Généralisation de la méthode de Cauchy de l'intégration de l'équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre.

C. Russyan.

Etant donnée l'équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre

$$F(x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n) = 0$$

pour trouver son intégrale se reduisant pour $x_1 = x_1^0$ á la fonction donnée $\varphi(x_2, \ldots x_n)$, il faut d'après Cauchy trouver le système principal pour $x_1 = x_1^0$ de 2n intégrales

$$\text{(a)}\qquad \begin{aligned} x_j &= x_j(x_1,\ x_2^0, \ldots x_n^0,\ z_0,\ p_1^0, \ldots p_n^0) \quad (j = 2 \ldots n) \\ z &= z(x_1,\ x_2^0, \ldots x_n^0,\ z_0,\ p_1^0, \ldots p_n^0) \\ p_i &= p_i(x_1,\ x_2^0, \ldots x_n^0,\ z_0,\ p_1^0, \ldots p_n^0) \quad (i = 1 \ldots n) \end{aligned}$$

du système de 2n équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx_i}{\frac{\partial F}{\partial p_i}} = \frac{dz}{\sum_1^n k\ p_k \frac{\partial F}{\partial p_k}} = -\frac{dp_i}{\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z}} \qquad (i = 1 \ldots n)$$

et éliminer $x_2^0, \ldots p_n^0$ des équation (a) et des équations

$$F(x_1^0, \ldots p_n^0) = 0, \qquad \varphi(x_2^0, \ldots x_n^0) = z_0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x^0_j} = p^0_j \quad (j = 2 \ldots n)$$

La première des $n + 1$ équations obtenues

$$z = f(x_1, \ldots x_n), \quad p_i = f_i(x_1, \ldots x_n) \quad (i = 1 \ldots n)$$

est l'intégrale cherchée si en vertu de ces dernières équations $\frac{\partial F}{\partial p_1} \neq 0$.

Cette méthode peut être généralisée comme il suit: étant donnée le système de $m < n$ équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre en involution

$$F_\alpha(x_1, .. x_n, z, p_1, .. p_n) = c_\alpha \qquad (\alpha = 1 .. m) \tag{I}$$

et indépendantes p. ex. par rapport à $p_1, .. p_m$ de sorte que

$$[F_\alpha, F_\beta] = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1 .. m) \text{ et } \triangle = \frac{\partial(F_1 .. F_m)}{\partial(p_1 .. p_m)} \neq 0$$

pour trouver l'intégrale commune de ces équations se réduisant pour $x_1 = x_1^0 .. x_m = x_m^0$ à la fonction donnée $\varphi(x_{m+1} .. x_n)$ on doit trouver le système principal pour $x_1 = x_1^0 .. x_m = x_m^0$ de $2n+1-m$ intégrales du système de $2n+1-m$ équations différentielles ordinaires aux différentielles totales qu'on obtient en égalant à zéro $2n+1-m$ détérminants indépendants du degré $m+1$ du système d'éléments

$$\left|\begin{array}{cccccc} dx_1 \ldots dx_n, & dz, & & dp, \ldots\ldots\ldots & dp_n & \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_1}, \ldots \frac{\partial F_1}{\partial p_n}, & \sum_1^n k\, p_k \frac{\partial F_1}{\partial p_k}, & -\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - p_1 \frac{\partial F_1}{\partial z}, \ldots & -\frac{\partial F_1}{\partial x_n} - p_n \frac{\partial F_1}{\partial z}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial p_1}, \ldots \frac{\partial F_m}{\partial p_n}, & \sum_1^n k\, p_k \frac{\partial F_m}{\partial p_k}, & -\frac{\partial F_m}{\partial x_1} - p_1 \frac{\partial F_m}{\partial z}, \ldots & -\frac{\partial F_m}{\partial x_n} - p_n \frac{\partial F_m}{\partial z} \end{array}\right| \text{ [1]}$$

et éliminer $x_{m+1}^0 \ldots x_n^0$, z_0, $p_1^0 \ldots p_n^0$ de ces intégrales

