Геодезические линии на поверхностях вращения с максимальной параллелью.

Т. И. Котов

Геодезические линии на поверхностях вращения были предметом изучения в первоначальной стадии развития теории поверхностей, главным образом в связи с их приложениями в высшей геодезии.

Johann Bernoulli [1]) в 1697 году показал, что геодезические линии поверхностей вращения находятся при помощи квадратур. Clairaut [2]) в 1733 году дал теорему, характеризующую геодезические линии поверхностей вращения: произведение радиуса параллели на синус угла с меридианом есть величина постоянная вдоль геодезической линии поверхности вращения

$$n.\sin\omega = a.$$

Legendre [3]) установил связь между элементами геодезического треугольника и плоского треугольника с соответственно равными сторонами. Du Séjour [4]), Bessel [5]), Michaelis [6]) занимались геодезическими линиями специально на поверхностях вращения.

После Гаусса теория геодезических линий превратилась в один из главнейших отделов дифференциальной геометрии; поэтому явилась потребность в изучении геодезических линий для чисто теоретических целей.

Darboux [7]) изучает случай, когда геодезические линии на поверхности вращения замкнуты. Рассматривая конвексные поверхности вращения с максимальной параллелью, легко убедиться на основании теоремы Clairaut, что каждая геодезическая линия пересекающая

---

[1]) Joh. Bernoulli. Opera T. I, стр. 204.

[2]) Mémoires de l'Académie des Sciences, 1733 г. стр. 406.

[3]) Mémoires de l'Académie des Sciences année 1787. Paris 1789. S. 352.

[4]) Ibidem anneè 1778. Paris 178, стр. 73.

[5]) Astr. Nachr Bd. IV 1825, S. 241.

[6]) De lineis brevissimis in datis superficiebus, inprimis de linea geoditica. Diss. 1837.

[7]) Notes к механике Despeyroux и Lecons T. III, стр. 4.

замкнутую геодезическую линию—максимальную параллель, остается в зоне, окружающей последнюю, причем радиусы предельных параллелей, которых геодезическая линия касается, равны постоянной уравнения Clairaut. Если обозначим u длину дуги меридиана, отсчитываемую от максимальной параллели, v угол между меридианами, r радиус параллели, то конечное уравнение геодезических линий на поверхности вращения с двумя произвольными постоянными

$$v = a \int \frac{du}{r\sqrt{r^2 - a^2}} + a'$$

Если мы обозначим длину меридиана в функции радиуса параллели в верхней части поверхности

$$du = \varphi(r)\, dr, \tag{1}$$

в нижней

$$du = -\psi(r)\, dr, \tag{2}$$

то угол Φ между меридианами, соответствующими двум ближайшим точкам геодезической линии на верхней и нижней предельной параллели, определяется по формуле

$$\Phi = \int_a^R \frac{a\left[\varphi(r) + \psi(r)\right]}{r\sqrt{r^2 - a^2}}\, dr, \tag{3}$$

где R — радиус максимальной параллели.

Если угол Φ соизмерим с π, то геодезическая линия замыкается после нескольких оборотов, если Φ несоизмерим с π, то геодезическая линия незамкнута, она заполняет зону (domaine по выражению Poincaré) везде густо. Если Φ независит от a, то геодезические линии в некоторой области, окружающей максимальную параллель, или все замкнуты, или все незамкнуты. Если же Φ зависит от a, то часть геодезических линий замкнута, часть незамкнута в зависимости от того, будет ли Φ при некотором значении a принимать значения соизмеримые или несоизмеримые с π. Ансамбль замкнутых геодезических линий в этом последнем случае имеет мощность рациональных чисел, т. е. исчислим; ансамбль незамкнутых геодезических линий имеет мощность континуума.

Darboux ставит задачу, при каких условиях угол Φ не зависит от a и, следовательно, геодезические линии вблизи максимальной параллели или все замкнуты или все незамкнуты. В этом случае необходимо и достаточно, чтобы меридиан удовлетворял условию

$$\varphi(r) + \psi(r) = \frac{2mR}{\sqrt{R^2 - r^2}} \tag{4}$$

где m — постоянное число, связанное с Φ соответствием

$$\frac{\Phi}{\pi} = m.$$

Как известно, опираясь на это условие (4) Darboux, Zoll [1]) построил правильную поверхность вращения с исключительно замкнутыми геодезическими линиями. Для его поверхности

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{1}{2}r^2 \qquad \psi(r) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{1}{2}r^2$$

максимальная параллель имеет $r = 1$.

