Задача об экстремуме интеграла $\int f(x,y,y')\,dx$ с переменными конечными точками.

А. П. Пшеборский.

---

1. Настоящая статья является первой из ряда статей, которые я намерен посвятить рассмотрению различных вопросов вариационного исчисления.

В ней я займусь исследованием вопроса об экстремуме интеграла

$$J = \int f(x,y,y')\,dx \tag{1}$$

при переменных конечных точках; как известно, вопрос этот затронут сравнительно недавно, где $f(x,y,y')$ функция класса (C''').

Везде в дальнейшем я буду пользоваться как терминологией, так и обозначениями, принятыми в „Vorlesungen über Variationsrechnung" Bolza и в „Leçons sur le calcul de variations" Hadamard'a.

Как известно, задачи об экстремуме интеграла (1) при переменных конечных точках могут быть следующих типов: 1) одна из конечных точек зафиксирована, а другая находится на данной кривой, 2) обе конечные точки находятся на данных кривых, 3) одна из конечных точек зафиксирована, а другая свободна в некоторой данной области и, наконец, 4) обе конечные точки свободны в двух данных областях.

В настоящей статье я остановлюсь на задачах первых двух типов. Как известно, в этом случае, если

$$y = \varphi(x) \tag{2}$$

представляет решение нашей задачи класса (C'') и если при этом допускаются вариации 1-ой степени близости, функция $\varphi(x)$ должна быть интегралом уравнения Эйлера

$$\frac{d}{dx} f_{y'} - f_y = 0, \tag{3}$$

т. е. кривая (2) должна быть экстремальной кривой.

Кроме того, если какая либо из конечных точек должна находиться на данной кривой

$$y = g(x), \tag{4}$$

где $g(x)$ функция класса (C') не равная постоянной, то для абсциссы ее, которую мы обозначим через t, должно выполняться условие трансверсальности

$$f\Big(t, \varphi(t), \varphi'(t)\Big) + \Big(g'(t) - \varphi'(t)\Big) f_{\varphi'}\Big(t, \varphi(t), \varphi'(t)\Big) = 0 \tag{5}$$

В случае, когда кривая (4) обращается в $y = c$, последнее условие заменяется условием

$$f_{\varphi'}\Big(c, \varphi(c), \varphi'(c)\Big) = 0 \tag{6}$$

Для дальнейшего чрезвычайно важным является введение понятия о *трансверсальных кривых или трансверсалях*.

Положим, что имеем некоторое семейство экстремалей интеграла (1)

$$y = \psi(x, \alpha), \tag{7}$$

под трансверсалями этого семейства подразумеваются кривые, которые пересекаются с кривыми (7) трансверсально, т. е. для которых в точках их пересечения с кривыми (7) удовлетворяется условие (5).

Как не трудно видеть, нахождение трансверсалей сводится к интегрированию обыкновенного уравнения 1-го порядка

$$f\Big(x, y, p(x,y)\Big) + \Big(y' - p(x,y)\Big) f_p\Big(x, y, p(x,y)\Big) = 0, \tag{9}$$

в котором $p(x, y)$ функция поля экстремалей (7).

Положим теперь, что имеем некоторую кривую класса C' в интервале $x_0 \leq x \leq x_1$

$$y = g(x) \tag{10}$$

Покажем, что при выполнении известных условий можно будет найти семейство экстремалей интеграла

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,dx, \tag{11}$$

для которых кривая (10) будет трансверсалью.

Действительно, пусть

$$y = k(x, a, b) \tag{12}$$

общий интеграл уравнения Эйлера для интеграла J.

Абсциссы точек на кривой (10) будем обозначать через t. Тогда получим кривые Эйлера, пересекающие кривую (10) трансверсально, если выразим через t произвольные постоянные a, b, определивши их из условий

$$k(t,a,b) = g(t), \tag{13}$$

$$f\Big(t, k(t,a,b), k'(t,a,b)\Big) + \Big(g'(t) - k'(t,a,b)\Big)\, f_{k'}\Big(t, k(t,a,b), k'(t,a,b)\Big) = 0$$

Первое из этих условий—условие пересечения кривых (10) и (12), а второе—условие трансверсальности.

Уравнения (13) будут однозначно разрешимы относительно (a, b) и дадут нам некоторые функции класса C' относительно t, если Якобиевский определитель этих уравнений относительно a, b.

$$\Delta = f_{k'k'}\Big(t, k(t,a,b), k'(t,a,b)\Big)\Big(g'(t) - k'(t,a,b)\Big)\begin{vmatrix} k_a(t,a,b) & k_b(t,a,b) \\ k'_a(t,a,b) & k'_b(t,a,b) \end{vmatrix} \tag{14}$$

будет отличен от нуля. Заметим, что здесь значком $'$ обозначены частные производные по t.

Определитель, входящий в выражение Δ, отличен от нуля, так как, по предположению, $k(x, a, b)$ — общий интеграл уравнения Эйлера. Таким образом, Δ будет отличен от нуля, если в точке пересечения $g'(t)$ отлично от $k'(t)$, т. е. экстремаль не касается кривой (10) и, кроме того, если отлична от нуля функция $f_{k'k'}(x, k, k')$. Последнее имеет место, когда наша задача регулярна, а первое, когда она определенна, ибо при $g'(t) = k'(t)$ из условия трансверсальности (13) получим

$$f(t,k,k') = 0,$$

чего быть не может в случае, если задача наша определенна, т. е. в случае, когда функция $f(x, y, y')$ сохраняет свой знак, не обращаясь в нуль в рассматриваемом поле.

В дальнейшем будем предполагать, что имеем дело с *определенной* задачей.

Решив уравнения (13) относительно (a, b), получим искомое семейство экстремалей

$$y = k\Big(x, a(t), b(t)\Big), \tag{15}$$

трансверсальных к кривой (10).

На всякой экстремали (15) рассматриваемого поля от точки пересечения с кривой (10) возьмем такой отрезок до точки с абсциссой x, чтобы имело место равенство

$$\int_t^x f(x,k,k')\,dx = A, \tag{16}$$

где A — данное число.

В силу того, что задача наша определена, из уравнения (16) можно определить x, как однозначную функцию от t.

Рассмотрим теперь кривую, параметрическими уравнениями которой служат уравнения

$$y = k\big(x, a(t), b(t)\big) \qquad \int_t^x f(x,k,k')dx = A \tag{17}$$

и покажем, что при изменении A получим семейство кривых трансверсальных к нашему семейству экстремалей (15).

В самом деле, для этого необходимо показать, что угловой коэффициент касательной к любой кривой (17) в точке пересечения с соответствующей кривой (15) удовлетворяет условию трансверсальности, т. е. условию

$$f(x,k,k') + \left(\frac{dy}{dx} - k'\right) f_{k'}(x,k,k') = 0,$$

при чем здесь, очевидно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$$

Из второго из уравнений (17) имеем

$$f\Big(x, k(x), k'(x)\Big)\frac{dx}{dt} - f\Big(t, k(t), k'(t)\Big) + \int_t^x \left(f_k \frac{\partial k}{\partial t} + f_{k'} \frac{\partial k'}{\partial t}\right)dx = 0. \tag{18}$$

Здесь нами введены под знаком интеграла следующие обозначения

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial k(x)}{\partial a}a' + \frac{\partial k(x)}{\partial b}b', \; \frac{\partial k'(x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial k(x)}{\partial t}\right) \tag{19}$$

что же касается символа $k'(t)$, то он представляет производную по t, входящему явно.