$$\begin{aligned} x_j &= x_j(x_1, .. x_m, x_{m+1}^0 \ldots x_n^0, z_0, p_1^0 .. p_n^0) \qquad (j = m+1 \ldots n) \\ z &= z(x_1, .. x_m, x_{m+1}^0 \ldots x_n^0, z_0, p_1^0, .. p_n^0) \\ p_i &= p_i(x_1, .. x_m, x_{m+1}^0, \ldots x_n^0, z_0, p_1^0, .. p_n^0) \qquad (i = 1 .. n) \end{aligned}$$

et des équations

$$F_\alpha(x_1^0 .. x_n^0, z_0, p_1^0, .. p_n^0) = c_\alpha \quad (\alpha = 1 \ldots m),$$

$$\varphi(x_{m+1}^0, .. x_n^0) = z_0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_j^0} = p_j^0 \quad (j = m+1 \ldots n).$$

La première dés équations obtenues

$$z = f(x_1, .. x_n), \qquad p_i = f_i(x_1, .. x_n) \qquad (i = 1 .. n)$$

est l'intégrale cherchée si pour ces équations $\triangle \neq 0$.

[1] Le système canonique de Hamilton généralisé.

Pour trouver l'intégrale commune des équations données (I) il faut et il suffit trouver $n+1$ fouctions z, p_i $(i=1..n)$ des variables indépendantes $x_1, .. x_n$ satisfaisant aux équations (I) et à l'équation

$$dz - p_1 dx_1 - .. - p_n dx_n = 0. \tag{II}$$

Introduisons au lieu des variables $x_{m+1}, .. x_n$ les variables $y_{m+1} \cdots y_n$ à l'aide des formules quelconques pourvu que soit

$$\triangle_1 = \frac{\partial(x_{m+1} .. x_n)}{\partial(y_{m+1} .. y_n)} \neq 0.$$

Les fonctions cherchées z, p_i $(i=1..n)$ deviendrons celles des variables indépendantes $x_1 .. x_m, y_{m+1} .. y_n$. Il suit des équations (I) que

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_k \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \sum_{m+1}^n{}_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_i} +$$

$$+ \sum_{m+1}^n{}_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0 \qquad (i=1..m) \tag{III}$$

$$\sum_{m+1}^n{}_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial y_s} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y_s} + \sum_1^m{}_i \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial y_s} +$$

$$+ \sum_{m+1}^n{}_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial y_s} = 0 \qquad (s=m+1..n) \tag{IV}$$

et de l'équation (II) que

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i + \sum_{m+1}^n{}_j\, p_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \qquad (i=1..m) \tag{V}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y_s} = \sum_{m+1}^n{}_j\, p_j \frac{\partial x_j}{\partial y_s} \qquad (s=m+1..n). \tag{VI}$$

On peut encore y ajouter les équations

$$\frac{\partial p_i}{\partial y_s} = \sum_{m+1}^n{}_j \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_i}\frac{\partial x_j}{\partial y_s} - \frac{\partial p_j}{\partial y_s}\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right) \quad (i=1..m,\ s=m+1..n) \tag{VII}$$

qu'on obtient des équations (V), (VI) par les différentiations.

Dans ce qui va suivre nous représenterons par $\triangle_{(i)p_k}$, $\triangle_{(i)x_k}$, $\triangle_{(i)z}$ le résultat de la substitution dans le détérminant $\triangle$ au lieu des éléments $\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}$ $(\alpha = 1 \ldots m)$ des elements $\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k}, -\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_k} - p_k \frac{\partial F_\alpha}{\partial z}, -$ $-\frac{\partial F_\alpha}{\partial z}$ respectivement $(i = 1 \ldots m, \; k = 1 \ldots n)$.

