Изостатический слой с точки зрения теории упругости.

Б. Герасимович.

§ 1. Изостатическая гипотеза.

В основании изостатической теории строения ближайшего к поверхности слоя земли (будем называть его корою) лежит предположение о том, что внутри его массы расположены симметрично по отношению к рельефу земной поверхности—в том смысле, что под континентами и горными массивами имеет место относительное уменьшение плотности коры, наоборот, под океаническими бассейнами эта плотность больше. К этой идее о неравенствах распределения масс внутри коры, компенсирующих неравенства рельефа, можно подойти разными путями.

Она зародилась в связи с теорией Lowthian'a Green'a о тетраэдрической форме твердого ядра земли—реальное же значение она получила благодаря результатам определения тяжести, указавших на существование внутри коры неравенств, компенсирующих в значительной части неравенства тяжести, являющиеся следствием существования земного рельефа. Таким образом, к изостатической теории мы подходим, логически развивая данные геодезии. Однако, мы можем идти и другим путем. Еще в 1882 г. G. Darwin[1]), вычисляя разрывные силы, развиваемые внутри однородной земли весом неравенств ея рельефа, нашел их лежащими около тех критических значений, при переходе через которые происходит разрыв почти всех известных нам материалов. Вывод G. Darwin'a, не оставшийся, впрочем, без возражений принципиального характера, заставил, однако, думать, что в основе его лежала неправильная предпосылка об однородности земной коры, что, введя компенсирующее влияние внутренних неравенств, можно добиться значительного уменьшения соответствующих разрывных сил, вызываемых неравенствами рельефа.

Весь вопрос заключается в том, каков закон распределения масс внутри коры.

---

[1]) Philos. Trans. Vol 173.

Конечно, наблюденные значения тяжести не позволяют нам сделать заключения о законе распределения плотности в коре, ибо одним и тем же потенциалом на поверхности земли может обладать бесконечное число систем распределения масс внутри коры. Однако, новые предположения, чисто физического характера, делают этот вопрос более определенным.

Так, при определенных гипотезах, на основании уклонений отвеса, Hayford нашел толщину изостатического слоя равной 113 км., Helmert из наблюдении тяжести—118 км. Нечего, конечно, говорить, о том, что результаты эти чрезвычайно гипотетичны и неточны.

Допуская полную компенсацию тяжести рельефа, т.-е. идеальную изостазию, нужно принять два предположения об изостатическом слое.

Во первых: средняя поверхность земли (отвлекаясь от сфероидальности ее) есть поверхность уровня и, во вторых, такою же поверхностью является сферическая поверхность, ограничивающая изостатический слой „снизу“. Эти два предположения, конечно, не позволяют нам определить строго аналитически закон изменения плотности в коре; однако, как я покажу, они допускают вычисление первых двух членов в разложении плотности по степеням расстояния от внутренней границы изостатического слоя.

Результат G. Darwin'а, с точки зрения теории изостазии, был пересмотрен Love [1]). Love подчиняет потенциал неравенств тому условию, что он равен нулю на обоих ограничивающих слой поверхностях; на внутренней поверхности, кроме того, равна нулю и производная этого потенциала. Эти условия, конечно, не определяют потенциала внутри слоя,—поэтому Love принимает для него совершенно произвольную функцию, удовлетворяя поставленным условиям введением соответствующих множителей. Получив отсюда аналитически полный, но произвольный закон распределения масс внутри коры, Love, принимая, что на внутренней поверхности слоя неравенства давления равны нулю, равно как и касательная упругая сила, находит разрывные силы во много раз меньшие тех, которые вычислил G. Darwin—величина их, при самых смелых предположениях о прочности материалов коры, вполне обеспечивает устойчивость упругого равновесия земного шара. Результат Love очень интересен; однако, то обстоятельство, что он пользуется произвольным законом распределения масс, по существу, значительно уменьшает ценность вывода. Может, например, случиться, что действительный закон изостазии формально не обеспечивает устойчивого равновесия, что возможность последнего не есть следствие изостазии, но других, не учтенных ни Darwin'ом, ни Love факторов. Поэтому, представляется важным показать, что упругое равновесие не только допускается, как возможность, при принятой гипотезе изостазии,

---

[1]) Some problems of geodynamics, гл. II. Cambridge. 1911 г.

благодаря свободе выбора между различными законами распределения масс, но есть необходимое следствие того приближенного закона, который вытекает из основных посылок изостатической теории.

Таким образом, наша задача будет заключаться в приближенном определении закона распределения масс внутри коры, а затем вычислении самых разрывных упругих сил.

§ 2. О законе распределения плотности внутри земной коры.

Мы будем делать об изостатическом слое следующие предположения:

Неравенство земного рельефа мы рассматриваем как некоторое распределение масс на поверхности сферической земли радиуса a. Это неравенство мы мыслим гармоническим, т.-е. выражающимся рядом типа $\varrho_1 \Sigma h_n S_n$, где ϱ_1 плотность горных пород, S_n - шаровая функция n порядка, h_n - амплитуда соответствующего неравенства.

Как показывает гармонический анализ земного рельефа для малых n (1, 2, 3), S_n мало зависит от угла долготы, так что мы можем считать эту функцию зональной, причем, разумеется, полюса неравенств различных порядков не совпадают[1]). Плотность неравенства будем принимать равным средней плотности коры.

Изостатический слой построен следующим образом. Он соединяет в себе две системы распределения масс. Во первых—постоянную плотность ϱ_1 (считаем ее независимой от радиуса в виду тонкости слоя) и, во вторых, плотность ϱ' — функцию радиуса и полярного угла (по отношению к оси соответствующ. шаровой функции) — последнее распределение таково, что компенсирует собой совершенно в изостатическом смысле поверхностное неравенство.

Таким образом, плотность внутри слоя будет

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho' = \varrho_1 + \sum A_n(r) S_n \quad \ldots . [A]$$

где $A_n(r)$ функция только радиуса, S_n - зональная шаровая функция.

Пусть радиус земли—a, радиус внутренней поверхности изостатического слоя — x, между $r = 0$ и $r = x$ распределение масс есть функция одного r; — эту область, в противоположность коре, будем называть ядром.

Основная гипотеза изостазии заключается в том, что

1) Поверхность $r = a$ изопотенциальна,

2) Поверхность $r = x$ изопотенциальна.