Интегрируя по частям второй член интеграла, входящего в (18), и помня, что $y = k(t,a,b)$ кривая Эйлера, а следовательно имеем тождественно

$$f_{k'} - \frac{d}{dt} f_{k'} = 0,$$

напишем соотношение (18) в виде

$$f\left(x, k(x), k'(x)\right)\frac{dx}{dt} + f_{k'}\left(x, k(x), k'(x)\right)\frac{\partial k(x)}{\partial t} - f\left(t, k(t), k'(t)\right)\frac{\partial k(t)}{\partial t} = 0, \tag{20}$$

где, согласно с (19)

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = \frac{\partial k(t,a,b)}{\partial a}a + \frac{\partial k(t,a,b)}{\partial b}b'$$

Но из первого из уравнений (17) имеем

$$\frac{\partial k(x)}{\partial t} = \frac{dy}{dt} - \kappa'(x)\frac{dx}{dt} \tag{21}$$

Кроме того, из соотношения $k(t,a,b) = g(t)$ находим

$$k'(t) + \frac{\partial k(t)}{\partial a}a' + \frac{\partial k(t)}{\partial b}b' = g'(t)$$

или, в силу (9)

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = g'(t) - k'(t). \tag{22}$$

Подставляя значения (21) и (22) в соотношение (20), получим

$$f\Big(x,k(x),k'(x)\Big)\frac{dx}{dt} + f_{k'}\Big(x,k(x),k'(x)\Big)\left(\frac{dy}{dt} - k'(x)\frac{dx}{dt}\right) =$$

$$= f\Big(t,k(t),k'(t)\Big) + f_{k'}\Big(t,k(t),k'(t)\Big)\Big(g'(t) - k'(t)\Big).$$

В силу трансверсальности кривой $y = g(x)$, правая часть последнего равенства обращается в нуль, а потому последнее равенство обращается в следующее

$$f\Big(x,k(x),k'(x)\Big) + f_{k'}\Big(x,k(x),k'(x)\Big)\left(\frac{dy}{dx} - k'(x)\right) = 0.$$

Последнее соотношение и показывает, что кривая (17) пересекает трансверсально соответствующие экстремали

$$y = k\Big(x,a(t),b(t)\Big). \tag{23}$$

Предположим теперь, что данная кривая $y = g(x)$ стягивается в точку $M(\alpha, \beta)$.

Тогда семейство экстремалей, проходящих через точку M, будет

$$y = k\Big(x,a,b(a)\Big) \tag{24}$$

где b функция от a, определяемая из уравнения

$$k(\alpha,a,b) = \beta. \tag{25}$$

Существование этой функции вытекает из того, что всегда можем предположить, в соответственной области, что $\frac{\partial k(\alpha,a,b)}{\partial b}$ отлично от нуля

Покажем, что все кривые

$$y = k\left(x, a, b(a)\right), \qquad \int_a^x f(x, k, k')\,dx = A, \tag{26}$$

где A переменный параметр, пересекают трансверсально семейство экстремалей (24). В силу определенности нашей задачи, второе из уравнений (26) разрешимо относительно x, a, следовательно, в (26) x и y можем рассматривать, как функции параметра a.

Дифференцируя по a второе из уравнений (26), принявши во внимание, что на основании (25)

$$\frac{dk(\alpha,a,b)}{d\alpha} = \frac{\partial k(\alpha,a,b)}{\partial a} + \frac{\partial k(\alpha,a,b)}{\partial b}\, b'(a) = 0,$$

после простых преобразований, получим

$$f\left(x, k(x), k'(x)\right)\frac{dx}{da} + \int_a^x \left(f_k \frac{dk}{d\alpha} + f_{k'}\frac{dk'}{d\alpha}\right) dx =$$

$$= f\left(x, k(x), k'(x)\right)\frac{dx}{d\alpha} + f_{k'}\left(x, k(x), k'(x)\right)\frac{dk(x)}{d\alpha} = 0. \tag{27}$$

Замечая далее, что на основании (23)

$$\frac{dy}{da} = k'(x)\frac{dx}{da} + \frac{dk(x)}{da},$$

где

$$\frac{dk(x)}{da} = \frac{\partial k(x)}{\partial a} + \frac{\partial k(x)}{\partial b} b',$$

и что для кривой (26)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{da} : \frac{dx}{da},$$

напишем соотношение (27) в виде

$$f\left(x, k(x), k'(x)\right) + \left(\frac{dy}{dx} - k'(x)\right) f_{k'}\left(x, k(x), k'(x)\right) = 0,$$

а это и показывает, что кривые (26) трансверсальны к семейству экстремалей (23). Полученные результаты очевидно представляют обобщение известных теорем Гаусса о геодезических параллелях и окружностях.

2. До сих пор мы указали на следующие необходимые условия существования экстремума интеграла

$$J = \int_t^c f(x,y,y')dx \tag{28}$$

при предположении, что искомая функция удовлетворяет условиям

$$y(t) = g(t), \qquad y(c) = C,$$

где $g(x)$ данная функция класса C'', а C данное число: 1) искомая функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера, т. е. искомая кривая экстремаль, и 2) в точке $\left(t_0, g(t_0)\right)$, т. е. в точке пересечения этой экстремали с кривой $y = g(x)$ удовлетворяется условие трансверсальности

$$f\left(t_0,\varphi(t_0),\varphi'(t_0)\right) + \left(g'(t_0) - \varphi'(t_0)\right) f_{\varphi'}\left(t_0,\varphi(t_0),\varphi'(t_0)\right) = 0 \tag{29}$$

Далее, пусть экстремаль, дающая решение нашей задачи, представляет отрезок кривой MN, где M лежит на кривой $y = g(x)$, а N точка с координатами (c,C).

За функциональную область примем кривые, проходящие через точку N и имеющие начало на кривой $y = g(x)$.

Так как частью нашей функциональной области является область, составленная из кривых, проходящих через точки M и N, то, как известно, вдоль отрезка экстремали MN должны для сильного экстремума кроме условий Эйлера выполняться условия Лежандра, Якоби и Вейерштрасса, а именно в случае минимума

$$R(x) = f_{\varphi'\varphi'}\left(x,\varphi(x),\varphi'(x)\right) \geq 0 \quad \text{(условие Лежандра)},$$

$$\triangle(x,t_0) \neq 0, \qquad t_0 < x < c \quad \text{(условие Якоби)},$$

$$E\left(x,\varphi(x),\lambda,\varphi'(x)\right) \geq 0 \qquad t_0 \leq x \leq c \quad \text{(условие Вейерштрасса)},$$

здесь $\triangle(x,t_0)$ интеграл уравнения Якоби, обращающийся в нуль при $x = t_0$, $E(x,y,y',p)$ функция Вейерштрасса, λ любое число. Этими условиями определяется поле экстремалей, проходящих через N и имеющих начало на кривой $y = g(x)$.

Условие Вейерштрасса, покрывающее собою условие Лежандра, должно быть выполнено для сильного экстремума.

Перехожу к выводу дальнейших необходимых условий.

Возьмем какую-либо точку M_1 кривой $y = g(x)$, достоточно близкую к точке M, и соединим ее экстремалью с точкой N (c, C), что возможно благодаря существованию поля.