Portons daus les équations (IV) les valeurs des $\frac{\partial z}{\partial y_s}, \frac{\partial p_i}{\partial y_s}$ $(i = 1 \ldots m, \; s = m+1 \ldots n)$ tirées des équations (VI), (VII). On aura

$$\sum_{m+1}^{n} {}_j \frac{\partial y_j}{\partial y_s}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial z} + \sum_{1}^{m} {}_i \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial p_j}{\partial x_i}\right) +$$

$$+ \sum_{m+1}^{n} {}_j \frac{\partial p_j}{\partial y_s}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_j} - \sum_{1}^{m} {}_i \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right) = 0 \qquad (s = m+1 \ldots n).$$

Choisissons si c'est possible les formules de la transformation mentionnée de la manière que

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_j} - \sum_{1}^{m} {}_i \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1 \ldots m \\ j = m+1 \ldots n \end{pmatrix} \qquad \text{(VIII)}$$

Comme $\triangle_1 \neq 0$ il viendra que

$$\text{(IX)} \qquad \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial z} + \sum_{1}^{m} {}_i \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0 \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1 \ldots m \\ j = m+1 \ldots n \end{pmatrix}.$$

On peut présenter les équations (VIII), (IX) dans une autre forme. En supposant que j aie la valeur constante quelconque $m+1 \ldots n$ et que $\alpha = 1 \ldots m$ et en résolvant les 2m équations obtenues par rapport aux $\frac{\partial x_j}{\partial x_i}, \frac{\partial p_j}{\partial x_i}$ $(i = 1 \ldots m)$ on a

$$\triangle \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \triangle_{(i)p_j}, \quad \triangle \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = \triangle_{(i)x_j}. \qquad \text{(a)}$$
$$(i = 1 \ldots m, \; j = m+1 \ldots n).$$

Si dx_j, dp_j $(j = m+1 \ldots n)$ sont les différentielles totales des x_j, p_j par rapport aux variables indépendantes $x_1 \ldots x_m$ on a que

$$\triangle \, dx_j - \sum_{1}^{m} {}_i \triangle_{(i)p_j} dx_i = 0,$$

$$\triangle\, dp_j - \sum_1^m {}_i \triangle_{(i)\,x_j}\, dx_i = 0$$

ou que

$$\begin{vmatrix} dx_1 \dots & dx_m & dx_j \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_1}, \dots & \frac{\partial F_1}{\partial p_m}, & \frac{\partial F_1}{\partial p_j} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial p_1}, \dots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m}, & \frac{\partial F_m}{\partial p_j} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} dx_1 \dots & dx_m & dp_j \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_1}, \dots & \frac{\partial F_1}{\partial p_m}, & -\frac{\partial F_1}{\partial x_j} - p_j \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial p_1}, \dots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m}, & -\frac{\partial F_m}{\partial x_j} - p_j \frac{\partial F_m}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

$$(j = m+1 \,..\, n).$$

C'est l'autre forme des équations (VIII), (IX). Portons maintenant les valeurs des $\frac{\partial z}{\partial x_i}, \frac{\partial x_j}{\partial x_i}, \frac{\partial p_j}{\partial x_i}$ $(j = m+1 \,..\, n)$ tirées des équations (V), (a) dans l'équation (III).

On aura

$$\triangle \sum_1^m {}_k \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \triangle\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F_\alpha}{\partial z}\right) + \sum_{m+1} {}_j \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial z}\right) \triangle_{(i)p_j} +$$

$$+ \sum_{m+1}^n {}_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_j} \triangle_{(i)\,xj} = 0 \quad (\alpha, i = 1 \dots m).$$

$$\text{Or} \quad [F_\alpha, F_\beta] = 0 \quad (\alpha, \beta = 1 \,..\, m)$$

ou

$$\sum_1^m {}_i \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F_\alpha}{\partial z}\right) \frac{\partial F_\beta}{\partial p_i} + \sum_{m+1}^n {}_j \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial z}\right) \frac{\partial F_\beta}{\partial p_j} -$$

$$- \sum_{m+1}^n {}_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_j} \left(\frac{\partial F_\beta}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial F_\beta}{\partial z}\right) = \sum_1^m {}_k \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k} \left(\frac{\partial F_\beta}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial F_\beta}{\partial z}\right)$$