Геодезические линии на правильных поверхностях вращения с исключительно замкнутыми геодезическими линиями, как легко видеть из формулы (4), должны обвиваться вокруг поверхности только один раз.

В самом деле, так как в концах меридиан должен быть перпендикулярен оси, то для $r = 0$ из формулы (1) и (2) получаем

$$\varphi(0) = 1, \qquad \psi(0) = 1.$$

Условие Darboux для $r = 0$ дает

$$m = 1$$

т. е. геодезические линии правильных поверхностей вращения с исключительно замкнутыми геодезическими линиями обвиваются вокруг поверхности один раз.

Все геодезические линии таких поверхностей равны. Легко доказать, что их длина равна длине окружности максимальной параллели.

Элемент дуги на поверхности вращения

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2$$

для геодезической линии, вдоль которой

$$dv = \frac{a\,du}{r\sqrt{r^2 - a^2}},$$

напишется

$$ds = \frac{r\,du}{\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

---

[1]) Zoll. Über Flächen mit Scharen von geschlossenen geod. Linien.—Diss. Göttingen 1901 г. Math. Annal 1903 г. т. 57 стр. 108–133.

Обозначим s_1 длину дуги геодезической линии в верхней части поверхности, s_2—в нижней. Пользуясь (1) и (2) легко найти

$$s_1 = 2\int_a^R \frac{r\ \varphi(r)\ du}{\sqrt{r^2 - a^2}}$$

$$s_2 = 2\int_a^R \frac{r\ \psi(r)\ du}{\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

Поэтому длина всей геодезической линии s выразится

$$s = s_1 + s_2 = 2\int_a^R \frac{r[\varphi(r) + \psi(r)]\ du}{\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

Подставляя из (4) выражение для $\varphi(r) + \psi(r)$, получим

$$s = 4R\int_a^R \frac{r\ dr}{\sqrt{(R^2 - r^2)(r^2 - a^2)}} = 2R\int_{a^2}^{R^2} \frac{dt}{\sqrt{-t^2 + t(R^2 + a^2) - a^2R^2}} =$$

$$= 2R\arcsin\frac{t - \frac{R^2 + a^2}{2}}{\sqrt{\left(\frac{R^2 + a^2}{2}\right)^2 - a^2R^2}}\Bigg|_{a^2}^{R^2} = 2R\arcsin\frac{2t - R^2 - a^2}{R^2 - a^2}\Bigg|_{a^2}^{R^2} = 2\pi R.$$

Можно дать примеры правильных поверхностей вращения с исключительно замкнутыми геодезическими линиями, которые имеют части с отрицательной кривизной. В этом случае поверхность имеет грушевидную форму. Простейший случай представляет поверхность вращения с меридианом, для которого

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} + \frac{3}{2}r^4 \qquad \psi(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} - \frac{3}{2}r^4. \qquad (5)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать поверхности вращения только положительной кривизны с одной максимальной параллелью. Если поверхность имеет края, то существуют геодезические линии, упирающиеся в края. Эти геодезические линии, а также максимальную параллель, мы исключили из круга наших исследований. Условимся относить к первому классу поверхности вращения со всеми замкнутыми или со всеми незамкнутыми геодезическими линиями, ко второму классу поверхности с частью замкнутых и частью незамкнутых геодезических линий. Докажем, что поверхности вращения, наложимые друг на друга, принадлежат к одному классу.

Опираясь на условие (4) Darboux, можно показать, что, *если на некоторой поверхности вращения все геодезические линии, не упирающиеся в края, замкнуты, то все поверхности вращения, наложимые на данную, имеют геодезические линии или исключительно замкнутые или исключительно незамкнутые.*

В самом деле, линейный элемент всех ∞^1 поверхностей вращения, наложим друг на друга, можно написать в виде

$$ds^2 = du^2 + k^2U^2 d\left(\frac{v}{k}\right)^2 \tag{6}$$

или

$$ds^2 = du_1^2 + r^2 dv_1^2,$$

где

$$r = kU, \quad v_1 = \frac{v}{k}, \quad u_1 = u.$$

u дуга меридиана, r радиус параллели.