Если по прежнему через $y = k(x,a,b)$ обозначим общий интеграл уравнения Эйлера, то, для получения уравнения семейства рассматриваемых экстремалей, имеем уравнения

$$k(t,a,b) = g(t), \qquad k(c,a,b) = C. \tag{29}$$

Пусть экстремаль MN соответствует значениям $a = a_o$, $b = b_o$; тогда уравнения (29) имеют решения

$$t = t_o, \qquad a = a_o, \qquad b = b_o;$$

если положим еще, что определитель

$$\frac{\partial k(t_o, a_o, b_o)}{\partial a}\,\frac{\partial k(c_o, a_o, b_o)}{\partial b} - \frac{\partial k(t_o, a_o, b_o)}{\partial b}\,\frac{\partial k(t_o, a_o, b_o)}{\partial a}$$

отличен от нуля, найдем при t достаточно близком к t_o решения уравнений (29)

$$a = a(t), \qquad b = b(t),$$

обращающихся соответственно в a_o и b_o при $t = t_o$.

Функции $a(t)$ и $b(t)$, очевидно, принадлежат к классу C'.

Из уравнений (29), дифференцируя по t, находим

$$\begin{gathered} k'(t) + \frac{\partial k(t)}{\partial a}a' + \frac{\partial k(t)}{\partial b}b' = g'(t), \\ \frac{\partial k(c)}{\partial a}a' + \frac{\partial k(c)}{\partial b}b' = 0 \end{gathered} \tag{30}$$

Здесь через $k'(t)$ обозначена частная производная по t, входящему явно. Таким образом, уравнение экстремали, проходящей через точку M, будет

$$y = k\Big(x, a(t), b(t)\Big), \tag{31}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ определенные нами только что функции.

При $t = t_o$ уравнение (31) обращается в

$$y = k(x, a_o, b_o), \tag{32}$$

т. е в уравнение экстремали MN.

Возьмем теперь интеграл (28) по экстремали (31); интеграл этот обратится в некоторую функцию от t

$$J(t) = \int_t^c f\Big[x, k[x, a(t), b(t)], k'[x, a(t), b(t)]\Big] dx, \qquad (33)$$

имеющую минимум при $t = t_0$.

Поэтому мы должны иметь

$$\left(\frac{dJ(t)}{dt}\right)_{t=t_0} = 0 \qquad (34)$$

Дифференцируя (33) по t, пользуясь тем, что $y = k(x, a, b)$ экстремаль, и вторым из условий (30), легко найдем

$$\frac{dJ(t)}{dt} = -f\Big(t, k(t,a,b), k'(t,a,b)\Big) - \Big(g'(t) - k'(t)\Big) f_{k'}\Big(t, k(t,a,b), k'(t,a,b)\Big) \qquad (33)$$

При $t = t_0$ это выражение обращается в нуль, в силу условия трансверсальности. Для существования экстремума функции $J(t)$ при $t = t_0$ достаточно, чтобы $J''(t_0)$ было отлично от нуля.

Заметим, что при поставленных нами условиях относительно $f(x, y, y_,)$ $J''(t)$, как это видно из (33), существует.

Дифференцируя поэтому (33) и исключая из выражения для $J''(t)$ и из уравнений (30) функции a' и b', найдем соотношение

$$\begin{vmatrix} k_a(t) & k_b(t) \\ k_a(c) & k_a(c) \end{vmatrix} \frac{d^2J(t)}{dt^2} = s_g(t) . \begin{vmatrix} k_a(t) & k_b(t) \\ k_a(c) & k_b(c) \end{vmatrix} -$$

$$- f_{k'k'}\Big(t, k(t), k'(t)\Big) \Big(g'(t) - k'(t)\Big)^2 \begin{vmatrix} k'_a(t) & k'_b(t) \\ k'_a(c) & k'_b(c) \end{vmatrix} . \qquad (34)$$

Здесь для краткости через $k_a(t), k_b(t)$ обозначены соответственно частные производные $\frac{\partial k(t)}{\partial a}$, $\frac{\partial k(t)}{\partial b}$, а через $s_g(t)$ функция

$$s_g(t) = -\Big[f_t - k' f_{tk'} - k' k'' f_{k'k'} + \Big(f_k + f_{tk'} + k'' f_{k'k'} - f_{k'k}\Big) g' + f_{k'k} g'^2 + g'' f_{k'}\Big], \qquad (35)$$

при чем везде в функциях f_t, f_{tk}, $f_{k'k'}$ и т. п. в качестве аргументов вставлены $t, k(t,a,b), k'(t,a,b)$.

Таким образом при $t = t_0$ имеем

$$u_2(c)\left(\frac{d^2J}{dt^2}\right)_{t=t_0} = S_g(t_0) u_2(c) - R(t_0)\Big(g'(t_0) - \kappa'(t_0)\Big)^2 u_1(c) \qquad (36)$$

где через $u_1(x)$ и $u_2(x)$ обозначены функции

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \kappa'_a(t_0,a_0,b_0)\kappa_b(x,a_0,b_0) - \kappa'_b(t_0,a_0,b_0)\kappa_a(x,a_0,b_0), \\ u_2(x) &= k_a(t_0,a_0,b_0)k_b(x,a_0,b_0,) - \kappa_b(t_0,a_0,b_0)\kappa_a(x,a_0,b_0). \end{aligned} \tag{37}$$

Замечая, что функции $\kappa_a(x,a_0,b_0)$ и $\kappa_b(x,a_0,b_0)$ представляют два независимых интеграла уравнения Якоби, видим, что $u_1(x)$ и $u_2(x)$ тоже интегралы этого уравнения, при чем

$$u'_1(t_0) = 0\,, \quad u_2(t_0) = 0\,; \tag{38}$$

из последних равенств заключаем, что интегралы $u_1(x)$ и $u_2(x)$ независимы, и что $u_2(x)$ представляет интеграл, который мы выше обозначили через $\Delta(x,t_0)$.

Из (37) непосредственно убеждаемся, что

$$u'_2(t_0) = -u_1(t_0), \tag{39}$$

поэтому, для достаточно малых значений h, в силу (38) и (39) имеем

$$u_1(t_0+h) = u_1(t_0) + \varepsilon\,, \;\; u_2(t_0+h) = h\,(u'_2(t_0) + \varepsilon_1) = -h\,(u_1(t_0) + \varepsilon_1),$$

где ε и ε_1 бесконечно малые вместе с h. Отсюда заключаем, что для достаточно малых значений h

$$\frac{u_1(t_0+h)}{u_2(t_0+h)} < 0, \tag{40}$$

а потому для значений c достаточно близких к t_0, если $R(t_0) > 0$, то

$$\left(\frac{d^2 J}{dt^2}\right)_{t=t_0} > 0.$$

В самом деле, так как нули интеграла $u_2(x)$ изолированные, то всегда можно выбрать c настолько близким к t_0, что $u_2(c) \neq 0$, а

$$\left(\frac{d^2J}{dt^2}\right)_{t=t_0} = s_g(t_0) - R(t_0)\Big(g'(t_0) - k'(t_0)\Big)^2\,\frac{u_1(c)}{u_2(c)}. \tag{41}$$

Второй член правой части при приближении c к t_0 стремится к $+\infty$, в то время, как число $S_g(t_0)$ конечно.

Так как $u_1(x)$ и $u_2(x)$ два независимые интеграла уравнения Якоби

$$Ru'' + R'u' + (Q' - p)u = 0,$$

то для них имеет место тождество Абеля

$$R(u'_1 u_2 - u'_2 u_1) = L,$$

где L постоянная.

Полагая в этом тождестве $x=t_0$ и принимая во внимание (38) и (39), получим для этой постоянной значение

$$L=R(t_0)u_1^2(t_0),$$

а потому

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u_1}{u_2}\right)=\frac{u'_1u_2-u'_2u_1}{u_2^2}=\frac{R(t_0)u_1^2(t_0)}{u_2^2(x)}>0. \tag{42}$$

Отсюда заключаем, что функция $J''(t_0)$, рассматриваемая как функция от c, убывает с возрастанием c от t_0 до корня уравнения $u_2(x)=0$, следующего за t_0.