$$(\alpha, \beta = 1 \,..\, m).$$

Supposant que α aie la valeur constante quelconque $1 \,..\, m$, et que $\beta = 1 \,..\, m$ et résolvant les m équations obtenues par rapport aux $\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F_\alpha}{\partial z}$ $(i = 1 \,..\, m)$ on a que

$$\triangle\left(\frac{\partial F_a}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial F_a}{\partial z}\right)+\sum_{m+1}^{n}{}_j\left(\frac{\partial F_a}{\partial x_j}+p_j\frac{\partial F_a}{\partial z}\right)\triangle_{(i)p_j}+$$

$$+\sum_{m+1}^{n}{}_j\frac{\partial F_a}{\partial p_j}\triangle_{(i)x_j}=-\sum_{1}^{m}{}_k\frac{\partial F_a}{\partial p_k}\triangle_{(i)x_k}.$$

Donc

$$\sum_{1}^{m}{}_k\frac{\partial F_a}{\partial p_k}\left(\triangle\frac{\partial p_k}{\partial x_i}-\triangle_{(i)x_k}\right)=0\quad\left(\begin{matrix}a=1\,..\,m\\ i=1\,..\,m\end{matrix}\right)$$

et comme $\triangle\neq 0$ il s'ensuit que

$$\triangle\frac{\partial p_k}{\partial x_i}=\triangle_{(i)x_k}\qquad (i,k=1\,...\,m).$$

Si dp_k est la différentielle totale de p_k par rapport aux variables $x_1\,..\,x_m$ on a que

$$\triangle\, dp_k-\sum_{1}^{m}{}_i\,\triangle_{(i)x_k}\,dx_i=0\quad(k=1\,..\,m)$$

ou que

$$\left|\begin{matrix} dx_1\,....\,dx_m & & dp_k\\ \frac{\partial F_1}{\partial p_1},\,...\,\frac{\partial F_1}{\partial p_m}, & -\frac{\partial F_1}{\partial x_k} & -p_k\frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial p_1},\,...\,\frac{\partial F_m}{\partial p_m}, & -\frac{\partial F_m}{\partial x_k} & -p_k\frac{\partial F_m}{\partial z}\end{matrix}\right|=0\quad(k=1\,..\,m).$$

Portons enfin les valeurs (a) des $\frac{\partial x_j}{\partial x_i}$ $(j=m+1\,..\,n)$ dans l'équation (V).

On aura que

$$\triangle\frac{\partial z}{\partial x_i}=\sum_{1}^{n}{}_k\,p_k\,\triangle_{(i)p_k}.$$

Si dz est la différentielle totale de z par rapport aux variables $x_1\,...\,x_m$, on a que

$$\triangle\, dz-\sum_{1}^{m}{}_i\,dx_i\left(\sum_{1}^{n}{}_k\,p_k\,\triangle_{(i)p_k}\right)=0$$

ou que

$$\begin{vmatrix} dx_1 \ldots. & dx_m & dz \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_1}, \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial p_m}, & \sum_1^n{}_k\, p_k \frac{\partial F_1}{\partial p_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial p_1}, \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m}, & \sum_1^n{}_k\, p_k \frac{\partial F_m}{\partial p_k} \end{vmatrix} = 0.$$

Nous avons donc obtenu le résultat suivant: si la transformation mentionnée est possible, les fonctions cherchées z, p_i $(i = 1 \ldots n)$, et x_j $(j = m + 1 \ldots n)$ considérées comme les fonctions des variables indépendantes $x_1 \ldots x_m$ doivent satisfaire aux $2n + 1 - m$ équations différentielles ordinaires aux différentielles totales qu'on obtient en égalant à zéro les $2n + 1 - m$ détérminants indépendants du degré $m + 1$ du système d'éléments

