоты фиксируем a priori начальный член прогрессии: $a = 0$).

1) Гармоническая темперация геометрической прогрессии точек $x_\nu = \alpha^\nu$ с весами $p_\nu = \beta^\nu$ $(o < \beta < 1;\ \nu = 1,\ 2 \cdot \cdot \cdot)$ приводит к темперационной функции не имеющей ни в одной точке производной (при $\alpha \beta > 1$), указанной Weierstrass'ом:

$$f(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta^\nu \cos 2\pi t \alpha^\nu$$

2) Любая функция, разлагающаяся в данном промежутке в ряд Фурье, при допущении отрицательных весов, может быть рассматриваема, как темперационная функция прогрессии $x_\nu = \nu$ $(\nu = 1, 2 \cdot \cdot \cdot)$ (гармоническая темперация).

Перейдем к задаче темперации музыкального строя. Пусть тон определенной высоты принят за основной. Если числа его колебаний в секунду примем за единицу, то числа колебаний всех „родственных“ тонов выразятся всеми рациональными числами.

$$i/j \quad (i, j = 1, 2 \cdot \cdot \cdot)$$

В выборе весов заключается известная произвольность. Проще всего принять за вес тона i/j число

$$p_{ij} = \frac{1}{i^\sigma j^\sigma},$$

где непременно $\sigma > 1$ (для сходимости ряда); в остальном же выбор σ зависит от того, какое преимущество в смысле желательности точной интонации мы отдаем более „родственным“ тонам по сравнению с менее „родственными“. Эту систему тонов мы желаем подвергнуть темперации посредством ряда равноотстоящих (в смысле равенства интервалов) тонов, числа колебаний которых, очевидно, составляют геометрическую прогрессию. Перейдем к логарифмам. Тогда получим систему $E(\lg {}^i/_j)$ с весами $p_{ij} = i^{-\sigma} j^{-\sigma}$ $(i, j \geq 1)$, которую требуется темперировать равномерно т.-е. с помощью арифметической прогрессии.

В таком случае темперационная функция принимает замечательный вид. Именно (пользуясь гармонической темперацией и отбрасывая постоянное слагаемое и положительный множитель) получаем:

$$-T(a,t)=\sum_{i,j}\frac{\cos 2\pi t(\lg {}^{i}/_{j}-a)}{i^{\sigma}\, j^{\sigma}}=\sum_{i,j}\frac{\cos\ \tau(\lg {}^{i}/_{j}-a)}{i^{\sigma}\, j^{\sigma}},$$

где $\tau=2\pi t$

Далее:

$$-T(a,t)=\cos\tau a\sum_{i,j}\frac{\cos\tau\lg {}^{i}/_{j}}{i^{\sigma}\, j^{\sigma}}+\sin\tau a\sum_{i,j}\frac{\sin\tau\lg {}^{i}/_{j}}{i^{\sigma}\, j^{\sigma}}=$$

$$=\cos\tau a\sum\frac{\cos\tau\lg {}^{i}/_{j}}{i^{\sigma}\, j^{\sigma}}$$

Но $$\sum_{i,j}\frac{\cos\tau\lg {}^{i}/_{j}}{i^{\sigma}\, j^{\sigma}}=\left|\sum_{n}\frac{1}{n^{\sigma+i\tau}}\right|^2=\left|\sum_{n}\frac{1}{n^{s}}\right|^2=\zeta(s)^2,$$

где $\zeta(s)$ — введенная B. Riemann'ом функция

$$\zeta(s)=\sum\frac{1}{n^{s}}\qquad(s=\sigma+i\tau),$$

известная своими приложениями в аналитической теории чисел. Ряд Dirichlet, которым она определяется, сходится в полуплоскости $\sigma>1$. Итак:

$$-T(a,t)=|\zeta(s)|^2\cos at$$

Т. к., как известно, функция $\zeta(s)$, будучи голоморфна в полуплоскости $\sigma>1$, не имеет в ней нулей, то при определенном t, чтобы T имело minimum, выберем

$$a=0.$$

Тогда $$-T(0,t)=|\zeta(s)|^2$$

Итак, при заранее установленном σ (т.-е. на прямой, параллельной мнимой оси в комплексной плоскости $s=\sigma+i\tau$) и при τ не превышающем некоторого определенного предела, надо искать точки s, в которых модуль $\zeta(s)$ будет maximum.

