Об одном типе свойств точечных ансамблей.

Гр. Грузинцев.

1. В теории ансамблей, как и в других областях анализа, мы встречаем целый ряд теорем, которые доказываются совершенно одинаково. Происходит это оттого, что—каково бы ни было содержание доказываемых теорем—при доказательстве их мы пользуемся только теми свойствами ансамблей, которые во всех случаях, которые обращают наше внимание своим сходством,—одни и те же с формальной точки зрения.

Оставляя в стороне те следствия, которые можно извлечь из этого факта для систематизации теории ансамблей в целом, я хочу обратить внимание на некоторые свойства, которые имеют одну и ту же формальную структуру, и изучить их, абстрагируясь от их происхождения.

Помимо некоторых сближений и обобщений, которые мы получим при предлагаемом мной методе исследования, он даст нам некоторого рода экономию в доказательствах; одного это, мне кажется, уже достаточно, чтобы показать пользу выбранного нами пути.

Я ограничиваюсь только одним типом свойств, который мне кажется наиболее простым и наиболее важным.

Я буду называть эти свойства — **свойствами типа** α или просто α-**свойствами**.

2. Свойства, которые я называю α-свойствами, удовлетворяют двум условиям.

I. *Если ансамбла F обладает некоторым определенным свойством, которое принадлежит к типу α, то ансамбль*

$$F + G$$

тоже обладает этим же свойством, каков бы ни был ансамбль G.

II. *Если ансамбли F_1 и F_2 взятые отдельно не имеют некоторого определенного свойства типа α, то и ансамбль*

$$F_1 + F_2$$

не будет иметь этого свойства.

3. Напр., „быть бесконечным"—α-свойство.

В самом деле. если ансамбль F состоит из бесчисленного множества точек, то то же будет и с ансамблем $F+G$, каков бы ни был ансамбль G; с другой стороны, мы знаем, что сумма двух конечных ансамблей будет также конечным ансамблем.

Подобным-же образом мы убедимся, что свойства: „иметь хоть одну точку", „быть неприводимым", „быть неисчислимым", „не быть меры нуль (в каком угодно смысле)" [1]) все это α-свойства.

Наоборот, „быть исчислимым" — это не α-свойство: хотя сумма двух неисчислимых ансамблей есть также ансамбль неисчислимый, (и, таким образом, второе условие удовлетворено), первое условие не удовлетворено, так как сумма исчислимого ансамбля (F) и ансамбля (G) мощности континуума, имеет мощность континуума.

4. Из второго условия мы без труда находим, что если

$$F=\sum_1^n F_k$$

и если ансамбль F имеет некоторое α-свойство, то, по крайней мере один из ансамблей F_k будет иметь это же свойство. Но, если ансамбли F_k будут взяты в бесконечном числе, то, вообще говоря, этого утверждать нельзя. Впоследствии мы вернемся к этому, а сейчас ограничимся этим указанием.

5. Я буду говорить, что точка z имеет по отношению к ансамблю F свойство A, если вблизи z ансамбль F имеет свойство α [2]).

Если z не имеет свойства A по отношению к F, то, очевидно, что, поместив z внутри круга достаточно малого радиуса, мы получим внутри его некоторую часть ансамбля F, не имеющую свойства α.

Совокупность всех точек, которые имеют свойство (α, F), я назову α—производной ансамбля F и буду обозначать

$$AF.$$

Ясно, что следует понимать под α-производной любого конечного или трансфинитного порядка; ее мы будем обозначать

$$A^{\nu}F$$

где ν—некоторое число I или II класса.

6. Обыкновенная производная F'—которую мы иногда будем называть канторовской производной — есть, очевидно, частный случай α-производной: ее мы получим, исходя из свойства „быть бесконечным".

---

1) Т. е. или быть неизмеримым (non mesurable), или иметь меру, отличную от нуля.

2) Иногда, для ясности. мы будем писать вместо A так: (α, F).

Исходя из свойства „иметь хоть одну точку“, мы получим из ансамбля F ансамбль $\overline{F}$, который R. Baire называет производной нулевого порядка; $\overline{F}$ мы иногда будем называть бэровской производной.

Исходя из свойства „быть неисчислимым“, мы получим из ансамбля F ансамбль F_1, который E. Lindelöf называет сгущенной производной; F_1 мы будем иногда называть линделёфовской производной.

Наконец, исходя из свойств „быть приводимым“ и „не быть меры нуль“, мы получим приводимую производную и метрическую производную.