---

[1]) По Love (Proc. R. Soc. London 1908 г.) максимум S_1 около точки $\varphi = +23^0$; $\lambda = 30^0$ (от Гринв.); максимум S_2 около $\varphi = -75^0$, $\lambda = 15^0$; максимум S_3 около $\varphi = +15^0$; $= 35^0$. Ампл. h_n около 2 кл.

Как следствие этого, мы, пренебрегая квадратом толщины коры, находим в согласии с гипотезой геодезистов, что сумма гармонических масс внутри вертикального столба от $r = x$ до $r = a + \Sigma h_n S_n$ равна нулю.

Определим потенциал на точку коры двух неравенств—поверхностного и об'емного. Потенциал поверхностного на сфере распределения масс $\varrho_1 \Sigma h_n S_n$, если ограничиться неравенством только n порядка, на внутреннюю точку, как известно, выражается формулой [1])

$$V_s = \frac{4\pi \gamma r^n \varrho_1 h_n S_n}{(2n+1) a^{n-1}}$$

где γ—постоянная тяготения. Формула эта действительна и для самой поверхности.

Об'емное распределение плотности ϱ' дает потенциал на ту же внутренюю точку слоя r для n-й шаровой функции [2])

$$V^1 = \frac{4\pi \gamma S_n}{(2n+1)} \left[r^n \int_r^a s^{-n+1} A_n(s)\, ds + r^{-n-1} \int_x^r s^{+n+2} A_n(s)\, ds \right].$$

Если V_0 есть потенциал на ту же точку ядра и постоянного распределения плотности ϱ_1 в коре, то полный потенциал в данной точке слоя:

$$V = V_0 + V^1 + V_s.$$

причем V_0 от полярного угла не зависит. Если положить:

$$V_s = W_s S_n$$
$$V^1 = W^1 S_n$$
$$V = V_0 + (W^1 + W_s) S_n$$

то изостатическая гипотеза выразится равенствами

$$W_s + W^1 = 0 \quad \text{на } r = a \tag{1}$$
$$W_s + W^1 = 0 \quad \text{на } r = x \tag{2}$$

Если бы слой был бесконечно тонок, потенциал гармонических масс на точку ядра равнялся бы нулю, по смыслу теории притяжения (δ) тонкого шарового слоя на внутреннюю точку. Предполагая функцию $A_n(r)$ непрерывной, мы должны положить $A_n(x) = 0$, а если так, то и при конечной толщине коры, потенциал гармонических масс на точки

---

[1]) Tomson's Natural philosophy, II p. 84.

[2]) Tomson's. Natural philosophy, II. p. 88.

ядра будет нулем. В самом деле, если U_0 потенциал в центре шара радиуса x от масс, лежащих вне него, если U его значение в точке поверхности $r = x$, то, по теореме Гаусса о среднем потенциале, имеем

$$U_0 = \int \frac{U\, d\sigma}{4\pi x^2}$$

где интегрируем по сфере. В нашем случае гармонические массы лежат вне сферы радиуса x, и потенциал от них на поверхности ее есть нуль; равен нулю, следовательно, и потенциал на центр сферы, и, по свойству гармонических функций, он будет нулем везде внутри ядра. Таким образом, гармонические неравенства не влияют на распределение масс внутри ядра.

Наша задача заключается в определении $A_n(r)$. Предположим, что эта функция разложима в ряд по степепям $y = r - x$, т.-е. расстояния от внутренней поверхности коры. Тогда

$$A_n(r) = \varrho_1 \left[\alpha_n y + \beta_n y^2 + \gamma_n y^3 + \cdots \right].$$

Условие (1) дает:

$$\int_x^a r^{n+2} A_n(r)\, dr = - h_n a^{n+2} \varrho_1.$$

Условие (2) дает:

$$\int_x^a r^{-n+1} A_n(r)\, dr = - h_n a^{-n+1} \varrho_1.$$

Эти уравнения позволяют нам определить два члена в разложении $A_n(r)$. Положим:

$$a - x = l$$

где l толщина слоя.

Преобразуя интегралы к переменному y, и ограничиваясь при интеграции низшими степенями l, допускающими определение α_n, β_n, из первого уравнения получаем:

$$x^n \left[\alpha_n x^2 \frac{l^2}{2} + \frac{(n+2)\alpha_n x l^3}{3} + \beta_n \frac{x^2 l^3}{3} \right] = - h_n a^{n+2}.$$

Второе уравнение дает:

$$x^{-n-1} \left[\alpha_n x^2 \frac{l^2}{2} - \frac{(n-1)\alpha_n x l^3}{3} + \beta_n \frac{x^2 l^3}{3} \right] = - h_n a^{-n+1}.$$

Положим:

$$\alpha'_n = \alpha_n a;\ \beta'_n = \beta_n a^2;\ t = \frac{1}{a},\ h'_n = \frac{h_n}{a},\ \text{т.-е.}$$

$$A_n(r) = s_1 \left[\alpha'_n \frac{y}{a} + \beta_n' \frac{y^2}{a^2} + \cdot\cdot\cdot \right] \cdot\cdot\cdot [B]$$

Тогда, преобразуя полученные результаты, имеем:

$$\alpha'_n \left[\frac{t^2}{2} - \frac{(n+2)}{6} t^3 \right] + \beta'_n \frac{t^3}{3} = -h'_n$$

$$\alpha'_n \left[\frac{t^2}{2} - \frac{(n+2)}{3} t^3 \right] + \beta'_n \frac{t^3}{3} = -h'_n \left[1 - (n+1)t + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n+1)}{2} t^2 - \frac{n(n^2-1)}{6} t^3 + \ldots \right].$$

И отсюда:

$$\alpha'_n \frac{(n+2)}{6} t^2 = -h'_n \left[(n+1) - n(n+1)\, t/2 + \frac{n(n^2-1)}{6} t^2 + \cdot \quad \cdot \right].$$

$$\beta'_n \frac{t^3}{3} = h'_n \left[\frac{2n+1}{n+2} - \frac{(n+1)(5n+4)}{2(n+2)} t + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2(n+2)} t^2 - \frac{n(n^2-1)}{6} t^3 - \ldots \right]$$

В частных случаях:

При $n = 1$ $\quad \alpha'_1 \frac{t^2}{2} = -h'_1 (2 - t);\ \frac{\beta'_1}{3} t^3 = h'_1 (1 - 3t + t^2)$

при $n = 2$ $\quad \alpha'_2 \frac{t^2}{3} 2 = -h'_2 (3 - 3t + t^2);\ \beta'_2 \frac{t^3}{3} =$

$$= h'_2 \left[\frac{5}{4} - \frac{21}{4} t + \frac{15}{4} t^2 - t^3 \right].$$

При $n = 3$ $\quad \alpha'_3 t^2 \frac{5}{6} = -h'_3 (4 - 6t + 4t^2);\ \beta^1_3 \frac{t'^3}{3} =$

$$= h'_3 \left[7/5 - \frac{38}{5} t + \frac{42}{5} t^2 + 4t^3 \right].$$

По данным геодезии $l = 120$ км.. т.-е. t около $1/50$. Далее, без ощутительной погрешности можно принять $h_1 = h_2 = h_3 = 2$ км., т.-е.