При не гармонической темперации результаты получаются более сложные. Так, при модулярной темперации:

$$a=0$$

$$-\frac{\pi^2}{2}T(0,t)=\sum_{n}\frac{1}{n^2}\left|\zeta^2(\sigma+in\tau)\right|.$$

В наиболее общем случае нельзя быть даже уверенным в том, что $a = 0$.

Можно, оставаясь при гармонической темперации, видоизменить выбор весов. Именно, пусть имеем ряд чисел

$$\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \varkappa_3 \cdot \cdot \cdot \cdot \geqslant \varkappa \geqslant \cdot \cdot \cdot > 0,$$

убывающих достаточно быстро, чтобы употребляемые в дальнейшем ряды были сходящимися, в остальном произвольных. Пусть выбрано и число $\sigma > 1$. Всю систему точек E разобьем на классы. К первому классу отнесем все обертоны и унтертоны основного тока (точки $\lg n_1$ и $\lg 1/n_1$ с весами $\varkappa_1/n_1^\sigma$); ко второму—все обертоны и унтертоны тонов первого класса (точки $\lg n_1 n_2$, $\lg n_1/n_2$, $\lg n_2/n_1$, $\lg 1/n_1 n_2$ с весами $\varkappa_2/n_1^\sigma n_2^\sigma$); вообще к m-ому классу отнесем все обертоны и унтертоны m—1-го класса (точки

$$\lg n_1 n_2 \cdot \cdot \cdot n_m,\ \lg \frac{n_1 n_2 \cdot \cdot \cdot n_{m-1}}{n_m}, \cdot \cdot \cdot \lg \frac{n_2 \cdot \cdot \cdot n_m}{n_1},\ \lg \frac{n_1 \cdot \cdot \cdot n_{m-2}}{n_{m-1} n_m} \cdot \cdot \cdot$$

$$\left. \lg \frac{1}{n_1 n_2 \cdot \cdot \cdot n_m} \text{ с весами } \frac{\varkappa_m}{n_1^\sigma n_2^\sigma \cdot \cdot \cdot n_m^\sigma} \right).$$

Числа n_i пробегают все целые положительные значения. Одна и та же точка рассматривается, как принадлежащая различным классам и даже как принадлежащая бесконечное число раз одному и тому же классу.

Составим темперационную функцию:

$$T = \sum_1^\infty T_m,$$

где T_m — та часть T, которая связана с точками m-го класса. Именно

$$-T_m = \varkappa_m \sum \sum \frac{\cos \tau (\pm \lg n_1 \pm \lg n_2 \cdot \cdot \cdot \pm \lg n\ - a)}{n_1^\sigma n_2^\sigma \cdot \cdot \cdot n_m^\sigma}$$

$$= \varkappa_m \cos a\tau \sum \sum \frac{\cos \tau (\pm \lg n_1 \cdot \cdot \pm \lg n_m)}{n_1^\sigma n_2^\sigma \cdot \cdot \cdot n_m^\sigma} +$$

$$\left. + \varkappa_m \sin a\tau \sum \sum \frac{\sin \tau (\pm \lg n_1 \pm \cdot \cdot \cdot \mp \lg n_m}{n_1^\sigma n_2^\sigma \cdot \cdot \cdot n_m^\sigma} \right),$$

причем в двойных суммах первая распространяется на все целые положительные значения $n_1, \cdot \cdot \cdot n_m$, вторая — на все комбинации знаков $\pm$.