7. Для того, чтобы построить теорию α-свойств в той ее части, которая относится к α-производным, у нас есть простой и естественный путь: следовать аналогии с теорией точек сгущения и канторовских производных.

Поэтому мы введем несколько понятий, аналогичных обыкновенным понятиям теории Cantor'а.

Именно, мы назовем α-изолированным ансамбль F, если ни одна его точка не имеет свойства (α, F); если α-производная составляет часть самого ансамбля F, то F мы назовем α-замкнутым; если же, наоборот, F составляет часть своей α-производной, то мы назовем F — α-густым в себе.

Эти три рода ансамблей мы можем определить так:

F — α-изолировано, если $F.AF = 0$
F — α-замкнуто, „ $F.AF = AF$
F — α-густо в себе, „ $F.AF = F$.

Ограниченный и α-изолированный ансамбль F, у которого

$$AF = 0$$

мы будем называть α-конечным.

Ансамбль F одновременно α-замкнутый и α-густой в себе мы будем называть α-совершенным; для него, очевидно

$$AF = F.$$

Мы будем называть F α-приводимым, если

$$A^{\nu} F = 0$$

где ν—некоторое число I или II класса.

Наконец, если ансамбль G составляет часть ансамбля AF, то мы будем говорить, что F густ повсюду в G.

Кроме этого, мы введем понятие об α-ограниченном ансамбле: α-ограниченным ансамблем мы будем называть ансамбль F, если можно выбрать такую ограниченную область, что часть F, находящаяся вне ее, лишена α-свойства.

Интересно отметить, что ансамбли, которые обычно мы называем ограниченными, получаются, если исходить из канторовского (а также из бэровского) α-свойства.

8. Без особенного труда, повторяя слово в слово рассуждения из теории обычных производных (которые мы условились называть канторовскими), мы легко установим приводимые ниже свойства α-производных.

Прежде всего, мы отметим, что операция A, при помощи которой мы переходим от ансамбля F к ансамблю AF, есть операция аддитивная, т. е.

$$A\sum_1^n F_k = \sum_1^n AF_k$$

при этом в общем случае, при $n = \infty$ мы можем утверждать только, что

$$\sum_1^\infty AF_k < A\sum_1^\infty F_k \text{ [1]}$$

Так, напр., как известно, в случае, канторовского α-свойства, равенства при $n = \infty$ не будет; однако, существуют такие α-свойства, для которых

$$\sum_1^\infty AF_k = A\sum_1^\infty F_k$$

к таким принадлежит, напр., линделёфовское α-свойство.

9. Из числа свойств α-производных мы отметим следующие:

I. AF — замкнутый ансамбль; даже более того: AF — α-замкнутый ансамбль.

II. AF — составляет всегда часть бэровской производной

$$AF < \overline{F}$$

III. Если рассматриваемое α-свойство таково, что существует хоть один ансамбль, не имеющий этого свойства, то α-производная пустого ансамбля есть пустой ансамбль:

$$A0 = 0$$

Иначе говоря, если пустой ансамбль имеет рассматриваемое α-свойство, то это свойство имеет всякий ансамбль.

IV. Если $AF \neq 0$, то F имеет соответствующее α-свойство.

V. (Обобщение принципа Bolzano-Weierstrass'a). Если F не пустой, α-ограниченный и имеющий α-свойство ансамбль, то

$$AF \neq 0$$

[1]) Знак $<$ А употребляю в смысле „быть частью“: $G < H$ обозначает, что ансамбль G есть часть ансамбля H в частном случае, конечно, G может и совпадать с H.

Последние две теоремы показывают, что для α-ограниченны ансамблей [1]) существование точки, имеющей свойство (α,F) эквивалентн существованию у ансамбля F соответствующего α-свойства.

10. Интересно отметить, что свойство конечных и изолированны ансамблей целиком можно распространить на α-конечные и α-изолиро ванные ансамбли.

I. Всякая часть α-конечного ансамбля есть также α-конечны ансамбль.

II. Сумма конечного числа α-конечных ансамблей есть такж α-конечный ансамбль.

III. Всякая часть α-изолированного ансамбля есть также α-изо лированный ансамбль.

IV. Сумма конечного числа α-изолированных ансамблей ест также α-изолированный ансамбль.

и V. Всякий α-изолированный, но не α-конечный ансамбль ест сумма счетного множества α-конечных ансамблей.

11. Среди α-свойств ансамблей существует один класс свойст которые мы назовем *β-свойствами*. Эти β-свойства обладают инте ресными особенностями, на которых мы и остановим внимание чи тателя.