$h'_1 = h'_2 = h'_3 = \frac{1}{3180}$ и тогда выражение приближенного закона плотности в коре будет:

$$n=1 \quad \varrho = \varrho_1 \left[1 + \left(-3.1 \frac{y}{a} + 117 \frac{y^2}{a^2} + \cdots \right) S \right].$$

$$n=2 \quad \varrho = \varrho_1 \left[1 + \left(-3.5 \frac{y}{a} + 86 \frac{y^2}{a^2} + \cdots \right) S_2 \right] \quad [C].$$

$$n=3 \quad \varrho = \varrho_1 \left[1 + \left(-3.8 \frac{y}{a} + 140 \frac{y^2}{a^2} + \cdots \right) S_3 \right].$$

Полученный ряд сходится у поверхности довольно плохо, при малых y он сходится хорошо. Ясно, что поверхности равной плотности идут симметрично по отношению к рельефу, являясь его искаженным зеркальным отражением. Различие плотности у полюса и экватора неравенства очень мало — оно максимально у самой поверхности и равно для $n=2$ лишь $0.05\varrho_{,}$, где $\varrho_{,}$ — средняя плотность коры.

Итак, точный закон изменения плотности в коре, конечно, остается неизвестным, однако, сделанные выше предположения позволили нам определить его приближенно, в смысле двух первых членов предполагаемого сходящегося ряда. Этих сведений для дальнейшего анализа будет достаточно.

§ 3. Влияние изостазии на моменты инерции земного сфероида.

Как известно, между значением основной функции моментов инерции земного сфероида $\frac{A-C}{C}$, к которому приводит гидростатическая теория строения земли, и значением, полученным из наблюдений (посредством постоянных прецессии и нутации) существует различие, большее, чем этого можно было бы ожидать [1]). Такое же, но значительно большее различие существует и для $\frac{A-C}{C}$ луны, получаемого по гидростатической теории и из наблюденных коэффициентов либрации, последнее Laplace об'яснял влиянием горных неравенств луны на ее моменты инерции. Посмотрим, можно ли об'яснить эту невязку для земли существованием изостатических неравенств.

Нетрудно, однако, видеть, что главные моменты инерции гармонических неравенств равны нулю. В самом деле, центр тяжести неравенств совпадает с центром шара. Главной осью, следовательно, будет ось полярная и любая ось в экваториальной плоскости соответствующего

[1]) Poincaré. Figures d'equilibre p. 91-95.

неравенства. Для получения главных моментов инерции придется взять интеграл типов.

$$\int_0^{\pi/2} S_n(\theta) \operatorname{Sin}^3\theta \, d\theta \quad \text{и} \quad \int_0^{\pi/2} S_n(\theta) \operatorname{Sin}\theta \cos^2\theta \, d\theta,$$

где θ - полярный угол относительно оси неравенства. Полагая $\operatorname{Cos}\theta = \mu$, преобразуем их к виду

$$\int_{-1}^{+1} \mu^2 S_n(\mu) \, d\mu \quad \text{и} \quad \int_{-1}^{+1} S_n(\mu) \, d\mu$$

Последний интеграл, по теории шаровых функций, равен нулю. Равенство нулю первого интеграла доказываем, пользуясь рекурентной формулой Гаусса-Бонне:

$$(n+1) S_{n+1}(\mu) - (2n+1) \mu S_n(\mu) + n S_{n-1}(\mu) = 0$$

Итак, главные моменты инерции неравенства равны нулю. Поэтому, будут нулями и моменты инерции относительно главных осей инерции земного сфероида, т.-е. $\frac{A - C}{C}$ изостазией не меняется и ею указанная невязка не об'ясняется.

§ 4. Решение уравнений теории упругости для изостатического слоя.

Полученный выше приближенный, но не произвольный закон изменения плотности внутри коры позволяет нам поставить на реальную почву вопрос об упругих разрывных силах, вызываемых внутри земли весом поверхностных неравенств.

Наши дальнейшие предположениям об упругом режиме внутри земли будут заключаться в следующем:

Ядро построено гидростатически, т.-е. усилия внутри него—гидростатические давления, которые, по предыдущему, являются функциями только радиуса. Относительно закона изменения плотности ядра мы никаких предположений не делаем, кроме того, что плотность ядра при $r = x$ равна плотности коры.

Таким образом, область, где упругие силы могут быть растяжением или касательными усилиями, ограничивается корою. Упругое равновесие коры поддерживается на $r = x$ гидростатическим давлением и на поверхности $r = a$ весом неравенств рельефа.

Ближайшая наша задача заключается в вычислении упругих сил внутри коры. Решение этой задачи, однако, осложняется тем, что к ней не приложима обычная теория упругости.

В самом деле, последняя существенно предполагает, что до действия поверхностных деформирующих сил тело находилось в состоянии свободном от упругих натяжений. Если это условие не осуществляется, но начальные усилия настолько малы, что к ним применим принцип Hook'a, обычная теория упругости приложима в несколько видоизмененном виде. Решая геофизическую задачу упругости мы находимся в несколько ином положении.

Земная кора под влиянием собственного тяготения находится в состоянии начальных усилий, настолько огромных, что приложить к ним принцип Hook'a было бы совершенно неправильно. На это обстоятельство, пренебрегаемое геофизиками, впервые указал Chree[1]) в своей критике указанной работы G. Darwin'a. Возникшую трудность, делавшую совершенно невозможной математическую трактовку вопросов геофизики, разрешил Rayleigh[2]). Он предполагает, что начальное усилие есть гидростатическое давление, что усилия, возникающие вследствие тех или иных дефформаций, малы сравнительно с начальными; тогда эти «добавочные» усилия отделяются от начальных, и теория упругости в обычном виде к ним применима.