Обозначим:

$$C_m = \sum_{\pm} \cos(\pm\theta_1 \pm \cdot \cdot \cdot \pm \theta_m) \quad S_m = \sum_{\pm} \sin(\pm\theta_1 \pm \cdot \cdot \pm\theta_m).$$

Очевидно $S_m = 0$. Что же касается C_m, то

$$C_m = \sum_{\mp} \cos(\pm\theta_1 \pm \cdot \cdot \pm \theta_m) = \sum_{\mp} \cos(\pm\theta_1 \pm \cdot \cdot \pm \theta_{m-1} + \theta_m) +$$

$$+ \sum_{\mp} \cos(\pm\theta_1 \pm \cdot \cdot \pm \theta_{m-1} - \theta_m) =$$

$$= 2 \sum_{\mp} \cos(\pm\theta_1 \pm \cdot \cdot \pm \theta_{m-1}) \cos\theta_m = 2\, C_{m-1} \cos\theta_m,$$

так что $C_m = 2^m \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cdot \cdot \cdot \cos\theta_m$.

Вернемся к T_m:

$$-T_m = \varkappa_m \cos a\tau \sum_{n_1 .. n_m} \frac{2^m \cos\tau \lg n_1 \cdot \cdot \cdot \cos\tau \lg n_m}{n_1^{\sigma} \cdot \cdot \cdot n_m^{\sigma}} =$$

$$= 2^m \varkappa_m \cos a\tau \left(\sum \frac{\cos\tau \lg n}{n^{\sigma}} \right)^m = 2^m \varkappa_m \cos a\tau . \left[R\zeta(s) \right]^m$$

($R\, a$ = вещественная часть a), так что

$$-T = -\sum_m T_m = \sum_m \varkappa_m u^m \cos\tau, \text{ где } u = 2R\zeta(s).$$

Если $R\zeta(s) > 0$ (что, наверное, имеет место при $\sigma \geqslant 2$), то, очевидно, придется взять $a = 0$ и искать τ, придающее maximum $R\zeta(s)$ на прямой, параллельной мнимой оси,—независимо от чисел $\varkappa_m$.

Таким образом, при первой системе выбора весов приходится искать maxima $|\zeta(s)|$ на прямой σ=const., при второй—maxima $R\zeta(s)$ на той же прямой.

Переходя к вычислениям, заметим, что на значения τ должно быть на практике наложено еще одно важное ограничение: τ должно быть кратным $\frac{2\pi}{\lg 2}$. Это вытекает из того, что при конструкции скалы мы вряд ли откажемся от чистых октав, так что темперация должна непременно делить октаву на целое число частей (N), Поэтому

$$\lg 2 = N d = \frac{N}{t} = \frac{2\pi N}{\tau}, \text{ откуда } \tau = \frac{2\pi N}{\lg 2}.$$

Что касается пределов, в которых может изменяться число N, то можно считать обязательным условие

$$N < 60;$$

даже темперация $N=40$ уже была бы весьма громоздкой и мало удобной. Ведь все же приходится иметь в виду исполнителя-импровизатора, физические способности которого очень ограничены.

Известное преобразование дает:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}},$$

где произведение распространяется на все простые числа.

Далее

$$-\lg \zeta(s) = \sum_p \lg\left(1-\frac{1}{p^s}\right),$$

$$\lg \zeta(s) = \sum_p \sum_n \frac{1}{np^{ns}},$$

и разделяя вещественную и мнимую части и подставляя значение τ: получим:

$$\lg \zeta(s) = \sum_p \sum_n \frac{\cos 2\pi n \frac{\lg p}{\lg 2} N}{np^{n\sigma}}$$

$$\arg \zeta(s) = -\sum_p \sum_n \frac{\sin 2\pi n \frac{\lg p}{\lg 2} N}{np^{n\sigma}}$$

Эти формулы особенно удобны для вычислений. Из них мы получим и

$$R\left[\zeta(s)\right] = \left|\zeta(s)\right| \cos \arg \zeta(s).$$

Заметим, что

$$\arg \zeta(s) < \sum_p \sum_n \frac{1}{np^{n\sigma}} = -\sum_p \lg\left(1-\frac{1}{p^\sigma}\right) = \lg \zeta(\sigma).$$

Поэтому при σ весьма больших $\arg \zeta(s)$ мало отличается от нуля, $\cos \arg \zeta(s)$ близко к единице, так что оба способа выбора весов дают практически почти одинаковые результаты.