Отсюда

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{kU'}$$

Если условие (4) Darboux имеет место для некоторого значения $k = k_0$, то оно имеет место для всех значений k, так как, если

$$\frac{1}{k_0}\left[\frac{1}{U'} + \frac{1}{U'_1}\right] = \frac{2m}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_{max}}\right)^2}},$$

то можно написать такое же уравнение для любого k, отнеся постоянный множитель к m,

$$\frac{1}{k}\left[\frac{1}{U'} + \frac{1}{U'_1}\right] = \frac{2m_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_{max}}\right)^2}} \qquad m_1 = \frac{mk_0}{k}$$

Если k_0 рационально и m также рационально, то рациональные значения k дают поверхности с исключительно замкнутыми геодезическими линиями, иррациональные значения k дают поверхности с исключительно незамкнутыми геодезическими линиями. Если k_0 иррационально, а m рационально, то поверхности параметра rk_0, где r рациональное число, дают поверхности с исключительно замкнутыми геодезическими линиями, поверхности параметра $ir.k_0$, где ir иррациональное число, представляют поверхности с исключительно незамкнутыми геодезическими линиями.

Таким образом, в случае поверхностей вращения первого класса, наложимых друг на друга, ансамбль поверхностей с замкнутыми геодезическими линиями исчислим, с незамкнутыми геодез. линиями имеет мощность континуума.

Рассмотрим теперь другой случай, когда угол

$$\Phi = \int\limits_{a}^{r_{max}} \frac{a\,[\varphi(r) + \psi(r)]}{r\sqrt{r^2 - a^2}}\, dr \tag{7}$$

зависит от параметра a геодезических линий.

Если подставить сюда по предыдущему

$$\varphi(r) + \psi(r) = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{U'} + \frac{1}{U'_1}\right)$$

$$r = kU, \quad dr = kU'du, \quad a = kU_0, \quad U(u_0) = U_0,$$

где u_0 представляет максимальное расстояние геодезической линии от наибольшей параллели, считая по меридиану, то Φ примет вид

$$(r) \qquad \Phi = \int\limits_{u_0}^{0} \frac{kU_0}{k^2 U}\left(\frac{1}{U'} + \frac{1}{U'_1}\right)\frac{kU'du}{k\sqrt{U^2 - U_0^2}} = \frac{1}{k}\int\limits_{u_0}^{0} \urcorner\!\sqcup\!\ulcorner\, du$$

Если для некоторого значения k, напр. $k = 1$,

$$\Phi = \int\limits_{u_0}^{0} \urcorner\!\sqcup\!\ulcorner\, du = \Psi(u_0)\,\pi$$

является функцией от u_0, то для всех значений k

$$\Phi = \frac{\Psi(u_0)\,\pi}{k}$$

представляет также функцию u_0. Для поверхностей второго класса приходим к результату:

Если угол поворота геодезической линии Φ зависит от параметра геодезических линий a, то на поверхностях вращения с рациональным параметром k, наложенных на данную поверхность с рациональным параметром, геодезические линии сохраняют характер замкнутости или незамкнутости. Если же k иррационально, то замкнутые геодезические линии становятся незамкнутыми, часть незамкнутых геодезических линий становятся замкнутыми; ансамбль последней категории геодезических линий исчислим (ансамбль рациональных чисел).

Таким образом, не может быть случая, чтобы поверхности вращения с исключительно замкнутыми геодезическими линиями, накладывались на поверхности вращения с частью замкнутых и частью незамкнутых геодезических линий.

Применим доказанные нами теоремы к некоторым классам поверхностей вращения.

Рассмотрим поверхности вращения постоянной положительной кривизны

$$\left.\begin{aligned} x &= a \sin u . \cos \frac{v}{a} \\ y &= a \sin u . \sin \frac{v}{a} \\ z &= \int \sqrt{1 - a^2 \cos^2 u}\, du \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Так как на шаре все геодезические линии замкнуты, то на поверхностях вращения постоянной положительной кривизны с остриями ($a < 1$) или с двумя краями ($a > 1$) геодезические линии или все замкнуты для a рационального или все обвиваются вокруг поверхности бесчисленное множество раз при a иррациональном.