Будем считать кору несжимаемой, постоянной упругости. Будем обозначать упругие коэффициенты через λ, μ (обозначение Lamé). Пусть $\triangle$ — коэффициент расширения; пусть p_1 — начальное давление в коре — (p_1, конечно, функция радиуса). Будем решать задачу об упругом равновесии коры в сферических координатах[3]).

Пусть r, φ, ψ сферические координаты точки слоя (широта отнесена к экватору неравенства), ϱ — плотность, причем $\varrho = \varrho_1 + A_n\,(r)\,S_n$

Пусть R_o, Φ_o, ψ_o — компоненты тяготения по осям криволинейной системы координат.

Положим $c = \cos\varphi$; $s = \sin\varphi$.

Тогда общие уравнения равновесия, в преобразованном Lamé[4]) виде, будут:

$$(\lambda + 2\,\mu)\ cr^2\,\frac{d\varDelta}{dr} + \mu\,\left[\frac{d\varGamma}{d\varphi} - \frac{dB}{d\psi}\right] + \varrho\,cr^2\,R_o = 0$$

$$(\lambda + 2\,\mu)\ c\,\frac{d\varDelta}{d\varphi} + \mu\,\left[\frac{dA}{d\psi} - \frac{d\varGamma}{dr}\right] + \varrho\,cr\,\varPhi_o = 0$$

---

[1]) On some applicat. of physics to geology. Phil. Mag. 1891 г.

[2]) Proc. R. Soc. London—1906 г.

[3]) В вопросе об удобстве решения статической задачи теории упругости для однородного шарового слоя мнения разделяются. W. Tomson решает ее в прямоугольных осях; Lamé и Chree предпочитают координаты сферические. Для неоднородного шарового слоя существует единственное решение Love в прямоугольных координатах.

[4]) Lamé. Leçons sur la theorie mathematique d'elasticité, Paris 1852 г. стр. 200.

$$(\lambda + 2\mu)\ \frac{1}{c}\ \frac{d\varDelta}{d\psi} + \mu \left[\frac{dB}{dr} - \frac{dA}{d\varphi}\right] + \varrho\, r\, \varPhi_0 = 0$$

$$\text{здесь } A = \frac{1}{r^2 c} \left[\frac{drV}{d\psi} - \frac{drcW}{d\varphi}\right],$$

$$B = \frac{1}{c}\left[\frac{drcW}{dr} - \frac{dU}{d\varphi}\right] \text{ и } \Gamma = c\left[\frac{dU}{d\varphi} - \frac{drV}{dr}\right].$$

а U, V, W—компоненты деформации по осям. Найця U, V, W, определим и упругие силы по формулам:

$$R_1 = \lambda \triangle + 2\mu \frac{dU}{dr}$$

$$\varPhi_2 = \lambda \triangle + 2\mu \left[\frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{dV}{d\varphi}\right],$$

$$\varPsi_3 = \lambda \triangle + 2\mu \left[\frac{U}{r} - \frac{s}{c}\frac{V}{r} + \frac{1}{rc}\frac{dW}{d\psi}\right].$$

$$\varPhi_3 = \varPsi_2 = \mu \left[\frac{1}{rc}\frac{dV}{d\psi} + \frac{1}{r}\frac{dW}{d\varphi} + \frac{s}{c}\frac{W}{r}\right].$$

$$\varPsi_1 = R_3 = \left[\frac{dW}{dr} - \frac{W}{r} + \frac{1}{rc}\frac{dU}{d\varphi}\right].$$

$$R_2 = \varPhi_1 = \mu \left[\frac{1}{r}\frac{dU}{d\varphi} + \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}\right].$$

$$\triangle = \frac{1}{r^2}\frac{dr^2U}{dr} + \frac{1}{rc}\frac{dcV}{d\varphi} + \frac{1}{rc}\frac{dW}{d\psi}$$

Здесь R_1 — проэкция на r усилия на перпенд. к r площадку.
" R_2 — " " нормальн. к касат. к меридиану пл-ку.
" R_3 — " " нормальн. к касат. к параллели пл-ку.
" $\varPhi_1$ — проэкция на касательн. к меридиану усилия на площадку, перпенд. к r.
" $\varPhi_2$ — " усилия на нормальн. к касат. к мерид. площадку.
" $\varPhi_3$ — " " " нормальн. к касат. к параллели пл-ку.
" $\varPsi_1$ — проэкция на касат. к параллели усилия на перпенд. к r площадку.
" ψ_2 — " " касат. к паралл. усилия на норм. к кас. к мер. площадку.
" ψ_3 — " " касат. к паралл. усилия на норм. к кас. к пар. площадку.

Условие несжимаемости дает:

$$\triangle = 0 \qquad\qquad \lambda \triangle = -p'\ ^{1)}$$

[1]) Love. Lehrbuch d. Elastizität. S. 301.

где p'—гармоническое давление. Ввиду того, что гармонические неравенства зональны, т.-е. не зависят от угла φ, от этого угла будут независимы U, V, W, кроме того $W=0$; присоединяя начальное усилие (гидростатическое давление p_1 — функцию радиуса), ищем систему усилий.

$$R_1 = -p_1 - p' + 2\mu \frac{dU}{dr}$$

$$\Phi_2 = -p_1 - p' + 2\mu \left[\frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{dV}{d\varphi} \right]$$

$$\psi_3 = -p_1 - p' + 2\mu \left[\frac{U}{r} - \frac{s}{c} \frac{V}{r} \right]$$

$$\Phi_3 = \psi_2 = \psi_1 = R_3 = 0\,; R_2 = \Phi_1 = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{dU}{d\varphi} + \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right].$$

Кроме того, так как

$$\triangle = \frac{1}{r} \frac{dr^2U}{dr} + \frac{1}{c} \frac{dcV}{d\varphi} = 0 \qquad (a)$$

очевидно: $\Phi_2 + \varphi_3 + R_2 = -3\,p_1 - 3\,p'$.