$$\begin{vmatrix} dx_1 \ldots & dx_n & dz & dp_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & dp_n \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_1}, \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial p_n}, & \sum_1^n{}_k\, p_k \frac{\partial F_1}{\partial p_k}, & -\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - p_1 \frac{\partial F_1}{\partial z}, \ldots & -\frac{\partial F_1}{\partial x_n} - p_n \frac{\partial F_1}{dz} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial p_1}, \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_n}, & \sum_1^n{}_k\, p_k \frac{\partial F_m}{\partial p_k}, & -\frac{\partial F_m}{\partial x_1} - p_1 \frac{\partial F_m}{\partial z}, \ldots & -\frac{\partial F_m}{\partial x_n} - p_n \frac{\partial F_m}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Mais ce systéme d'équations ordinaires correspond au système complet d'équations linéaires

$$\left[V, F_\beta\right] = 0 \quad (\beta = 1 \ldots m).$$

Il est donc complétement intégrable; la transformation mentionnée est possible et, si le système principal pour $x_1 = x_1^0, \ldots x_m = x_m^0$ des $2n + 1 - m$ intégrales de ces équations est

$$\begin{aligned} x_j &= x_j\,(x_1, \ldots x_m,\ x^0_{m+1}, \ldots p^0_n) \quad (j = m + 1 \ldots n) \\ z &= z\,(x_1, \ldots x_m,\ x^0_{m+1}, \ldots p^0_n) \qquad\qquad\qquad (b) \\ p_i &= p_i\,(x_1, \ldots x_m,\ x^0_{m+1}, \ldots p^0_n), \quad (i = 1 \ldots n) \end{aligned}$$

les fonctions cherchées z, p_i $(i = 1 \ldots n)$ et x_j $(j = m + 1 \ldots n)$ doivent avoir la forme (b), où $x^0_{m+1}, \ldots p^0_n$ sont les fonctions des $y_{m+1}, \ldots y_n$, qu'on doit encore détérminer.

Comme $F_\alpha (x_1, \dots p_n)$ $(\alpha = 1 \dots m)$ sont les solutions du système complet d'equations partielles linéaires

$$\left[V, F_\beta\right] = 0 , \quad (\beta = 1 \dots m)$$

on a en vertu des équations (b) que

$$F_\alpha (x_1, \dots p_n) = F_\alpha (x_1^0, \dots p_n^0) \qquad (\alpha = 1 \dots m).$$

et, comme les fontions cherchées doivent satisfaire aux équations (I), ona que

$$F_\alpha (x_1^0, \dots p_n^0) = C_\alpha \qquad (\alpha = 1 \dots m).$$

Ces équations définissent m des fonctions $x_{m+1}^0, \dots p_n^0$ p. ex. $p_1^0 \dots p_m^0$ en fonctions des autres d'elles. En vertu des rélations précedentes les formules (b) deviennent celles (c), qui satisfont aux équations (I) et (V). Il ne reste que satisfaire aux équations (VI).

Si
$$U_s = \frac{\partial z}{\partial y_s} - \sum_{m+1}^{n} {}_j \, p_j \frac{\partial x_j}{\partial y_s}, \qquad (s = m+1 \dots n)$$

où au lieu des z, x_j, p_j, $(j = m + 1 \dots n)$ sont substituées leurs expressions (b) on a que

$$\frac{\partial U_s}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 z}{\partial y_s \partial x_i} - \sum_{m+1}^{n} {}_j \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \frac{\partial x_j}{\partial y_s} - \sum_{m+1}^{n} {}_j \, p_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_s \partial x_i}$$

$$(i = 1 \dots m, \quad s = m + 1 \dots n).$$

Mais

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_s \partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial y_s} + \sum_{m+1}^{n} {}_j \frac{\partial p_j}{\partial y_s} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} + \sum_{m+1}^{n} {}_j \, p_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_s \partial x_i},$$

d'où il vient que

$$\frac{\partial U_s}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial y_s} + \sum_{m+1}^{n} {}_j \frac{\partial p_j}{\partial y_s} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} - \sum_{m+1}^{n} {}_j \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \frac{\partial x_j}{\partial y_s}$$

$$(i = 1 \dots m, \quad s = m + 1 \dots n).$$

En y substituant au lieu des $\frac{\partial x_j}{\partial x_i}$, $\frac{\partial p_j}{\partial x_i}$ leurs valeurs (a) on obtient