На поверхности вращения постоянной положительной кривизны с краями ($a > 1$), кратчайшее расстояние между некоторыми точками не является непрерывной геодезической линией или совокупностью отрезков геодезических линий, а состоит из края поверхностии и двух отрезков геодезических линий, проведенных через данные точки и касательных к краю. В самом деле, все геодезические линии, исходящие из данной точки, пересекаются в полюсе, отстоящем от данной точки по геодезической линии на расстоянии πR, где $\frac{1}{R^2}$ кривизна поверхности. Точки, лежащие вне области между геодезическими линиями, касательными к контуру, за точками касания не могут быть соединены с данной точкой кратчайшим расстоянием — непрерывной геодезической линией; так как проблема регулярна, то решение может состоять только из части контура и касательных к нему отрезов геодезических линий. (Точно также, абсолютное кратчайшее расстояние между точками, разделенными полюсом, состоит из части контура и касательных к нему отрезов геодезических линий).

2. Рассмотрим поверхности вращения с линейным элементом

$$ds^2 = 4(2 - p^2)(dp^2 + p^2 d\varphi^2). \tag{9}$$

Геодезические линии этих поверхностей, определяемые дифференциальным уравнением Эйлера для вариацион. проблемы экстремума интеграла

$$\int 2 \sqrt{2 - p^2} \sqrt{p_1{}^2 + p^2}\, d\varphi$$

соответствуют в плоскости с линейным элементом

$$ds^2 = dp^2 + p^2 d\varphi^2 \tag{10}$$

траэкториям точки, движущейся под влиянием центральной силы притяжения, направленной к началу координат и пропорцинальной расстоянию от центра

$$F = -2p.$$

Соответствующие геодезическим линиям поверхностей (9) изображения в плоскости (10) являются эллипсами с центром в начале координат. Геодезические линии замкнуты, если соответствие между плоскостью и поверхностью такое, что каждой точке плоскости соответствует конечное число точек поверхности.

Рассмотрим ∞' поверхностей вращения с линейным элементом (9). По формулам Minding'а линейный элемент этих поверхностей

$$ds^2 = du^2 + R^2\, d\varphi_1^2,$$

где

$$4(2-p^2)\, dp^2 = du^2 \qquad \varphi_1 = \frac{\varphi}{k} \quad p = p_1$$

$$4k^2(2-p^2)\, p^2 = R^2$$

(φ_1, p_1) координаты точек на поверхности параметра k, (φ, p) — на поверхности параметра $k = 1$.

Для меридиана имеем

$$z = 2\int \frac{\sqrt{p^4(1-4k^2) + 4p^2(2k^2-1) + 4(1-k^2)}}{\sqrt{2-p^2}}\, dp \tag{11}$$

$$R = 2kp\sqrt{2-p^2}$$

Корни подрадикального выражения в числителе z

$$p = \pm\sqrt{\frac{1-k}{\frac{1}{2}-k}} \qquad\qquad p = \pm\sqrt{\frac{1+k}{\frac{1}{2}+k}}$$

Для $0 \leq k \leq 1$, p может меняться в пределах

$$0 \leq p \leq \sqrt{\frac{1+k}{\frac{1}{2}+k}}$$

При $k > 1$ для вещественности z необходимо и достаточно

$$\sqrt{\frac{k-1}{k-\frac{1}{2}}} \leq p \leq \sqrt{\frac{1+k}{\frac{1}{2}+k}} \tag{12}$$

Итак, поверхности вращения с линейным элементом (9) при конформном изображении на плоскость соответствуют не всему кругу радиуса $\sqrt{2}$, а только части его. При $k \leqslant 1$ соответствующая часть в плоскости есть круг с центром в начале координат радиуса $\sqrt{\frac{1+k}{\frac{1}{2}+k}}$. При $k > 1$ образ поверхности в плоскости есть круговое кольцо между двумя концентрическими кругами радиусов $\sqrt{\frac{k-1}{k-\frac{1}{2}}}$ и $\sqrt{\frac{1+k}{\frac{1}{2}+k}}$. Совершенно не существует поверхности (9), соответствующей всему кругу, хотя линейный элемент вещественен для всех точек круга. Здесь мы наглядно видим, как нельзя изучать геодезические линии поверхности im Grossen только по свойствам линейного элемента. Для некоторых вещественных значений линейного элемента не существует соответствующих точек поверхности.