Если σ весьма велико, то главную часть ряда, представляющего $\lg |\zeta(s)|$, дает член

$$\frac{\cos 2\pi \frac{\lg 3}{\lg 2} N}{3^\sigma}$$

Определяя наибольшие значения его при целых N, мы должны добиваться, чтобы $\frac{\lg 3}{\lg 2} N$ возможно меньше отличалось от целого числа, а это сводится к разысканию знаменателей подходящих дробей к $\frac{\lg 3}{\lg 2}$. Эти подходящие дроби таковы:

$$1,\ 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{8}{5},\ \frac{19}{12},\ \frac{65}{41},\ \frac{84}{53},\ \frac{485}{306}\ \ldots$$

Температия $N = 5$ составляет так называемую „сиамскую" гамму.

Температия $N = 12$ — наша общеупотребительная температия.

Температия $N = 53$ была указана Helmholtz'ем. Она обладает тем свойством, что и член

$$\frac{\cos 2\pi \frac{\lg 5}{\lg 2} N}{5^\sigma}$$

в ней оказывается весьма малым.

Температия $N = 41$, насколько мне известно, никем предложена не была.

Нет основания, однако, принимать σ бесконечно большим — это равносильно игнорированию всех обертонов, кроме простейшего — квинты.

Для определенности мы положим $\sigma = 2$, т.-е. будем считать вес обертона обратно пропорциональным квадрату его порядка.

Чтобы ориентироваться в относительных преимуществах и недостатках различных температий, в дальнейшем составлена табличка, охватывающая значения N от 12 до 60, и приблизительно оценивающая 5 главных членов:

$$\frac{\cos 2\pi \frac{\lg p}{\lg 2} N}{p^\sigma} \quad (p = 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13)\ ^{1)}.$$

Именно, числа $\frac{\lg p}{\lg 2} N$ разделены на 5 классов, причем к 1-му классу отнесены те из них, которых первый десятичный знак после запятой есть 0 или 9, ко 2-му — 1 или 8, к 3-му — 2 или 7, к 4-му — 3 или 6, наконец, к 5-му — 4 или 5. Эти классы и указываются в табличке.

---

1) Члены с $p > 13$ просто отбрасываются. Это означает, что вес тона i/j принимается равным нулю, если i или j содержат множителем простое число > 13. Получаемые результаты должны рассматриваться, как приближенные.

	P						P						P				
N	3	5	7	11	13	N	3	5	7	11	13	N	3	5	7	11	13
12	1	2	4	5	5	29	1	4	5	4	4	46	2	2	2	2	3
13	5	2	5	1	2	30	5	4	3	3	1	47	5	2	1	5	1
14	2	5	4	5	2	31	2	1	1	3	3	48	1	5	3	1	4
15	3	2	2	2	5	32	4	4	2	3	5	49	4	3	5	5	4
16	4	2	1	4	3	33	3	4	4	2	2	50	3	1	4	1	1
17	1	5	3	2	1	34	2	1	5	4	2	51	3	5	2	5	3
18	5	3	5	3	4	35	5	3	3	1	5	52	4	3	1	2	5
19	2	2	4	3	4	36	1	5	1	5	3	53	1	1	3	4	2
20	4	5	2	2	1	37	4	1	2	1	1	54	5	4	5	2	2
21	3	3	1	4	3	38	3	3	4	5	4	55	2	3	5	3	5
22	2	1	3	2	5	39	3	5	5	1	4	56	3	1	3	3	3
23	5	5	5	5	2	40	4	2	3	4	1	57	4	4	1	2	1
24	1	3	4	1	2	41	1	2	2	2	3	58	2	4	2	4	4
25	4	1	2	5	5	42	5	5	1	3	5	59	5	1	4	2	4
26	2	4	1	1	3	43	2	2	3	3	2	60	1	4	5	5	1
27	3	4	3	5	1	44	3	2	5	3	2						
28	4	1	4	2	4	45	3	5	4	4	5						

Внимательное рассмотрение таблички приводит нас к наиболее интересным темперациям: $N=31$, 41 и 53. К ним прибавим употребительную $N=12$ (по полутонам) и $N=24$ (по четвертям тонов), а также для контраста — как одну из плохих темпераций — $N=42$.