В самом деле, из (40) на основании (42) имеем, что

$$\frac{dJ''(t_0)}{dc}=-R(t_0)\Big(g'(t_0)-k'(t_0)\Big)^2\frac{d}{dc}\left(\frac{u_1(c)}{u_2(c)}\right)<0.$$

Пусть t'_0 абсцисса точки, сопряженной с точкой M, т.-е. следующий за t_0 корень уравнения $u_2(x)=0$.

Положим, что $u_1(t^0)>0$, тогда, так как в силу (39) $u'_2(t_0)<0$, то для интервала $t_0<x<t'_0$ функция $u_2(x)$ отрицательна, а так как по теореме Штурма $u_1(x)$ обращается один раз в нуль в этом интервале и изменяет при этом свой знак, то для достаточно близких к t'_0 значений x, т.-е. для достаточно малых положительных значений h имеем, в силу (40), что

$$\frac{u_1(t'_0-h)}{u_2(t'_0-h)}>0,$$

а потому когда c будет изменяться от t_0 до t'_0 функция $J''(t_0)$, рассматриваемая, как функция от c, будет убывать от $+\infty$ до $-\infty$.

К тому же результату придем предположив, что $u_1(t_0)<0$.

Следовательно для некоторого промежуточного значения $c=t''_0$ она обратится в нуль с переменой знака.

Точку экстремали MN с абсциссой $x=t''_0$ назовем *точкой, сопряженной с кривой* $y=g(x)$.

Значение t''_0 получим, решая относительно c уравнение

$$J''(t_0)=0$$

или, что то же, уравнение

$$S_g(t_0)u_2(x)-R(t_0)\Big(g'(t_0)-k'(t_0)\Big)^2u_1(x)=0. \tag{43}$$

Значение t''_0 представляет первый корень этого уравнения, больший числа t_0.

Все точки экстремали MN, абсциссы которых удовлетворяют уравнению (43), будем называть **сопряженными с кривой** $y = g(x)$, при чем те из них, абсциссы которых больше t_0, назовем **правыми сопряженными точками**, а те, которых абсциссы меньше t_0, **левыми сопряженными точками**.

Левая часть уравнения (43) представляет выражение вида $Au_1(x) + Bu_2(x)$, где A и B постоянные, а потому она тоже представляет интеграл уравнения Якоби. Отсюда ясно, что, если условие Якоби не выполнено, то на отрезке экстремали MN имеются точки, сопряженные с кривой $y = g(x)$.

Наоборот, если интеграл уравнения Якоби

$$u_3(x) = S_g(t_0)u_2(x) - R(t_0)\left(g'(t_0) - k'(t_0)\right)^2 u_1(x) \tag{44}$$

отличен от нуля во всем интервале $t_0 \leq x \leq c$, то условие Якоби выполнено.

Действительно, если бы интеграл

$$y = u_2(x) = \triangle\,(x,t_0)$$

кроме нуля $x = t_0$ имел бы в интервале $t_0 < x \leq c$ еще один нуль, то, по теореме Штурма, интеграл (44) обратился бы в нуль где либо внутри этого интервала.

Заметим, что интеграл (44) будет тождествен $c \triangle (x,t_0)$, если

$$g'(t_0) = k'(t_0),$$

т. е. при условии, что в точке пересечения экстремаль $y = k(x,a_0,b_0)$ и кривая $y = g(x)$ касаются друг друга, а этот случай, в случае **определенной** задачи, которую мы рассматриваем, места иметь не может.

Резюмируя полученные результаты, приходим к заключению, что если на отрезке экстремали MN нет точки, сопряженной с кривой $y = g(x)$, то при выполнении условий Эйлера, Лежандра и Вейерштрасса, при чем $R(x) > 0$, интеграл, взятый по экстремали MN, представит минимум в функциональной области, состоящей из экстремалей, соединяющих точки кривой $y = g(x)$ с точкой N и достаточно близких к экстремали MN; наоборот, если точка N лежит на экстремали за точкой, сопряженной с кривой $y = g(x)$, тогда интеграл, взятый по этой экстремали между точками M и N, даст максимум в функциональной области, состоящей из экстремалей, которые соединят точки кривой $y = g(x)$ с точкой N и которые достаточно близки к экстремали MN.

Это вытекает из того, что в первом случае будем иметь

$$J'(t_0)=0, J''(t_0)>0,$$

а во втором

$$J'(t_0)=0, J''(t_0)<0.$$

Теперь легко вывести следующее новое необходимое условие, при котором отрезок экстремали MN может дать экстремум интеграла. Условие это назовем обобщенным условием Якоби.

Для того, чтобы отрезок экстремали MN мог дать экстремум интеграла J, необходимо, чтобы между точками M и N не было точки, сопряженной с кривой $y=g(x)$.

В самом деле, пусть точка P отрезка экстремали MN, сопряженная с кривой $y=g(x)$, лежит между точками M и N. Возьмем две точки N_1 и N_2, лежащие на отрезке экстремали MN — которую обозначим через L — по разные стороны от P, и построим две кривые: одну L_1, состоящую из экстремали M_1N_1 и дуги N_1N экстремали L, а другую L_2, состоящую из экстремали M_2N_2 и дуги N_2N экстремали L; при чем точки M_1 и M_2 взяты на кривой $y=g(x)$ вблизи точки M.

Возможность построения экстремалей M_1N_1 и M_2N_2 вытекает из выполнения условия Якоби. Действительно, в этом случае интеграл уравнения Якоби $u_2(x)$ отличен от нуля для всех значений x, заключенных в интервале (t_0, c). Но тогда, на основании рассуждений § 1, убеждаемся в существовании семейства экстремалей, пересекающих кривую $y=g(x)$ трансверсально.

Будем обозначать символом $J_{AB}^{(K)}$ интеграл J, взятый между точками A и B по кривой (K). Тогда на основании только что сказанного имеем:

$$J_{M_1N}^{(L_1)}-J_{MN}^{(L)}=J_{M_1N_1}^{(L_1)}-J_{MN_1}^{(L)}>0$$
$$J_{M_2N}^{(L_2)}-J_{MN}^{(L)}=J_{M_2N_2}^{(L_2)}-J_{MN_2}^{(L)}<0$$

Отсюда заключаем, что $J_{MN}^{(L)}$ не экстремальное значение интеграла J.

3. Дадим геометрическую интерпретацию найденного условия. Рассмотрим семейство экстремалей, трансверсальных к кривой $y=g(x)$. Уравнение этого семейства будет

$$y=\kappa\Big(x, a(t), b(t)\Big) \tag{45}$$

где, как мы видели в § 1, функции $a(t)$ и $b(t)$ определяются из уравнений

$$k(t,a,b)=g(t), \tag{46}$$

$$f\Big(t,\kappa(t,a,b),\kappa'(t,a,b)\Big)+\Big(g'(t)-\kappa'(t)\Big)f_{k'}\Big(t,k(t,a,b),\kappa'(t,a,b)\Big)=0.$$

Уравнение обертки экстремалей (45) получим, исключая t из уравнения (45) и уравнения

$$\frac{dy(x)}{dt} = \frac{\partial k(x)}{\partial a} a' + \frac{\partial b(x)}{\partial b} b' = 0. \tag{47}$$