Помня, что полный потенциал тяжести равен $V = V_0 + V^1 + V_s$, где V_0 не зависит от φ, получаем уравнения равновесия —

$$-cr^2 \frac{dp_1}{dr} - cr^2 \frac{dp'}{dr} + \mu \frac{d\Gamma}{d\varphi} + c(\varrho_1 + \varrho') \left[\frac{\partial V_0}{\partial r} + \frac{\partial V' + V_s}{\partial r} \right] r^2 = 0$$

$$-c \frac{dp'}{d\varphi^1} - \mu \frac{d\Gamma}{dr} + c(\varrho_1 + \varrho') \left[\frac{\partial (V^1 + V_s)}{\partial \varphi} \right] = 0$$

где

$$\Gamma = c \left[\frac{dU}{d\varphi} - \frac{drV}{dr} \right] \cdot \cdot [\beta].$$

С другой стороны, начальное усилие p_1 связано с V_0 уравнением гидростатики:

$$-\frac{dp_1}{dr} + \varrho_1 \frac{\partial V_0}{\partial r} = 0.$$

Отсюда, пренебрегая квадратом ϱ', имеем окончательно уравнения равновесия:

$$-cr^2 \frac{dp^1}{dr} + \mu \frac{d\Gamma}{d\varphi} + cr^2 \varrho_1 \frac{\partial V^1 + V_s}{\partial r} + cr^2 \varrho' \frac{\partial V_0}{\partial r} = 0 \cdot \cdot \cdot [\gamma]$$

$$c \frac{dp'}{d\varphi} - \mu \frac{d\Gamma}{dr} + c\varrho_1 \frac{\partial V^1 + V_s}{\partial \varphi} = 0 \cdot \cdot \cdot [\delta]$$

Уравнения $(\alpha), (\beta), (\gamma) (\delta)$ должны определить нам U, V, Г и p'.

Так как $V^1 + V_s$ и ϱ' — шаровые функции, определяемые формулами § 1, таковыми должно быть p' и $\frac{1}{c}\frac{d\Gamma}{d\varphi}$.

Поэтому, можно положить,

$$\frac{d\Gamma}{d\varphi} = - c X n (n+1) S_n$$

Где X-ф-iя только r. Но по основному в теории шаровых функций уравнению:

$$\frac{d}{d\varphi} c \frac{dS_n}{d\varphi} + cn(n+1) S_n = 0 \qquad [\alpha^1]$$

Поэтому—

$$\frac{d}{d\varphi} c \frac{dXS_n}{d\varphi} = \frac{d\Gamma}{d\varphi}.$$

Т.-е. $\Gamma = c X \frac{dS_n}{d\varphi} + f(r)$, причем из (δ) видно, что $f(r) = \text{const}$, а по (β) ясно, что $f(r)=0$.

Далее, по (β) видно, что можно положить:

$$U = YS_n ; V = Z \frac{dS_n}{d\varphi}.$$

Кроме того, $p' = \xi S_n$

Y, Z, ξ — функции одного r.

Наша задача — в определении X, Y, Z и ξ.

Деля (γ) на c и дифференцируя по r, дифференцируя (δ) по φ и деля на c, складывая результаты и деля сумму на r^2, имеем:

$$- \triangle^2 p' + \varrho_1 \triangle^2 (v' + V_s) + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \varrho' \frac{\partial V_0}{\partial r}\right) = 0$$

где $\triangle^2$ — оператор Laplace'a.

Но

$$\triangle^2 p' = \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\xi}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2}\xi\right] S_n .$$

Далее, уравнение Poisson'a дает:

$$\triangle^2 (V^1 + V_s) = - 4\pi\gamma\varrho'$$

Наконец, если σ — средняя плотность земли, мы легко вычисляем:

$$\frac{dV_0}{dr} = \frac{4}{3} \pi\gamma \frac{x^3}{r^2} (\varrho_1 - \sigma) - {}^4/_3 \pi \gamma \varrho_1 r.$$

Затем, подставляя первый член найденного в § 1 разложения плотности по степеням $(r-x)$, имеем для определения ξ следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\xi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\xi}{dr}-\frac{n(n+1)\,\xi}{r^2}=-4\pi\gamma\varrho_1{}^2\alpha_n(r-x)+\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV_0}{dr}\alpha_n(r-x)\,\varrho_1\right)$$

Общий интеграл его имеет вид:

$$\xi=D_1r^n+D_2r^{-n-1}-\frac{a^1}{n(n+1)}-\frac{b^1r^2}{(n-2)(n+3)}-\frac{c^1r^3}{(n-3)(n+4)}$$

где D_1 и D_2 — произвольные постоянные и

$$a^1=\frac{4}{3}\pi\gamma x^3\varrho_1\alpha_n(\varrho_1-\sigma);\ b^1=8\pi\gamma\alpha_n\varrho_1{}^2x;\ c^1=-\frac{28}{3}\pi\gamma\alpha_n\varrho_1{}^2.$$

К сожалению, полученное решение не может нас удовлетворить. Оно обращается в бесконечность в наиболее интересных случаях, т.-е. при $n=2, n=3$; оказывается невозможным подобрать дополнительные частные решения основного уравнения для ξ так, чтобы они были конечны при всяком n. Остается фиксировать n и решать частную задачу, относящуюся к неравенству определенного типа. Это не понизит значительно ценности окончательного результата, ибо à priori ясно, что для n мало отличных друг от друга $(n=1; n=2; n=3)$ разрывные упругие силы также будут близки друг другу.

Возьмем наиболее интересную часть неравенства рельефа. Фиксируем $n=2$. Уравнение для определения ξ будет иметь вид:

$$\frac{d^2\xi}{dr}+\frac{2}{r}\frac{d\xi}{dr}-\frac{6}{r^2}\xi=a^1r^{-2}+b^1+c^1r$$

Откуда:

$$\xi=D_1r^2+D_2r^{-3}-\frac{a^1}{6}+b^1\frac{r^2\log r}{5}+\frac{c^1r^3}{6}$$

Уравнение (γ) дает для определения X:

$$\mu Xn(n+1)=-r^2\frac{d\xi}{dr}+\varrho_1\frac{dW^1+W_s}{dr}+\varrho_1\alpha_2(r-x)\frac{dV_0}{dr}.$$

(β) дает:

$$Y-\frac{drZ}{dr}=X$$

и по (α) и (α'):

$$rZ=\frac{1}{n(n+1)}\frac{dr^2Y}{dr}\qquad(\beta')$$

Отсюда для определения У получаем дифференц. уравнение:

$$\frac{d^2У}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{dУ}{dr}=\frac{(n-1)(n+2)}{r^2}У=\frac{-Xn(n+1)}{r^2}\,;\ n=2$$

Z определится по (β^1).