$$\triangle \frac{\partial U_s}{\partial x_i} = \triangle \frac{\partial p_i}{\partial y_s} + \sum_{m+1}^{n} {}_j \triangle_{(i)p_j} \frac{\partial p_j}{\partial y_s} - \sum_{m+1}^{n} {}_j \triangle_{(i)x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_s}$$

$$(i = 1 \dots m, \quad s = m + 1 \dots n).$$

Or $F_\alpha(x_1, \ldots p_n) = C_\alpha (\alpha = 1 \ldots m)$

d'où

$$\sum_{m+1}^{n} {}^j \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_s} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_s} + \sum_{1}^{m} {}^i \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial y_s} + \sum_{m+1}^{n} {}^j \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial y_s} = 0$$

$$(\alpha = 1 \ldots m, \quad s = m+1 \ldots n),$$

et en résolvant par rapport à $\dfrac{\partial p_i}{\partial y_s}$,

$$\triangle \frac{\partial p_i}{\partial y_s} + \sum_{m+1}^{n} \triangle_{(i)\,p_j} \frac{\partial p_j}{\partial y_s} - \sum_{m+1}^{n} {}^j \triangle_{(i)\,x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_s}$$

$$= \triangle_{(i)\,z} \left(\frac{\partial z}{\partial y_s} - \sum_{m+1}^{n} {}^j p_j \frac{\partial x_j}{\partial y_s} \right) = \triangle_{(i)z} U_s .$$

Donc

$$\triangle \frac{\partial U_s}{\partial x_i} = \triangle_{(i)z} U_s$$

ou

$$\triangle \frac{\partial}{\partial x_i} \log U_s = \triangle_{(i)z} \qquad (i = 1 \ldots m, \quad s = m+1 \ldots n).$$

Si $d \log U_s$ est la différentielle totale de $\log U_s$ par rapport aux variables $x, \ldots x_m$, on a que

$$d \log U_s = \frac{1}{\triangle} \sum_{1}^{m} {}^i \triangle_{(i)z} dx_i.$$

La seconde partie est la différentielle totale par rapport à $x_1 \ldots x_m$. En effet, le système de $2n+2-m$ équations différentielles ordinaires aux différentielles totales qu'on obtient en égalant à zéro les $2n+2-m$ déterminants indépendants du dégré $m+1$ du système d'éléments

$$\left| \begin{array}{ccccccc} dx_1, \ldots dx_n & dz & dp_1 \ldots\ldots & & dp_n & & dt. \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial p_1}, \ldots \dfrac{\partial F_1}{\partial p_n}, & \displaystyle\sum_{1}^{n} {}^k p_k \frac{\partial F_1}{\partial p_k}, & -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} - p_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial z}, \ldots & -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} - p_n \dfrac{\partial F_1}{\partial z}, & & & -\dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & \ldots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial p_1}, \ldots \dfrac{\partial F_m}{\partial p_n}, & \displaystyle\sum_{1}^{n} {}^k p_k \frac{\partial F_m}{\partial p_k}, & -\dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} - p_1 \dfrac{\partial F_m}{\partial z}, \ldots & -\dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} - p_n \dfrac{\partial F_m}{\partial z}, & & & -\dfrac{\partial F_m}{\partial z} \end{array} \right|$$

correspond au systeme d'équations linéaires

$$\left[V, F_a\right] - \frac{\partial F_a}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad (a = 1 \ldots m),$$

qui est complet, comme il est aisé de voir à l'aide de l'identité de A. Mayer.