Из уравнений (46) после подстановки в них $a(t)$ и $b(t)$, вместо a и b, и дифференцирования полученного тождества, найдем тождества

$$k' + \frac{\partial k}{\partial a} a' + \frac{\partial k}{\partial b} b' = 0$$

$$f_t + f_k\left(k' + \frac{\partial k}{\partial a}a' + \frac{\partial k}{\partial b}b'\right) + f_{k'}\left(k'' + \frac{\partial k'}{\partial a}a' + \frac{\partial k'}{\partial b}b'\right) + f_{k'}\left(g'' - \omega'' - \frac{\partial k'}{\partial a}a' - \frac{\partial k'}{\partial b}b'\right) +$$

$$+\left(g' - k'\right)\left[f_{k't} + f_{k'k}\left(k' + \frac{\partial k}{\partial a}a' + \frac{\partial k}{\partial b}b'\right) + f_{k'k'}\left(k'' + \frac{\partial k'}{\partial a}a' + \frac{\partial k'}{\partial b}b'\right)\right] = 0 \tag{48}$$

Исключая теперь a' и b' из уравнений (47) и (48) и обозначая для краткости через $f_t(t), f_{k'\omega}(t)$, и т. п. функции

$$f_t\left[t, k\left(t, a(t), b(t)\right), k'\left(t, a(t,)b(t)\right)\right], f_{k'\omega}\left[t, k\left(t, a(t), b(t)\right), k'\left(t, a(t), b(t)\right)\right] \text{ и т. п.,}$$

а через $k_a(t), k_b(t)$ функции $k_a\left(x, a(t), b(t)\right)$, $k_b\left(x, a(t), b(t)\right)$, найдем после несложных вычислений в результате исключения $a'(t)$ и $b'(t)$ соотношение

$$\begin{vmatrix} S_g(t) & \left[g'(t) - k'(t)\right] f_{k'k'}(t) \dfrac{\partial k'(t)}{\partial a} & \left[g'(t) - k'(t)\right] f_{k'k'}(t) \dfrac{\partial k'(t)}{\partial b} \\ k'(t) - g'(t) & \dfrac{\partial k(t)}{\partial a} & \dfrac{\partial k(t)}{\partial b} \\ 0 & \dfrac{\partial k(x)}{\partial a} & \dfrac{\partial k(x)}{\partial b} \end{vmatrix} = 0, \tag{49}$$

где по прежнему через $S_g(t)$ обозначена функция (35). Раскрывая последний определитель, полагая в нем $t = t_0$, вспоминая выражения (37) для $u_1(x)$ и $u_2(x)$ и что

$$R(t_0) = f_{k'k}\left(t_0, k(t_0, a_0, b_0,), k'(t_0, a_0, b_0),\right)$$

напишем соотношение (49) в виде

$$S_g(t_0) u_2(x) - R(t_0)\left(g'(t_0) - k'(t_0)\right)^2 u_1(x) = 0,$$

а это ничто иное как уравнение (43), определяющее абсциссы точек, сопряженных с кривой $y = g(x)$.

С другой стороны, это уравнение удовлетворяется теми значениями x, для которых удовлетворяется уравнение (47) при $a=a_0$ и $b=b_0$. Что касается последнего уравнения, то оно определяет абсциссу точки касания экстремали $y=\kappa(x,a_0,b_0)$ с оберткой семейства экстремалей, трансверсальных к кривой $y=g(x)$.

Таким образом видим, что **точка, в которой экстремаль**

$$y=k(x,a_0,b_0)$$

в первый раз за точкой M, для которой $x=t_0$, касается обертки экстремалей, трансверсальных к кривой $y=g(x)$, представляет первую правую сопряженную точку этой кривой.

Заметим, что положение точки, сопряженной с кривой $y=g(x)$, зависит от кривизны этой кривой в точке M, так как $S_g(t_0)$ зависит от $g''(t_0)$.

Остановимся несколько на этой зависимости

Обозначая через r_0 радиус кривизны кривой $y=g(x)$ в точке с абсциссой t_0 и помня, что

$$g''(t_0)=\frac{\left[1+g'^2(t_0)\right]^{3/2}}{r_0},$$

напишем выражение (35) для $S_g(t_0)$ следующим образом

$$S_g(t_0)=\frac{l_g(t_0)}{r_0}+w_g(t_0) \tag{50}$$

где

$$l_g(t_0)=-f_{k'}(1+g'^2)^{3/2}$$

$$w_g(t_0)=-\left[f_t-k'f_{tk'}-k'k''f_{k'k'}+\left(f_{k'}+f_{tk'}+k''f_{k'k'}-f_{k'k}\right)g'\right]_{t=t_0}$$

Если положим, что t'_0 представляет абсциссу точки, сопряженной с кривой $y=g(x)$, то тогда

$$S_g(t_0)u_2(t'_0)-R(t_0)\left[g'(t_0)-\kappa'(t_0)\right]^2u_1(t'_0)=0,$$

а потому, подставляя полученное только-что для $S_g(t_0)$ значение, найдем из этого равенства величину радиуса кривизны r_0 как функцию абсциссы сопряженной точки, а именно

$$\frac{1}{r_0}=\frac{R(t_0)[g'(t_0)-\kappa'(t_0)]^2}{l_g(t_0)}\cdot\frac{u_1(t'_0)}{u_2(t'_0)}-\frac{W_g(t_0)}{l_g(t_0)}. \tag{51}$$

К совершенно аналогичным результатам приводит рассмотрение задачи об экстремуме интеграла

$$J = \int_c^t f(x,y,y')dx$$

в функциональной области, для функций которой выполняются условия

$$y(c) = C, \qquad y(t) = m(t),$$

где C данное число, а m (x) функция класса C'' в некотором интервале.

Необходимые условия, которым должна удовлетворять искомая функция φ (x) таковы: кривая $y = \varphi(x)$ должна быть экстремалью вдоль которой должно удовлетворяться условие Лежандра; на ней не должна находиться точка, сопряженная с точкой M (c, C), т. е. для нее должно удовлетворяться условие Якоби; вдоль ее при сильном экстремуме должно удовлетворяться условие Вейерштрасса, заменяющее, как известно, условие Лежандра; в точке пересечения N кривой $y = m(x)$ с кривой $y = \varphi(x)$ первая должна пересекать вторую трансверсально; наконец, должно выполняться обобщенное условие Якоби, а именно: первая л е в а я сопряженная точка кривой $y = m(c)$, т. е. первая точка, в которой экстремаль $y = \varphi(x)$ касается обертки экстремалей, пересекаемых трансверсально к кривой $y = m(x)$, должна иметь абсциссу меньшую абсциссы c точки M.

4. Остановимся на исследовании еще одного вопроса, которое нам понадобится впоследствии. В § 1 мы видели, что для существования семейства экстремалей

$$y = к \Big[x, a(t), b(t) \Big] \tag{52}$$

трансверсальных к кривой $y = g(x)$, должен быть отличен от нуля определитель $\triangle$, значение которого дано выражением (14).

Посмотрим, при каких условиях экстремали (51) образуют поле, окружающее экстремаль $y = \varphi(x)$, при чем

$$y = \varphi(x) = k\Big(x, a(t_0), b(t_0)\Big) = k(x, a_0, b_0).$$

В случае регулярной и определенной задачи определитель $\triangle$ отличен от нуля при $t = t_0$, $a = a_0$, $b = b_0$, а, следовально, и для всех значений t, a, b, удовлетворяющих условиям

$$|t - t_0| < \varepsilon, \qquad |a - a_0| < \eta, \qquad |b - b_0| < \eta,$$

где ε и η некоторые определенные, достаточно малые числа.