Вот результаты выкладки:

N	31	41	53	12	24	42
$\lvert\zeta(s)\rvert$	1,523	1,547	1,564	1,501	1,477	1,179

$R\zeta(s)$ только тысячными долями отличается от $\lvert\zeta(s)\rvert$. К этому добавим, что при любом τ, соответствующем целому N:

$$\lg\frac{16}{9} - \lg\zeta(2) = \sum_{n}\frac{1}{n.\,4^n} - \sum_{p\geq 3}\sum_{n}\frac{1}{np^{2n}} < \lg\lvert\zeta(2+i\tau)\rvert < \sum_{p,n}\frac{1}{np^{2n}} = \lg\zeta(2),$$

т. - е.

$$1{,}079\ldots = \frac{16}{9\zeta(2)} < \lvert\zeta(2+i\tau)\rvert < \zeta(2) = 1{,}644\ldots$$

(пределы не достигаются).

Эти цифры говорят, что темперации 53 и 41 имеют безусловные преимущества в теоретическом отношении, однако, несомненно, слишком громоздки и вряд ли будут пользоваться успехом на практике. Напротив, темперации 24 и 31 требуют увеличения числа клавиш всего лишь в 2—2½ раза и, кроме того, обладают практическими удобствами. Укажу лишь на то, что обе они очень легко позволяют сохранить преемственную связь с 12-ти тонной темперацией как в смысле устройства клавиатуры, так и в смысле нотации.

Вот каковы, наконец, абсолютные прогрешности простейших обертонов в рассмотренных темперациях, выраженные в тысячных долях полутона.

N	3	5	7	11	13
31	52	8	11	94	111
41	3	59	33	46	80
53	1	14	47	79	28
12	20	137	312	487	405
24	20	137	188	13	95
42	123	137	26	85	120

В темперации 31, как видно, сравнительно нечистой оказывается квинта. Ее погрешность, в $2^1/_2$ раза превышая погрешность квинты же в темперации 12,—почти в 3 раза, однако, меньше чем погрешность терции в темперации 12. Повидимому, с этим недостатком, за неимением лучшего выбора, можно было бы мириться.

Очень желательно попытаться применить темперацию 24 и особенно 31 к конструкции фортепиано. Гармоническое обогащение инструмента не только послужит стимулом к оживлению творческой деятельности композиторов, но и даст возможность в новом освещении взглянуть на музыку недавнего прошлого.

Résumé

Sur la température uniforme.

On part d'un problème mathématique suivant: étant donné un ensemble de points E sur une droite (fini ou dénombrable), il faut déterminer une répartition de points coïncidants avec ceux d'une progression arithmétique à différence bornée inférieurement et éloignés le moins possible des points de l'ensemble donné (la „distance généralisée" et les „poids" étant donnés à priori). La méthode, liée à celle des moindres carrés, mène à considérer la fonction (dite de température), oscillant en général assez fort, et dont il s'agit de déterminer les minima dans un intervalle fini. (Les conditions initiales particulières nous donnent par exemple la fonction bien connue de Weierstrass n'ayant pas de dérivée).

Ce résultat est appliqué à la recherche des températions des instruments musicaux plus fines que celle de S. Bach. En spécifiant convenablement les conditions initiales on est conduit á la détermination des maxima soit du module soit de la partie réelle de la fonction de Riemann ζ (s) sur une droite σ=const. Le calcul montre que (outre la température 53 connue depuis longtemps) les températions 31, 41, 24 sont à regarder comme préférables.