Для $n=2$ легко получаем:

$$-\mu\frac{6X}{r^2}=r^{-4}\left[\frac{b^1}{100}x^5-3D_2\right]+r^2a^1x-a^1r^{-1}+\frac{1}{5}b^1r\log r+$$

$$+r\left[2D_1+\frac{6}{35}ac^1+\frac{1}{5}b^1\log a-\frac{b^1h'_2}{5x\,\alpha_2}-\frac{2b'}{75}\right]-$$

$$-r^2\frac{181}{142}c'.$$

Решение уравнения:

$$\frac{d^2\mu У}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{d\mu У}{dr}-\frac{4\mu У}{r^2}=-6\mu\frac{X}{r^2}$$

дает окончательно:

$$\mu У=E_1r+E_2r^{-4}-\frac{a'}{5}r\log r+\frac{1}{70}b'r^3\log r-\frac{a'x}{r}+r^{-2}\left[\frac{3}{10}D_2-\frac{b'}{1000}x^5\right]$$

$$+r^3\left[\frac{D_1}{7}-\frac{3}{245}ac'+\frac{1}{70}b'\log a-b'\frac{h'_2}{70x\alpha_2}-\frac{b'}{105}\right]-\frac{5}{28}c'r^{-4}$$

где E_1 и E_2 — произвольные постоянные. По уравнению (β^1) получаем:

$$\mu Z=r\left[\frac{E_1}{2}-\frac{a'}{30}\right]-\frac{5}{28}c'r^4-\frac{a^1x}{2}-\frac{1}{10}a^1r\log r+\frac{1}{84}b^1r^3\log r+$$

$$+r^3\left[\frac{5}{42}D_1+\frac{1}{98}ac^1+\frac{1}{84}b^1\log a-\frac{b^1h'_2}{84x\alpha_2}-\frac{1}{82}b^1\right].$$

Этих данных достаточно для определения усилий в функции четырех произвольных постоянных D_1, D_2, E_1, E_1. Положим:

$$\frac{a-r}{a}=z$$

$\sigma=2\varrho_1$ (что весьма близко к истине), далее:

$$\beta=4/3\,\pi\gamma\,\varrho_1^2\,\alpha_2\,a^3$$

$$E'_1=E_1\beta^{-1};\ E'_2=E_2\beta^{-1}a^{-5};\ D'_1=D_1\beta^{-1}a^2;\ D^1_2=D_2\beta^{-1}a^{-3}.$$

Тогда, вычисляя усилия с точностью до z^2, найдем для R_1 и R_2 (определяющих произвольные постоянные) следующие выражения:

$$R_1 = -p_1 + S_2\beta\Bigg[\left(2E'_1 - \frac{D'_1}{7} - \frac{11}{5}D'_2 - 8E'_2 + \frac{74}{7} - \frac{3}{5}t + \frac{54}{35}t^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{8}{35} - \frac{36}{35}t + \frac{6}{5}t^2\right)\log a\right) + z\left(2/7\,D'_1 - 40E'_2 - \frac{33}{5}D'_2 - \frac{5557}{25} - \frac{29}{25}t + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{12}{35} - \frac{12}{35}t\right)\log a\right) + z^2\left(-\frac{D'_1}{7} - \frac{33}{5}D'_2 - 120E'_2 + 32 - \frac{6}{35}\log a\right) + \ldots\Bigg]$$

$$R_2 = \frac{dS_2}{d\varphi}\beta\Bigg[\left(E'_1 + E'_2 + \frac{3}{10}D'_2 + \frac{8}{21}D'_1 + \frac{25}{2} + \frac{64}{25}t + \frac{12}{5}t^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{23}{35} - \frac{37}{25}t + \frac{3}{5}t^2\right)\log a\right) + z\left(5E'_2 - \frac{16}{21}D'_1 + 9/10\,D'_2 - \frac{187}{10} + \frac{117}{70}t + \right.$$
$$\left. + \left(-\frac{32}{35} + \frac{96}{35}t\right)\log a\right) + z^2\left(15E'_2 + 9/10\,D'_2 + \frac{8}{21}D'_1 + \frac{92}{5} + \right.$$
$$\left. + \frac{16}{35}\log a\right) + \ldots\Bigg]$$

В дальнейшем будем полагать $\log a = 0$ т.-е. будем рассчитывать упругую силу на площадь в $(a)^2$.

Нам остается определить произвольные постоянные из условий на пределах. Эти условия следующие:

а) На свободной поверхности касательныя усилия нули, нормальное же давление сводится к весу неравенства, т-.е. если g ускорение тяжести, то при $r = a$

$$R_2 = 0\,;\ R_1 = -g\varrho_1 h_2 S_2$$

ибо p_1 при $r = a$ равно нулю.

в) На поверхности $r = x$, где кора переходит в ядро, гидростадтически построенное, касательные усилия нули, нормальное же сводится к гидростатическому давлению $-p_1$ т.-е. на $r = x$ имеем $R_2 = 0$ и $R_1 = -p_1(x)$ (т.-е. зависящая от φ часть R_1 равна нулю).

Определение произвольных постоянных из этих условий дает для них следующие выражения:

$$D'_1 = -54{,}29 + 36{,}09\,t + 197{,}23\,t^2 - \frac{0{,}10\,g\varrho_1 h_2}{\beta t} - \frac{0{,}07\,g\varrho_1 h_2}{\beta} + \frac{0{,}10\,g\varrho_1 h_2 t}{\beta}$$

$$D'_2 = +79{,}54 - 341{,}63\,t + 1897{,}15\,t^2 + \frac{0{,}29\,g\varrho_1 h_2}{\beta t} - \frac{0{,}36\,g\varrho_1 h_2}{\beta} + \frac{1{,}37\,g\varrho_1 h_2 t}{\beta}$$

$$E'_1 = +3{,}12 + 15{,}17\,t - 73{,}93\,t^2 + \frac{0{,}04\,g\varrho_1 h_2}{\beta t} - \frac{0{,}05\,g\varrho_1 h_2}{\beta} - \frac{0{,}23\,g\varrho_1 h_2 t}{\beta}$$

$$E'_2 = -19{,}07 + 101{,}29\,t - 559\,34\,t^2 + \frac{0{,}07\,g\varrho_1 h_2}{\beta t} + \frac{0{,}19\,g\varrho_1 h_2}{\beta} - \frac{0{,}36\,g\varrho_1 h_2 t}{\beta}$$