Если теперь предположим, что выполнено обобщенное условие Якоби, то вдоль всего отрезка MN экстремали $y = \varphi(x)$ функция

$$\left(\frac{\partial k\big(x, a(t), b(t)\big)}{\partial t}\right)_{t = t_0}$$

отлична от нуля. Отсюда вытекает, что при соответствующем выборе ε, а, следовательно, и η, функция

$$\frac{\partial k\big(x, a(t), b(t)\big)}{\partial t}$$

будет отлична от нуля в интервале $t_0 \leqslant x \leqslant c$.

Но тогда, как нетрудно видеть, можем выбрать такое положительное число d, чтобы для всех значений интервала $t_0 - \varepsilon \leqslant x \leqslant c$ и для всех значений y, удовлетворяющих условию

$$|y - \varphi(x)| < d$$

уравнение (52) допускало единственное решение относительно t класса C'.

Другими словами, при указанных условиях экстремали (52) образуют поле, окружающее экстремаль $y = \varphi(x)$.

5. Рассмотрим теперь условия экстремума интеграла J в предположении, что концы искомой кривой находятся на двух данных кривых

$$y = g(x), \qquad y = m(x) \tag{53}$$

класса (C'').

Условимся через M, M_1, M_2 и т. д. обозначать точки на кривой $y = g(x)$, а через N, N_1, N_2 и т. д. — точки на кривой $y = m(x)$.

Очевидно, что для существования экстремума прежде всего необходимо, чтобы: 1) искомая кривая $y = \varphi(x)$ была экстремалью; 2) вдоль нее должно удовлетворяться условие Лежандра, а в случае сильного экстремума—заменяющее его условие Вейерштрасса; 3) если концы кривой $y = \varphi(x)$ будут M и N, то ближайшая правая сопряженная с кривой $y = g(x)$ точка должна лежать за точкой N, а ближайшая левая, сопряженная с кривой $y = m(x)$, должна предшествовать точке M.

Для удобства в дальнейшем будем называть кривую $y = g(x)$ *начальной кривой*, а кривую $y = m(x)$ *конечной кривой*.

Покажем, что для существования экстремума необходимо выполнение еще одного условия, найденного впервые Блиссом, а именно: *ближайшая правая сопряженная с начальной кривой точка не должна предшествовать ближайшей правой* сопряженной с конечной кривой точкой, и, наоборот ближайшая левая сопряженная с начальной кривой точка не должна предшествовать ближайшей левой, сопряженной с конечной кривой точкой. Для определенности положим, что выполнены все указанные выше условия, кроме условия Блисса, необходимые для существования минимума.

В самом деле, пусть правая сопряженная с кривой $y=g(x)$ точка P_g предшествует правой сопряженной с кривой $y=m(x)$ точке P_m Возьмем какую-либо точку Q, лежащую между P_g и P_m. Так как она лежит *за* точкой, сопряженной с кривой $y=g(x)$, то в силу результатов, полученных нами в § 2, найдем такую кривую M_1N_1Q, которую обозначим через L, вдоль которой наш интеграл будет меньше интеграла, взятого по экстремали $MNQy=\varphi(x)$, которую обозначим через E, так что

$$J^{(L)}_{M_1Q}<J^{(E)}_{MQ} \tag{54}$$

Далее, так как Q лежит перед точкой P_m, сопряженной справа с кривой $y=m(x)$, то интеграл наш, взятый между точками N и Q по экстремали E, будет меньше интеграла взятого между точками N_1 и Q взятому по кривой L так, что

$$J^{(E)}_{NQ}<J^{(L)}_{N_1Q} \tag{55}$$

Из (54) и (55) имеем

$$J^{(L)}_{M_1N_1}=J^{(L)}_{M_1Q}-J^{(L)}_{N_1Q}<J^{(E)}_{MQ}-J^{(E)}_{NQ}=J^{(E)}_{MN},$$

а это противоречит условию, что значение $J^{(E)}_{MN}$ минимальное.

Совершенно аналогичным образом доказывается и вторая часть теоремы Блисса.

Заметим, что мы оставляем здесь в стороне случай, когда точки P_g и P_m совпадают.

6. Теперь уже не трудно вывести достаточные условия для существования экстремума (в частности минимума) интеграла J, при одной или обеих переменных конечных точках.

Начнем со случая, когда начала кривых , по которым берется интеграл J, лежат на данной кривой $y=g(x)$, точки которой будем обозначать через M, M_1, M_2, ... , а конец лежит в данной точке N (c, C).

Пусть имеем регулярную и определенную задачу, при чем выполняются условия Эйлера и обобщенное условие Якоби.

Посмотрим, каково достаточное условие для того, чтобы отрезок MN экстремали дал минимум в области некоторых близких кривых $y=y(x)$.

Рассмотрим семейство экстремалей, пересекаемых трансверсально кривой $y=g(x)$.

Обозначая по прежнему через $\underline{t}$ абсциссу точки пересечения этой кривой с соответствующей экстремалью, можем написать уравнение этого семейства в виде

$$y=\kappa\big(x, a(t), b(t)\big), \tag{56}$$

причем экстремаль MN соответствует значению $t=t_0$, т. е.

$$y=\varphi(x)=\kappa\big(x, a(t_0), b(t_0)\big) \tag{57}$$

По определению имеем

$$\kappa\big(t, a(t), b(t)\big)=g(t). \tag{58}$$

Как мы видели в § 4, при выполнении наших условий семейство (56) образует поле для всех значений x, y и t, для которых

$$t_0 < x < t'_0, \quad |y-\varphi(x)| < d, \quad |t-t_0| < \varepsilon,$$

где t'_0 абсцисса первой справа сопряженной точки кривой $y=g(x)$ а $\underline{d}$ и $\underline{\varepsilon}$ некоторые положительные числа.

Пусть $p(x,y)$ функция поля семейства экстремалей (56).

В силу того, что экстремали эти пересекают кривую $y=g(x)$ трансверсально, в каждой точке этой кривой, лежащей в поле, имеем

$$f(x,g,p)+(g'-p)\,f_p(x,g,p)=0,$$

а потому Гильбертовский интеграл

$$H=\int\big(f(x,y,p)+(y'-p)f_p(x,y,p)\big)\,dx, \tag{59}$$

взятый по кривой $y=g(x)$ между любыми точками, тождественно равен нулю.

Будем теперь сравнивать интеграл J, взятый по отрезку экстрамали MN, с интегралом, взятым по какой-либо кривой M_1N, лежащей в рассматриваемом поле.

По теореме Гильберта-Бельтрами имеем, что интеграл (59), взятый между двумя точками по каким-либо кривым, лежащим в поле, имеет одно и то же значение. Далее ясно, что, если мы возьмем этот интеграл по какой-либо из экстремалей, образующих поле, то он обратится b интеграл J.

Будем сравнивать между собою значения интеграла J, взятого по какой-либо кривой $y=y(x)$ между точкой M_1, лежащей на кривой $y=y(x)$ и точкой N. Если абсцисса точки M_1 будет t, то наш интеграл будет

$$J_y=\int_t^c f\Big(x, y(x), y'(x)\Big)\,dx. \tag{60}$$

Что касается интеграла J, взятого по экстремали MN, то он равен

$$J_\varphi=\int_{t_0}^c f\Big(x, \varphi(x), \varphi'(x)\Big)\,dx \tag{61}$$

Интеграл этот мы можем представить как Гильбертовский, взятый по отрезку MM_1 кривой $y=g(x)$ и отрезку M_1N кривой $y=y(x)$ так, что

$$J_\varphi=\int_{t_0}^t\Big(f(x,g,p)+(g'-p)f_p(x,y,p)\Big)dx+\int_t^c\Big[f(x,y,p)+(y'-p)f_p(x,y,p)\Big]dx$$

Первый из этих интегралов обращается в нуль, а потому

$$J_y-J_\varphi=\int_{t_0}^t\Big[f(x,y,y')-f(x,y,p)-(y'-p)f_p(x,y,p)\Big]dx=$$

$$=\int_{t_0}^t E(x,y,y',p)\,dx, \tag{62}$$

где $E(x,y,y',p)$ Вейерштрассовская функция.