Возьмем для меридиана

$$\frac{dz}{dR} = \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{1}{2}-k\right)p^2+k-1\right]\left[\left(\frac{1}{2}+k\right)p^2-(1+k)\right]}}{k(1-p^2)} \tag{13}$$

Последнее выражение показывает, что при $p=1$ мы имеем максимальный круг — геодезическую линию, служащую параллелью. Для поверхностей $k \leq 1$ в точке $p=0$, R также равно нулю: меридиан пересекает ось. Формула (13) показывает, что только при $k=1$ в точке $p=0$ имеем правильную точку, когда меридиан пересекает ось под прямым углом. При других значениях $k<1$ в точке $p=0$ имеем коническую точку, в которой меридиан образует с осью угол ($\arcsin k$).

При $k>1$ поверхность представляет зону, ограниченную двумя неравными параллелями. При $k \to \infty$, радиусы беспредельно увеличиваются, поверхность стремится превратиться в линию — максимальную параллель. Легко видеть, что поверхность параметра k не может целиком быть наложена на поверхность бо́льшего параметра $k_1 > k$; поверхность параметра $k=1$ изображается целиком конформно на круг радиуса $\frac{2}{\sqrt{3}}$ плоскости, причем геодезические линии соответствуют эллипсам с центром в начале координат и обвиваются один раз вокруг поверхности, имея два maximum'а и два minimum'а удаления от полюса.

Геодезические линии поверхности $k={}^1/_2$ обвиваются также один раз, имея один maximum и один minimum; при изображении на плоскость (10) они соответствуют половине эллипса плоскости (10). Если мы сделаем подстановку

$$p=\sqrt{r} \quad \varphi=\frac{\bar{\varphi}}{2}, \tag{14}$$

то получим

$$ds^2 = \left(\frac{2}{r} - 1\right)(dr^2 + r^2 d\overline{\varphi}^2). \tag{15}$$

Геодезические линии соответствуют траэкториям точки плоскости

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\overline{\varphi}^2, \tag{16}$$

притягиваемой неподвижным центром по закону Ньютона с силой $F = -\frac{1}{r^2}$. Соответствие между плоскостями (10) и (16) такое же, как между плоскостями функции комплексной переменной — квадрата независимого переменного $(r, \overline{\varphi})$ и независимым переменным (p, φ),

Уравнение поверхностей вращения с линейным элементом (15)

$$x = k\sqrt{r(2-r)}\cos\frac{v}{k}$$

$$y = k\sqrt{r(2-r)}\sin\frac{v}{k}$$

$$z = \int\sqrt{\frac{(2-r)^2 - k^2(1-r)^2}{r(2-r)}}\,dr;$$

при k рациональном, каждой точке плоскости соответствует конечное число точек поверхности.

На этих поверхностях геодезические линии, не упирающиеся в края, или все замкнуты (для k рационального) или все обвиваются вокруг поверхности бесчисленное множество раз (при k иррациональном).

3. Обратимся к поверхности вращения с исключительно замкнутыми геодезическими линиями, данной Tannery [1]).

Уравнение этой поверхности в координатах Декарта

$$16a^2(x^2 + y^2) = z^2(2a^2 - z^2);$$

в начале координат имеем коническую точку.

Принимая за плоскость xy плоскость максимальной параллели, получим уравнение поверхности

$$x = \frac{a}{4}\cos u.\cos\Theta$$

$$y = \frac{a}{4}\cos u.\sin\Theta$$

$$z = a\left(1 - \cos\frac{u}{2} + \sin\frac{u}{2}\right).$$

---

[1]) „Sur une surface de révolution du quatrième dégré dont les lignes géodésiques sont algebriques“ (Bulletin des Sciences Math. 1892 г. Т. XVI январь).

где u меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, а Θ от нуля до 2π. Все геодезические линии имеют равную длину $a\pi$. Легко видеть, что меридиан не имеет точек перегиба, поэтому описание вида этой поверхности „грушевидной формы“ нужно считать не совсем удачным.