Отсюда для упругих сил находим окончательно:

$$R_1 = -p_1 + S_2\left[-g\varrho_1 h_2 + z\left(\frac{g\varrho_1 h_2}{t} - 6{,}5\,g\varrho_1 h_2\right) + z^2\,\frac{6{,}5\,g\varrho_1 h_2}{t} + \right.$$

$$\left. + 6\pi\gamma\varrho^2_1\,\frac{h^1{}_2}{t_2}\left(1810\,z\,t - 1810\,z^2\right)\right].$$

$$R_2 = \frac{d S_2}{d\varphi}\left[0{,}84\,g\varrho_1 h_2 z - 0{,}84\,g\varrho_1 h_2\frac{z^2}{t} - \frac{6\pi\gamma\varrho_1 h'_2}{t^2}\left(228\,t\,z - 228\,z^2\right)\right].$$

$$\Phi_2 = -p_1 + S_2\left[g\varrho_1 h_2\left(\frac{0{,}11}{t} + 0{,}49 - 1{,}80\,t\right) + z\left(-\frac{1{,}2}{t} + 2{,}2\right) + z^2\,3/t - \right.$$

$$-6\pi\gamma\varrho^2_1\,\frac{h^1{}_2}{t^2}\Big\{(-21{,}82 + 393{,}00\,t - 2160\,t^2) + z\,(-371{,}8 + 1369{,}4\,t) -$$

$$\left. - 716\,z^2\Big\}\right] +$$

$$+\frac{d^2 S_2}{d\varphi^2}\left[g\varrho_1 h_2\left\{\left(\frac{0{,}02}{t} - 0{,}07 - 0{,}21\,t\right) + z\left(\frac{0{,}05}{t} + 0{,}04\right) - \frac{0{,}02\,z}{t}\right\} - \right.$$

$$\left. - 6\pi\gamma\varrho^2_1\,\frac{h'_2}{t^2}\left\{\left(-7{,}15 + 2{,}05\,t - 18{,}42\,t^2\right) + z\left(20{,}8 + 14{,}5\,t\right) - 5{,}1\,z^2\right\}\right].$$

$$\times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [D]$$

Аналогичное выражение (вместо $\frac{d^2 S_2}{d\varphi^2}$ будет $-\mathrm{tang}-\varphi\,\frac{d S_2}{d\varphi}$ получим и для Φ_3.

Итак, упругие силы нами определены.

§ 5. О разрывных упругих силах внутри земной коры.

Определим теперь главные усилия в данной точке коры, понимая под ними (N_1, N_2, N_3) усилия, соответствующие осям элипсоида упругости. Теория дает для них, как известно, следующие выражения:

$$N_1 = \frac{1}{2}\left[(\Phi_2 + R_1) + \sqrt{(\Phi_2 - R_1)^2 + 4\,R_2^2}\right]$$

$$N_2 = \Phi_3$$

$$N_3 = \frac{1}{2}\left[(\Phi_2 + R_1) - \sqrt{(\Phi_2 - R_1)^2 + 4\,R_2^2}\right].$$

Упругую разрывную силу можно, как известно, определить двояко. Можно принять за нее максимальное главное усилие (если оно не давление), или можно принять за нее максимальную из разностей главных усилий (то, что английские авторы называют stress difference). Ввиду того, что максимальное главное усилие у нас, наверно, давление, мы должны воспользоваться, вслед за G. Darwin'ом, вторым методом. Разность усилий (stress difference), определяющая собою разрывную силу, есть наибольшая из разностей главных усилий, т.-е. независимо от знака, максимальная из величин:

$$\triangle_1 = \frac{1}{2}\left[(\Phi_2 + R_1 - 2\psi_3) + \sqrt{(\Phi_2 - R_1)^2 + 4R_2^2}\right]$$

$$\triangle_2 = \frac{1}{2}\left[(\Phi_2 + R_1 - 2\psi_3) - \sqrt{(\Phi_2 - R_1)^2 + 4R_2^2}\right]$$

$$\triangle_3 = \sqrt{(\Phi_2 - R_1)^2 + 4R_2^2}.$$

Вычислим главные части найденных упругих сил. Ввиду того, что

$$S_2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\operatorname{Cos} 2\varphi\,; \quad \frac{dS_2}{d\varphi} = {}^3/_2 \operatorname{Sin} 2\varphi\,; \quad \operatorname{tang}\varphi \frac{dS_2}{d\varphi} = {}^3/_2 - {}^3/_2 \operatorname{Cos} 2\varphi$$

$$\frac{d^2S_2}{d\varphi^2} = 3\operatorname{Cos} 2\varphi$$

отбрасывая гидростатическое давление p_1, которое не влияет на разность усилий, получаем главные части:

$$R_1 = -g\varrho_1 h'_2\left[\left(-0{,}25 + 1018\frac{z}{t} - 1018\frac{z^2}{t^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(0{,}75 - 3054\frac{z}{t} + 3054\frac{z^2}{t^2}\right)\operatorname{Cos} 2\varphi\right].$$

$$R_2 = g\varrho_1 h'_2\left[-770\frac{z}{t} + 770\frac{z^2}{t^2}\right]\operatorname{Sin} 2\varphi\,.$$

$$\Phi_2 = -12{,}2\, g\varrho_1 \frac{h'_2}{t^2}(1 + \operatorname{Cos} 2\varphi)\,.$$

$$\psi_3 = -12{,}2\, g\varrho_1 \frac{h'_2}{t^2}(1 + \operatorname{Cos} 2\varphi)\,.$$

Мы видим, таким образом, что касательное усилие очень мало сравнительно с Φ_2 и ψ_3. Далее $\Phi_2 + \psi_3 = 0$, что и надо было ожидать, вследствие условия несжимаемости и малости R_1.

Очевидно, максимальная $\triangle$ есть $\triangle_1$, т.-е.

$$\triangle = \Phi_2 - \psi_3$$

или —

$$\triangle = 24{,}4\, g\varrho_1 \frac{h'_2}{t^2} (1 + \mathrm{Cos}\, 2\varphi)$$

или —

$$\triangle_{max} = 48{,}8\, g\varrho_1 \frac{h'_2}{t^2}$$

Выражая $\triangle_{max}$ на площадку в 1 см.^{2} надо помнить, что мы должны умножить $\triangle_{max}$ на $(a)^2$ для перехода к C. G. S. но так как мы расчитывали силу раньше на площадь в $(a)^2$ см., мы должны результат разделить вновь на $(a)^2$.