Отсюда вытекает, что при выполнении всех указанных выше необходимых условий достаточным условием является сохранение функцией $E(x,y,y',p)$ знака в рассматриваемом поле.

7. Переходим, к рассмотрению случая, когда оба конца кривых функциональной области находятся на данных кривых класса (C'').

$$y=g(x),\quad y=m(x), \tag{63}$$

при чем предположим, что рассматриваются те отрезки этих кривых, для которых абсциссы начальной кривой $y=g(x)$ меньше абсцисс конечной кривой $y=m(x)$. Абсциссы точек начальной кривой будем обозначать через t, а конечной через n. Точки, лежащие на первой кривой, будем обозначать через M, M_1, $M_2, \dots$, а точки, лежащие на второй через N, N_1, $N_2, \dots$ Предположим, что имеем регулярную и определенную задачу, пусть кривая $y=\varphi(x)$ удовлетворяет условиям: Эйлера, обобщенным условиям Якоби, условиям трансверсальности и условиям Блисса.

Как мы видели в предыдущем §-е, существует семейство экстремалей (56), пересекаемых трансверсально кривой $y = g(x)$ и образующих поле. К числу кривых этого семейства принадлежит и кривая $y = \varphi(x)$, данная соотношением (57) и пересекающая кривые (63) соответственно в точках M и N с абсциссами t_0 и n_0.

Допустим еще, что функция $E(x,y,y',p)$ в поле экстремалей (56) сохраняет свой знак, положим, остается положительной.

Функциональную область, образованную отрезками экстремалей (56) между кривыми $y = g(x)$ и $y = m(x)$, назовем областью (F); эта область образует поле.

Кривые класса (c''), лежащие в этом поле $y = y(x)$ и имеющие концы на кривых (63), в свою очередь, образуют функциональную область (У).

Докажем теперь следующую важную теорему: для того, чтобы экстремаль $y = \varphi$ (x) давала экстремум интеграла J в области (У), необходимо и достаточно, чтобы она давала его в области (F).

В самом деле, возьмем интеграл по какой-либо кривой L области (У) между точками M_1 и N_1. Если через точку N_1 проведем экстремаль M_2N_1 семейства (56), то по предыдущему параграфу интеграл этот будет иметь экстремальное, положим, минимальное значение среди интегралов, взятых по любой кривой (У) с конечной точкой в N_1. Интеграл по экстремали M_2N_1 обозначим через $J(t)$, где t—абсцисса точки M_2, так что

$$J(t) < J^{(L)}_{M_1N_1} \tag{64}$$

Поэтому, если интеграл $J(t_0)$, взятый по экстремали MN представляет минимум в области (F), то и подавно

$$J(t_0) < J^{(L)}_{M_1N_1}$$

Таким образом, достаточность условия доказана. Что же касается его необходимости, то она вытекает из того, что область (F) есть часть области (У).

8. Итак, нахождение достаточных условий существования экстремума в области (У) сводится к нахождению достаточных условий в области (F), т. е. для функций $J(t)$, где по определению

$$J(t) = \int_t^n f\Big(x, k(x,a(t),b(t)), k'(x,a(t),b(t)\Big) dx. \tag{65}$$

В дальнейшем, для краткости, будем писать $\Phi(t,k,k')$, подразумевая, что аргументами k и k' являются t, a (t) и b(t); напротив, в выражении $\Phi(n,k,k')$ будем подразумевать k и k' зависящими от n, a(t) и b(t).

Условившись в этих обозначениях, из (65) имеем

$$\frac{dJ(t)}{dt}=f(n,k,k')\frac{dn}{dt}-f(t,k,k')+\int_t^n\left(f_k\frac{\partial k}{\partial t}+f_{k'}\frac{\partial k'}{\partial n}\right)dx, \tag{66}$$

где

$$\frac{\partial k}{\partial t}=\frac{\partial k}{\partial a}a'+\frac{\partial k}{\partial b}b', \frac{\partial k'}{\partial t}=\frac{\partial k'}{\partial a}a'+\frac{\partial k'}{\partial b}b' \tag{67}$$

Интегрируя по частям второй член и замечая, что $k(x,a,b)$ интеграл уравнения Эйлера, преобразуем (66) в

$$\frac{dJ(t)}{dt}=f(n,k,k')\frac{dn}{dt}+f_{k'}(n,k,k')\frac{\partial k(n)}{\partial t}-f(t,k,k')-f_{k'}(t,k,k')\frac{\partial k(t)}{\partial t} \tag{68}$$

Сумма последних двух членов равна нулю. Действительно, в силу условия трансверсальности, имеем тождественно

$$\begin{gathered} f(t,k,k')+\left(g'(t)-k'(t)\right)f_{k'}(t,k,k')=0, \\ k\left(t,a(t),b(t)\right)=g(t). \end{gathered} \tag{69}$$

Из последнего соотношения имеем

$$k'(t)+\frac{\partial k(t)}{\partial t}=g'(t).$$

Подставляя в условие трансверсальности вместо $g'(t)$ последнее значение, докажем наше утверждение.

Из соотношения

$$k\left(n,a(t),b(t)\right)=m(n)$$

имеем

$$k'(n)\frac{dn}{dt}+\frac{\partial k(n)}{\partial t}=m'(n)\frac{dn}{dt}.$$

Определяя отсюда $\dfrac{\partial k(n)}{\partial t}$ и подставляя в (69), где сумма последних двух членов равна нулю, найдем

$$J'(t)=\frac{dJ(t)}{dt}=\left[f(n,k,k')+\left(m'(n)-k'(n)\right)f_{k'}(n,k,k')\right]\frac{dn}{dt}. \tag{70}$$

Если теперь положим здесь $t=t_0$ т. е. $n=n_0$, другими словами, будем брать интеграл, взятый по экстремали MN, и вспомним, что кривая $y=m(x)$ пересекает эту экстремаль в точке N транверсально, то получим, что

$$\left(\frac{dJ(t)}{dt}\right)_{t=t_0}=0$$

Таково первое необходимое условие, при котором функция $J(t)$ при $t=t_0$ может иметь экстремум.

Рассмотрим теперь значение $J''(t_0)$. Дифференцируя (70), найдем

$$J''(t)=\left[f_t+f_k k'+f_{k'} k''+(m''-k'')\,(f_{\kappa' t}+f_{\kappa'\kappa} k'+f_{\kappa'\kappa'} k'')\right]\left(\frac{dn}{dt}\right)^2+$$

$$+\left[f_\kappa\,\frac{\partial k}{\partial t}+(m'-k')\,\left(f_{\kappa'\kappa}\frac{\partial k}{\partial t}+f_{\kappa'\kappa'}\frac{\partial k'}{\partial t}\right)\right]\frac{dn}{dt}+\left(f+(m'-k')f_{\kappa'}\right)\frac{d^2n}{dt^2}. \tag{71}$$

Здесь везде аргументами служат n, $k\big(n,a(t),b(t)\big)$, $k'\big(n,a(t),b(t)\big)$.

Вычислим значения

$$\frac{\partial k\big(n,a(t),b(t)\big)}{\partial t},\quad \frac{\partial k'\big(n,a(t),b(t)\big)}{\partial t}$$

при $t=t_0$, а, следовательно, при $a=a_0$, $b=b_0$.