Данное нам α-свойство мы назовем β-свойством, если, *како бы ни был ансамбль F, BF всегда или нуль, или β-со вершенный ансамбль*, т. е.

$$B^2F = BF$$

Так, напр., бэровское, а также и линделёфовское свойства—β-сво ства; что же касается до канторовского, то оно, очевидно, не ес β-свойство.

12. Если нам дано некоторое α-свойство, то иногда (всегда всех случаях, которые мне встречались или которые я мог констр ировать) мы можем определить другое свойство, также принадлежащ к α-свойствам, следующим образом:

Ансамбль F имеет это свойство, если существует такая точка которая 1) имеет свойство $A = (\alpha, F)$ и 2) не теряет свойства A, ес мы удалим из F счетное множество α-изолированных ансамблей.

Такое свойство мы будем обозначать *α'-свойство*.

Классический пример α'-свойства—это линделефовское свойст если мы примем, как исходное α-свойство—канторовское.

Из определения свойства α' следует: *если F имеет α-сво ство, но не имеет связанного с ним α'-свойства, то есть сумма самое большее счетного множества α-из лированных ансамблей.*

[1]) И, следовательно, и для просто ограниченных, так как просто ограничен ансамбль есть при всяком α α-ограниченный.

13. Докажем, что **всякое α'-свойство есть α-свойство.**

Убедимся сначала, что соблюдено I условие n°2, т. е., что, если ансамбль F имеет определенное α'-свойство, то это-же свойство будет иметь и ансамбль

$$F + G$$

каков бы ни был ансамбль G.

Допустим, что F имеет данное α'-свойство.

Тогда, во-первых, существует некоторая точка z_0, имеющая свойство

$$(\alpha, F),$$

а следовательно и свойство

$$(\alpha, F + G)$$

при всяком G; во-вторых, если бы свойство

$$(\alpha, F + G)$$

терялось бы точкой z_0 после удаления из ансамбля $F + G$ счетного множества α-изолированных ансамблей

$$\sum_1^\infty H_n,$$

то эту точку можно было бы лишить свойства (α, F), выбросив из ансамбля F ансамбль

$$\sum_1^\infty F.H_n,$$

который (на основании теоремы III n°10) состоит из счетного множества α-изолированных ансамблей.

Значит, всякая точка, имеющая свойство (α', F), будет иметь и свойство

$$(\alpha', F + G)$$

при всяком G и, таким образом, α'-свойство удовлетворяет I условию n°2.

Обратимся теперь ко II-му условию n°2, т. е. покажем, что, если ни F_1, ни F_2 не будут иметь свойства α', то этого свойства не будет иметь и их сумма $F = F_1 + F_2$.

В самом деле, что значит, что F не имеет свойства α'? Это значит, что какую бы точку z мы ни взяли, она, или не имеет свойства

$$(\alpha, F)$$

или, если она его имеет, то может потерять после удаления из F счетного множества α-изолированных ансамблей.

Если мы допустим, что ни F_1, ни F_2 не имеют свойства α', то всякая взятая наудачу точка z может принадлежать к одной из трех категорий:

1) она не имеет ни свойства (α, F_1), ни свойства (α, F_2); но тогда она не будет иметь и свойства (α, F) и значит á fortiori и свойства (α', F).

2) точка z не имеет свойства α по отношению к одному из этих ансамблей, напр., по отношению к F_1; по отношению же к другому, т. е. к F_2, хоть и имеет, но теряет его после удаления из него счетного множества α-изолированных ансамблей

$$\Sigma H_n$$

В этом случае точка z, конечно, имеет свойство (α, F), но потеряет его после удаления того же счетного множества ΣH_n, и, таким образом, не может иметь свойства (α', F)

3) Наконец, точка z имеет и свойство

$$(\alpha, F_1)$$

и свойство

$$(\alpha, F_2),$$

но теряет их — первое, после удаления

$$\Sigma H_{1n}$$

а второе — после удаления

$$\Sigma H_{2n}$$

где H_{1n} и H_{2n} — α — изолированные ансамбли.

Тогда, как и в предыдущем случае, точка z имеет свойство (α, F), но теряет его после удаления счетного множества α — изолированных ансамблей, а именно:

$$\Sigma H_{1n} + \Sigma H_{2n}$$

Таким образом, мы видим, что и II-е условие n°2 соблюдено и, следовательно, всякое α' — свойство принадлежит к типу, которым мы интересуемся.

Поэтому мы можем распространить на α' — свойства все, что было сказано об α — свойствах и в частности теоремы об α' — производных.