Le système d'équations ordinaires est donc complètement intégrable. Comme les équations (b) sont ses $2n + 1 - m$ intégrales, l'équation

$$dt = \frac{1}{\triangle} \sum_{1}^{m} i \triangle_{(i)z} dx_i$$

a en vertu d'équations (b) qu'une intégrale, et comme la seconde partie ne contient pas t, elle est la différentielle totale. Elle la reste évidement en vertu des équations (c) c. q. f. d. Si $\varrho\,(x_1 \ldots x_m)$ est l'intégrale de cette différentielle se réduisant à zéro pour $x_1 = x_1^0, \ldots x_m = x_m^0$ on a en intégrant que

$$U_s = U_s^0 e^{\varrho\,(x_1 \ldots x_m)} \qquad \text{où } U_s^0 = \frac{\partial z_0}{\partial y_s} - \sum_{m+1}^{n} j\, p_j^0 \frac{\partial x_j^0}{\partial y_s} \; ^{1)} \qquad \text{(X)}$$

Les équations donc (VI) sont:

$$\left[\frac{\partial z_0}{\partial y_s} - \sum_{m+1}^{n} j\, p_j^0 \frac{\partial x_j^0}{\partial y_s}\right] e^{\varrho\,(x_1 \ldots x_m)} = 0 \qquad (s = m+1 \ldots n).$$

Nous pouvons supposer que

$$\frac{\partial\,(x_{m+1}^0, \ldots x_n^0)}{\partial\,(y_{m+1}, \ldots y_n)} \neq 0$$

car pour $x_1 = x_1^0, \ldots x_m = x_m^0$

$$\triangle = \frac{\partial\,(x_{m+1}^0, \ldots x_n^0)}{\partial\,(y_{m+1}, \ldots x_n)} \neq 0.$$

Dans cette supposition z_0 est une fonction $\varphi\,(x_{m+1}^0, \ldots x_n^0)$ des $x_{m+1}^0, \ldots x_n^0$ et les équations (VI) sont:

---

1) Il suit des équations (V) et (X) qu'en vertu des équations (c) on a que $dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = e^{\varrho\,(x_1 \ldots x_m)} \left(dz_0 - \sum_{m+1}^{n} j\, p_j\, dx_j^0\right)$ ou $F_a\,(x_1 \ldots p_n) = C_a$ $(\alpha = 1 \ldots m)$. Les équations (c) sont donc les formules de la transformation de Pfaff après laquelle l'éxpression différentielle $dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n$ où $F_a\,(x_1 \ldots p_n) = C_a\,(\alpha = 1 \ldots m)$ ne contient les variables $x_1 \ldots x_m$ qu'en facteur commun $e^{\varrho\,(x_1 \ldots x_m)}$.

$$\sum_{m+1}^{n} j \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j^0} - p_j^0 \right) \frac{\partial x_j^0}{\partial y_s} e^{\varrho (x_1 \cdot\, x_m)} = 0 \qquad (s = m + 1 \ldots n)$$

ou comme

$$\frac{\partial (x_{m+1}^0, \ldots x_n^0)}{\partial (y_{m+1}, \ldots y_n)} \neq 0,$$

$$e^{\varrho (x_1 \ldots x_m)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j^0} - p_j^0 \right) = 0. \qquad (j = m + 1 \ldots n).$$

Il faut et il suffit pour cela que

$$p_j^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j^0} \qquad (j = m + 1 \ldots n)$$

si pour les équations (d) $\triangle \neq 0$, les équations (d) étant les équations (c) après la substitution

$$z_0 = \varphi (x_{m+1}^0, \ldots x_n^0), \qquad p^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j^0} \qquad (j = m + 1 \ldots n).$$

Les fonctions z, p_i $(i = 1 \ldots n)$ sont donc trouvées. Il ne reste qu'éliminer $y_{m+1} \ldots y_n$ en éliminant $x_{m+1}^0, \ldots x_n^0$ à l'aide des $n - m$ premières équations (d). La première des $n + 1$ équations obtenues

(e) $$z = f(x_1, \ldots x_n), p_i = f_i\, (x_1, \ldots x_n) \, (i = 1 \ldots n)$$

est l'intégrale commune des équations (I) si en vertu des équations (e) $\triangle \neq 0$.

On démontrera par le procédé connu que pour $x_1 = x_1^0, \ldots x_m = x_m^0$ l'intégrale $z = f(x_1, \ldots x_n)$ devient $z = \varphi (x_{m+1}, \ldots x_n)$. Comme la fonction $\varphi (x_{m+1}, \ldots x_n)$ reste arbitraire, elle peut être donnée à l'avance.