Рассмотрим все поверхности вращения, наложимые на поверхность Tannery. Линейный элемент их

$$ds^2 = \frac{a^2}{16}\left[(2 + \sin u.)^2\, du^2 + \cos^2 u.\, d\Theta^2\right]; \tag{17}$$

можно положить

$$\frac{a}{4}(2 + \sin\ u)\, du = du_1 \qquad \frac{a^2}{16} k^2 \cos^2 u = R^2,$$

где R радиус параллели, u_1 —дуга меридиана.

Для меридиана

$$dR = -\frac{ak}{4}\sin\ u.\ du$$

$$dz^2 = \frac{a^2}{16}\left[(2 + \sin u)^2 - k^2 \sin^2 u\right] du^2$$

$$dz = \frac{a}{4}\sqrt{(1-k^2)\left(\sin u - \frac{2}{1+k}\right)\left(\sin u - \frac{2}{1-k}\right)}\, du.$$

Ищем пределы изменяемости u для вещественности dz.

При $k \leq 1$

$$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$$

При $k < 1$ крайние точки являются коническими точками.

При $k = 1$ точка $u = \frac{\pi}{2}$ правильная точка.

При $1 < k < 3$

$$-1 \leq \sin\ u \leq \frac{2}{1+k}$$

поверхность не имеет вещественных точек вблизи $u = \frac{\pi}{2}$.

При $k = 3$ точка $u = -\frac{\pi}{2}$ является правильной точкой

$$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{6}.$$

При $k > 3$ поверхность имеет два края, нет точек $u = \frac{\pi}{2}$ и $u = -\frac{\pi}{2}$

$$\frac{2}{1-k} < \sin u < \frac{2}{1+k}.$$

Поверхность Tannery получается при $k = 1$.

Уравнение рассматриваемых поверхностей

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{ak}{4} \cos u.\ \cos \frac{\Theta}{k} \\ y &= \frac{ak}{4} \cos u.\ \sin \frac{\Theta}{k} \\ z &= \frac{a}{4} \int \sqrt{(2-\sin u)^2 - k^2 \sin^2 u}\, du. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Формула (4) Darboux дает (19)

$$\frac{du_1}{dR} = \frac{2+\sin u}{k \sin u} \qquad \varphi(R) = \frac{2+\sin u}{k \sin u} \qquad \psi(R) = \frac{2-\sin u}{k \sin u}$$

$$\varphi(R) + \psi(R) = \frac{4}{k \sin u}$$

$$m = \frac{2}{k}. \quad (19)$$

Угол ω между двумя максимумами расстояния геодезической линии от наибольшей параллели в какой либо части поверхности, напр. верхней,

$$\omega = \frac{4\pi}{k}.$$

Отсюда

$$\frac{4\pi}{k} p = 2\pi l \quad (20)$$

где p — число максимумов, l число оборотов геодезической линии вокруг поверхности. Из (20) имеем

$$\frac{p}{l} = \frac{k}{2},$$

соотношение, справедливое для всех поверхностей семейства при k рациональном.

Н а р а с с м о т р е н н ы х м н о ю п о в е р х н о с т я х (18) с р а ц и о н а л ь н ы м п а р а м е т р о м k в с е г е о д е з и ч е с к и е л и н и и з а м к н у т ы, на поверхностях (18) с иррациональным параметром k геодезические линии обвиваются бесчисленное множество раз вокруг поверхности.

RÉSUMÉ.

En faisant abstraction du parallèle maximum et des lignes géodésiques qui aboutissent aux bords de la surface, l'auteur définit les surfaces de la première classe; celles dont les lignes géodésiques sont toutes fermées ou toutes tournent indèfiniment autour de l'axe; à la seconde classe il rapporte des surfaces dont les lignes géodésiques ne sont pas toutes fermees.

Il demontre que les surfaces de révolution applicables les unes sur les autres appartiennent à une même classe.

Les surfaces de la première classe applicables les unes sur les autres à géodésiques fermées forment un ensemble dénombrable.

Les lignes géodésiques fermées forment sur les surfaces de la seconde classe un ensemble dénombrable, les géodésiques tournant indéfiniment autour de l'axe forment un ensemble ayant la puissance du continu.

Il applique ses résultats à l'étude des géodésiques

1⁰ des surfaces à courbure constante positive;

2⁰ des surfaces de révolution à l'élement linéaire

$$ds^2 = 4(2 - \varrho^2)(d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2);$$

3⁰ des surfaces de révolution applicables sur la surfaces de M. Tannery.