Если мы обозначим

$$A'F$$

α' — производную ансамбля F, то, как легко убедиться,

$$A'F < AF$$

и, кроме того,

$$A' \sum_1^\infty F_n = \sum_1^\infty A'F_n .$$

В общем случае, т. е. для какого угодно α — свойства, последнее равенство, как мы заметили в n°8, не имеет места.

Полезно также заметить два следствия из определения α' — свойства:

I. Если точка z не принадлежит к A'F, то всегда можно выбрать круг с радиусом

$$r = r(z) > 0$$

и с центром в точке z, чтобы часть ансамбля F, находящаяся внутри этого круга, представляла из себя не более, чем счетное множество α — изолированных ансамблей [1]).

II. Если F представляет из себя, самое большее, сумму счетного множества α — изолированных ансамблей, то

$$A'F = 0.$$

14. Мы установили, что всякое α' — свойство есть α — свойство; докажем теперь, что всякое α' — свойство есть β — свойство.

Доказательство основывается на трех леммах, не лишенных интереса и самих по себе [2]):

Лемма 1. Если

$$A'F = 0$$

то F есть, самое большее, сумма счетного множества α — изолированных ансамблей.

Лемма 2. Всякий α' — изолированный ансамбль есть, самое большее, сумма счетного множества α — изолированных ансамблей.

Лемма 3. Если F есть α' — изолированный ансамбль, то

$$A'F = 0.$$

15. Пусть нам дан замкнутый ансамбль F. Как мы знаем,

$$A'F < \overline{F}$$

Но F замкнутый; значит

$$\overline{F} = F.$$

Положим, для краткости,

$$A'F = E$$

и обозначим буквой G ансамбль всех точек F, не принадлежащих к E.

Тогда мы получим

$$F = E + G.$$

---

[1]) Как и в n⁰ 5 я рассматриваю случай ансамблей на плоскости; перейти к случаю линейных ансамблей или ансамблей в пространствах иного числа измерений не представляет труда.

[2]) Вывод лемм опущен за недостатком места.

Причем, очевидно, G есть α' — изолированный ансамбль; что же касается ансамбля E, то в частном случае он может равняться и нулю.

Возьмем от обеих частей последнего равенства α' — производную; тогда мы получим:

$$A'F = A'E + A'G$$

Но

$$A'F = E,$$

а по лемме 3-ей

$$A'G = 0.$$

Итак,

$$E = A'E,$$

т. е. **если F есть замкнутый ансамбль, то A'F есть α' — совершенный.**

Иначе говоря, в области замкнутых ансамблей α' — свойство есть β — свойство.

16. Пусть F будет некоторый замкнутый ансамбль; обозначим, как и раньше,

$$E = A'F.$$

По только-что доказанной теореме

$$A'E = E.$$

Но, как мы видели раньше, (n⁰ 13)

$$A'E < AE.$$

Следовательно,

$$E < AE.$$

С другой стороны (теор. II n⁰9),

$$AE < E,$$

откуда

$$AE = E$$

и мы видим, что E **не только α'-совершенный, но и α-совершенный ансамбль.**

17. Теперь мы в двух словах можем доказать обобщение теоремы Cantor-Bendixson'a: **Всякий замкнутый ансамбль есть сумма α-совершенного ансамбля и счетного множества α-изолированных.**

Если F замкнутый, то, как мы видели,

$$F = E + G$$

где

$$E = A'F$$

и по предыдущему n⁰ α-совершенный ансамбль, а G есть α'-изолированный.

Но по лемме 2-й

$$G = \sum_1^\infty G_n$$

где все G_n α-изолированы.

Итак, $$F = E + \sum_1^\infty G_n$$

и теорема доказана.

18. Пользуясь тем обстоятельством, что по теореме V n⁰ 10 мы всякий α-изолированный, но не α-конечный ансамбль можем представить в виде суммы счетного множества α-конечных ансамблей, мы можем дать обобщенной теореме Cantor-Bendixson'a такую формулировку:

Всякий замкнутый ансамбль может быть представлен в виде суммы α-совершенного ансамбля и еще, самое большее, счетного множества ансамблей, не имеющих свойства α.

19. Обобщенную теорему Cantor-Bendixson'a можно доказать и иначе, при помощи трансфинитных чисел, повторяя слово в слово канторовское доказательство из теории канторовских производных.

Тогда получим, пользуясь обозначениями Cantor'a:

$$F = A^\Omega F + \sum_1^\infty H_n$$

где H_n — α-изолированные ансамбли, а $A^\Omega F$ — α-совершенный.