Положим, как и раньше:

$$\varrho_1 = {}^1\!/_2\, \sigma = 2{,}8 \qquad h'_2 = 3{,}10^{-3}.$$

Тогда

$$\triangle_{max} = \frac{5{,}10^{-2}}{t^2} \text{ килогр. на кв. сант.} = \frac{4486{,}10^{-2}}{t^2} \text{ дин на кв. сант.}$$

Или, так как британская тонна на кв. дюйм. равна 15.10^7 дин на кв. сант.

$$\triangle_{max} = \frac{2984{,}10^{-10}}{t^2} \text{ брит. тонн на кв. дюйм.}$$

Если по данным геодезии положить $t = 1/50$, то

$$\triangle_{max} = 0{,}0008 \text{ бр. тонн на кв. дюйм.}$$

Интересно отметить, что для $n = 2$ Darwin получает:

$$\triangle_{max} = 5{,}43 \text{ бр. тонн на кв. дюйм.}$$

Love при произвольном законе плотности, с изостатической гипотезой получает для $n = 2$

$$\triangle_{max} = 0{,}05 \text{ бр. тонн на кв. дюйм.}$$

Полученное нами ничтожно малое значение разрывной силы чрезвычайно благоприятно для изостатической гипотезы.

Нечего говорить, что эти значения много ниже критических значений этой силы для тех материалов, из которых составлена земная кора. Важно отметить, что мы получили наш результат без каких-либо произвольных гипотез, сводящих на нет по существу все построения Love.

Не имеет смысла искать распределение разрывной силы внутри коры, ввиду ее малости. Само собой понятно, что она максимальна при широте в 45^0 (относительно экватора неравенства) и равна нулю на его полюсах.

Вычисляя усилия вызываемые элипсоидальностью земли, мы вместо $h'_2 = 3.10^{-3}$ должны поставить $h'_2 = 10^{-3}$; это дает для разрывной силы на геогр. широте в 45^0 значение лишь в 0,0003 бр. тонн на кв. дюйм.

Полученный результат позволяет определить нижний предел толщины изостатического слоя на основании одних только соображений теории упругости. Возьмем наименее прочный материал—красный твердый кирпич; для него, как показывают опыты с раздавливанием, критическое значение $\triangle$ есть

$$\triangle = 0{,}5 \text{ бр. тонн на кв. дюйм.}$$

Принимая это наименьшее значение в основу расчетов, пренебрегая множителем безопасности, находим нижний предел для t из неравенства:

$$\frac{2984{,}10^{-10}}{t^2} < 0{,}5$$

т.-е. $t > \frac{1}{5000}$, т.-е. предел l. (толщины изостатического слоя) несколько больше километра. Для мрамора (критическая $\triangle = 2{,}5$) l около сотни сажен.

Пределы эти, конечно, слишком низки для того, чтобы они могли нас чему-нибудь научить.

Теория § 2 учит нас большему. Положим, что максимальная разность плотностей слоя у поверхности земли меньше разности плотностей экстремальных в этом отношении пород—тогда найденный закон плотности установит нам неравенство для определения t.

Возьмем характерные в этом смысле породы—базальт ($\varrho_1 = 3$) и мел ($\varrho_1 = 2{,}2$; это также средняя плотность песчаников и глиноземов). Наш закон плотности в таком случае определяет неравенство:

$$l > 45 \text{ км.}$$

В числе определенных значений l, полученных Hayford'ом [1]), также недурно удовлетворяющих наблюдениям, фигурируют величины ниже 45 км.; на основании полученного результата их во всяком случае надо отбросить.

Итак, теория упругости пока не позволяет фиксировать значение l. Мы должны только пользоваться пока данными геодезистов, определенными чисто формальным условием минимальности суммы квадратов уклонений при исследовании аномалии отвеса и тяжести. Нет сомнения в том, что теория сейсмических волн в связи с результатами наблюдений землетрясений позволит теории упругости найти более реальное значение толщины изостатического слоя, чем то, которое было найдено геодезистами:

Харьков.
Астрономическая Обсерватория.
1921 г.

---

[1]) К сожалению, по условиям времени и места, автору не была доступна работа Hayford'a. С ее результатами он познакомился по данным Rudzk'ого (Physik d. Erde стр. 72).

Prof. B. P. Gerasimovič.

The isostatic layer from the standpoint of the theory of elasticity.

Contents.

In this paper are investigated the conditions of the elastical equilibrium of the isostatic layer. Following suppositions are introduced: spherical surfaces, limiting the isostatic layer from above and from below, are isopotential, the inequality of earth relief is expressed by serie of spherical functions; the density distribution in the inner of the layer, compensating the statical action of the earth relief, is expressed by the formula (A). Thus the isostatical hypothesis is expressed by the equalities (1) and (2) for the layer surfaces. Supposing A(r) as developed in serie (B), we found the first members of this serie, according to (1) and (2), as (C). In § 3 we investigate the influence of the harmonical unequality upon the moments of inertia of earth. spheroid.; it is = 0. In § 4 are resolved equations of theory of elasticity for the isostatic layer in spherical coordinates. We suppose, that the elastical forces on the interior surface of the layer are hydrostatical pressures, and those on the superior are pressures of relief unequalities. Introducing the expressions of density, found in § 2, we determine in (D) the elastical forces. In § 5 we are studying disruptive forces, produced in the inner of the layer by relief unequality (G. Darwin's problem). Their maximal value does not excede 0,0008 british tons pro square inche, which assures completely the stability of equilibrium. It confirmes the results obtened by Love in another way for the isostatic layer. Then we determine the interior limit for the thickness of the isostatic layer. Applying only the considerations of the theory of elasticity, we find it too low and consequently theoreticaly useless. Applying the density law (C) of § 2, we obtain another theoretical value of the abovesaid limit. The thickness of the isostatic layer is $>$ 45 km.

The theory of elasticity does not allow in the present time to determine the thickness of the layer; probably it will be possible in the future, applying the theory of seismic waves.

Kharkow. Astronomical Observatory. 1921.