Так как экстремали (56) пересекаются кривой $y=g(x)$ трансверсально, то имеют место тождества (69). Дифференцируя их по t, найдем

$$k'+\frac{\partial k}{\partial t}=g',$$

$$f_t-k'f_{\kappa' t}-k'k''f_{\kappa'\kappa'}+(f_\kappa+f_{\kappa' t}+k''f_{\kappa'\kappa'}-k'f_{\kappa'\kappa})+g'^2f_{\kappa'\kappa}+g''f_\kappa+$$
$$+(g'-k')f_{\kappa'\kappa'}\frac{\partial k'}{\partial t}=0.$$

Здесь везде аргументами служат t, $k\big(t,a(t),b(t)\big)$, $k'\big(t,a(t),b(t)\big)$.

Полагая в наших соотношениях $t=t_0$, а, следовательно, $a(t_0)=a_0$, $b(t_0)=b_0$, и припоминая выражение (35) для функции $s_g(t)$, напишем наши последние соотношения в виде

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial k}{\partial t}\right)_0=\left(\frac{\partial k}{\partial a}\right)_0 a'_0+\left(\frac{\partial k}{\partial b}\right)_0 b'_0=g'(t_0)-k'(t_0),\\
&\left(\frac{\partial k'}{\partial t}\right)_0=\left(\frac{\partial k'}{\partial a}\right)_0 a'_0+\left(\frac{\partial k'}{\partial b}\right)_0 b'_0=\frac{s_g(t_0)}{R(t_0)\,\big(g'(t_0)-k'(t_0)\big)},
\end{aligned} \tag{72}$$

где $a'=a'(t_0)$, $b'_0=b'(t_0)$, а все символы вида $\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_0$ означают значения

$$\frac{\partial F}{\partial t}\text{ при } t=t_0.$$

Имеем еще по определению

$$\left(\frac{\partial k(n)}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial k(n)}{\partial a}\right)_0 a'_0 + \left(\frac{\partial k(n)}{\partial b}\right)_0 b'_0. \tag{73}$$

Исключая из (72), (73) и (74) величины a'_0 и b'_0 и вспоминая выражения (37) для интегралов уравнения Якоби $u_1(x)$ и $u_2(x)$ и выражение (44) для интеграла $u_3(x)$, найдем, что

$$\left(\frac{\partial k(n)}{\partial t}\right)_0 = -\frac{u_3(n_0)}{R(n_0)\left(g'(n_0) - k'(n_0)\right)} \tag{74}$$

Точно также, исключая a'_0, b'_0 из соотношений (72) и соотношения

$$\left(\frac{\partial k'(n)}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial k'(n)}{\partial a}\right)_0 a'_0 + \left(\frac{\partial k'(n)}{\partial b}\right)_0 b'_0,$$

получим

$$\left(\frac{\partial k'(n)}{\partial t}\right)_0 = -\frac{u'_3(n_0)}{R(n_0)\left(g'(n_0) - k'(n_0)\right)} \tag{75}$$

Точно таким же образом из соотношения

$$k\left(n, a(t), tb(t)\right) = m(n)$$

путем дифференцирования соотношений (72) и выражения для $u_3(x)$, найдем

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)_0 = -\frac{u_3(n_0)}{R(t_0)\,[g'(t_0) - k'(t_0)]\,[m'(n_0) - k'(n_0)]}.$$

Полагая $t = t_0$ в (71) и принимая во внимание все сказанное и то, что в точке N экстремаль MN пересекается трансверсально кривой $y = m(x)$, приведем (71) к виду

$$J''(t_0) = -\frac{u_3(n_0)\left[s_m(n_0)u_3(n_0) - [m'(n_0) - k'(n_0)]^2\, R(n_0)u'_3(n_0)\right]}{R^2(n_0)\,[g'(t_0) - k'(t_0)]^2\,[m'(n_0) - k'(n_0)]^2}, \tag{76}$$

где $s_m(t)$ функция, составленная из $m(t)$, как $s_g(t)$ из функции $g(t)$.

Так как $u_3(n_0)$ не равно нулю, ибо точка N не сопряженная с кривой $y = g(x)$, то, следовательно, $J''(t)$ может обратиться в нуль только тогда, когда

$$s_m(n_0)u_3(n_0) - \left[m'(n_0) - k'(n_0)\right]^2 R(n_0)u'_3(n_0) = 0. \tag{77}$$

Постараемся ближе исследовать это условие.

Заметим, что при $t = t_0$, как это видно из (44) в силу (39),

$$u_3(t_0) = -R(t_0)\left[g'(t_0) - k'(t_0)\right]^2 u_1(t_0), \quad u'_3(t_0) = -s_g(t_0)u_1(t_0),$$

откуда видим, что

$$s_g(t_0)u_3(t_0) - \left[g(t_0) - k'(t_0)\right]^2 R(t_0)u'_3(t_0) = 0 \tag{78}$$

Обозначим теперь через $v(x)$ тот интеграл уравнения Якоби, который обращается в нуль для первой правой точки, сопряженной с кривой $y = m(x)$.

Для этого интеграла получим соотношение, аналогичное (78), если только величины, относящиеся к функции $g(x)$, заменим соответствующими величинами, относящимися к функции $m(x)$ и, кроме того, значение t_0 заменим значением n_0. При этих условиях получим

$$s_m(n_0)v(n_0) - \left[m'(n_0) - k'(n_0)\right]^2 R(n_0)v'(n_0) = 0. \tag{79}$$

Из (77) и (79) имеем

$$\left[m'(n_0) - k'(n_0)\right]^2 R(n_0)\left[v'(n_0)u_3(n_0) - v(n_0)u'_3(n_0)\right] = 0 \tag{80}$$

Так как условие Лежандра выполнено, т. е. $R(n_0) \neq 0$ и, кроме того, задача определенна, т. е. $\left[m'(n_0) - k'(n_0)\right]$ отлично от нуля, то последнее соотношение возможно лишь при условии

$$v'(n_0)u_3(n_0) - v(n_0)u'_3(n_0) = 0.$$

Последнее соотношение, как это вытекает из теоремы Абеля, возможно лишь тогда, когда интегралы $u_3(x)$ и $v(x)$ отличаются только постоянным множителем, а в таком случае сопряженные с кривыми $y = g(x)$ и $y = m(x)$ точки совпадают. Другими словами, $J''(t_0)$ обращается в нуль только тогда, когда точки, сопряженные с кривыми $y = g(x)$ и $y = m(x)$, совпадают.

Отсюда следует, что, если в определенной задаче при выполнении условий Эйлера, Лежандра, обобщенного Якоби, Блисса, при сохранении знака функции $E(x,y,y',p)$ в поле экстремалей (56) сопряженные точки кривых $y = g(x)$ и $y = m(x)$ не совпадают, то функция $J(t)$ имеет экстремум при $t = t_0$, т. е. интеграл J имеет экстремум вдоль экстремали MN.

Так как экстремум интеграла

$$J = \int_{t}^{n} f(x,y,y')dx$$

будет иметь место одновременно с экстремумом функции $J(t)$, то, если $J''(t_0) = 0$, для существования экстремума интеграла J в этом последнем случае необходимо и достаточно, чтобы существовало такое положительное число $2q$, чтобы удовлетворялись соотношения

$$J'(t_0) = J''(t_0) = \ldots = J^{(2q-1)}(t_0) = 0, \quad J^{(2q)}(t_0) \neq 0.$$

Само собою разумеется, что условия существования производных $J'(t)$, $J''(t)$, . . . налагают определенные условия на под'интегральную функцию. Останавливаться в настоящей статье на рассмотрении последнего случая я не буду.