20. Назовем

$$E = A'F$$

линделёфовским ядром замкнутого ансамбля F, а

$$C = A^\Omega F$$

канторовским ядром, и поставим вопрос об однозначности разложения, которое дает теорема Cantor-Bendixson'a.

Итак, можно-ли утверждать в общем случае, что

$$C = E$$

а если нет, то существуют-ли между C и E какие-нибудь соотношения?

Допустим, что нам дано à priori некоторое разложение замкнутого ансамбля F на сумму

$$F = P + K$$

где P (которое мы будем называть ядром ансамбля F) есть α-совершенный ансамбль, а K — сумма счетного множества α-изолированных.

Мы увидим, что между E, P и C существует очень простое соотношение:

$$E < P < C$$

т. е. линделёфовское ядро наименьшее, а канторовское наибольшее из всех возможных ядер.

Как исходный пункт мы имеем

$$F = E + G$$

$$F = C + H$$

$$F = P + K,$$

где

$$E = A'F$$

и, значит,

$$A'E = AE = E;$$

затем

$$C = A^{\Omega}F$$

и, значит,

$$AC = C$$

Относительно P мы знаем только, что

$$AP = P$$

Кроме того,

$$A^{\Omega}H = 0$$

$$A'G = A'H = A'K = 0$$

и ансамбли E, F, C, P — замкнутые.

Так как

$$E + G = P + K$$

то, беря A' от обеих частей этого равенства, мы находим

$$E = A'P.$$

Следовательно, так как в силу замкнутости P

$$A'P < P$$

мы получаем

$$E < P.$$

С другой стороны,

$$P + K = C + H$$

Откуда, если взять от обеих частей равенство A^{Ω},

$$P + A^{\Omega}K = C$$

т. е.

$$P < C$$

Теорема доказана.

21. Необходимое и достаточное условие однозначности Cantor-Bendixson-вского разложения замкнутых ансамблей чрезвычайно просто: это разложение будет однозначно, т. е.

$$C = E$$

если не существует α-совершенных ансамблей, которые можно представить в виде суммы счетного множества α-конечных ансамблей.

Из экономии места мы опустим доказательство этой теоремы.

22. В некоторых приложениях теории точечных ансамблей (напр., в теории однозначных аналитических функций, имеющих неисчислимое множество особенных точек) большую роль играют разложения, аналогичные тому, которое дает теорема Cantor-Bendixson'a.

Допустим, что нам удалось построить ряд β-свойств:

$$\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$$

удовлетворяющих условиям

$$B_{k+1}F < B_kF$$

но, вообще говоря,

$$B_{k+1}F \neq B_kF$$

т. е. если F имеет свойство β_k, то оно имеет и свойство β_{k+1}.

Отсюда, если z есть $\beta_{\overline{k}}$ изолированная точка [1]), то она à fortiori будет $\beta_{\overline{k+1}}$ изолированной точкой.

Введем ансамбли I_k следующим образом:

$$B_kF + I_k = B_{k+1}F$$

причем

$$I_k B_k F = 0 .$$

Тогда в I_k не будет $\beta_{\overline{k-1}}$-изолированных точек, но точки β_k-изолированные будут распределены повсюду густо.

В этом случае, как нетрудно показать, всякий замкнутый ансамбль F можно представить в таком виде

$$F = B_nF + \sum_1^n I_k$$

23. Частный случай предыдущего разложения мы получим, если положим

$$C = E + L$$

т. е. представим замкнутый ансамбль F в такой форме:

$$F = E + L + H$$

Все три ансамбля E, L и H не имеют общих точек; в E нет ни α'-изолированных, ни тем более, α-изолированных точек, в L нет α-изолированных точек, но α'-изолированные распределены густо и, наконец, в H α-изолированные распределены повсюду густо.

---

[1]) Точку z ансамбля F я называю α-изолированной, если z не принадлежит к AF. Очевидно, что α—совершенный ансамбль не имеет α-изолированных точек, а α-изолированный состоит только из них

24. Нет сомнения, что α-свойства далеко не единственные свойства ансамблей, которые можно изучать, выделив их из остальных свойств по формальным признакам. Этим же путем можно итти и при исследовании многих вопросов геометрии, анализа и теории чисел. В начале такого исследования трудно, конечно, предвидеть к каким результатам оно приведет, если будет проведено достаточно далеко. Один результат, однако, мне представляется несомненным и на него я уже указывал в начале этой заметки—экономия в доказательствах.

Что касается α-свойств, то исследование их, которое здесь едва намечено, приводит еще к интересным выводам; некоторые из них изложены в другой моей заметке „О различных мерах точечных ансамблей“, к которой я и отсылаю интересующихся.