Н. Е. Жуковский и классификация особенных точек дифференциальных уравнений 1 порядка.

Д. М. Синцов.

Покойный ученый, почетный член Харьковского Математического Общества, пользовался широкою известностью в последние годы среди всех интересующихся воздухоплаванием. В среде ученых он был известен своим уменьем подойти к решению самых сложных на первый взгляд вопросов прикладной математики и дать их решение самыми простыми средствами.

Но самая простота предлагаемых им решений скрадывала отчасти другую сторону его исследований,—то, что при своих решениях он пользовался часто совершенно новыми методами, специально для данного случая созданными. И это делает и будет делать необходимым изучение его работ и для тех, кто, не интересуясь самыми решаемыми им вопросами, заинтересован методами их решения. Это тем более необходимо, что со свойственной ему скромностью Н. Е. Жуковский не имел обыкновения подчеркивать новизну применяемых им методов.

Таков в особенности вопрос о классификации критических точек кривых, определенных дифференциальным уравнением 1-го порядка и 1-й степени. В своей магистерской диссертации «Кинематика жидкого тела» напечатанной в Московском Математическом Сборнике т. VIII 1876, Н. Е. Жуковский исследует сначала движение точек частицы жидкости, предполагая, что известны не изменяющая своего направления линия и соответствующая плоскость, и разложив полное движение частицы на косоугольное удлинение относительно неизменяющей своего направления плоскости, проходящей через этот центр, которое направлено вдоль неподвижной линии, и на движение, параллельное неподвижной плоскости, замечает, что последнее определяется по движению точек, лежащих в этой плоскости. Для бесконечно малых линий токов точек частицы он получает дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{e_1 x - ry} = \frac{dy}{e_2 y + rx} = \frac{d\zeta}{\varepsilon_3 \zeta},$$

которое и интегрирует, приводя с помощью некоторых преобразований к виду: $(e_2+e_1)\frac{d\zeta}{\varepsilon_3\zeta}=\frac{(e_2-e_1)(ydx+xdy)+2r(xdx+ydy)}{(e_2-e_1)xy+r(x^2+y^2)}=$

$$=\frac{\frac{(e_2+e_1)}{r}d\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}+\frac{e_2-e_1}{2r}\right)^2+1-\frac{(e_2-e_1)^2}{4r^2}}. \qquad (18')$$

Изучив подробно кривые, удовлетворяющие дифференциальному уравнению в x, y, в § 20 Н. Е. Жуковский обращается к более общему случаю, когда скорости течения u, v, w внутри некоторой замкнутой области непрерывны, однозначны и конечны, и замечает, что линии токов, наполняющие такое пространство, не могут пересекаться или соприкасаться, так как для каждой точки косинусы углов касательной к линии тока имеют одно определенное значение. Этого нельзя сказать, замечает он далее,—когда скорости u, v, w обращаются в 0, ∞, $\frac{0}{0}$ или становятся многозначны. Будем называть, уславливается Н. Е. Ж., критическими точки, в которых линии токов пересекаются, соприкасаются или имеют бесконечно большую кривизну, и разбирает свойства таких точек сначала для плоского течения.

Относя начало в точку, для которой скорости плоского течения u и v обращаются 0, ∞ или становятся неопределенными, он отыскивает пред $\frac{v}{u}$ при $\varrho=\sqrt{x^2+y^2}=0$. Если этот предел имеет конечную величину $\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$, то уравнение линий токов, безконечно близких от начала координат, получится помощью интегрирования уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\Phi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (30)$$

И теперь Н. Е. Ж. обращается к рассмотрению различных критических точек. Когда скорости u и v обращаются в начале координат в нули, а их производные по координатам конечны (некоторые из производных могут быть равны 0), то уравнение (30), говорит он, может быть представлено в виде уравнения (18'). И получает следующие случаи критических точек:

A. $\frac{(e_2-e_1)^2}{4}>r^2$. Линии тока бесконечно-близко от критической точки представляют гиперболы бесконечно большой кривизны

$$\xi\eta^{-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}=\text{Const},$$

где $\varepsilon_1 = \frac{e_1 + e_2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(e_2 - e_1)^2 - 4r^2}$, $\varepsilon_2 = \frac{e_1 + e_2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(e_1 - e_2)^2 - 4r^2}$

имеющие различный вид, смотря потому будет ли $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < 0$ (случай 1-й) или $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} > 0$ (случай 2-й). При $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 1$ гиперболы обращаются в прямые линии (сл. 3).

B. $\left(\frac{e_2 - e_1}{2}\right)^2 = r^2$. Линии токов на бесконечно близком расстоянии от критической точки будут определяться уравнением

$$\varrho^2 \ \mathrm{Sin}^2 u = \mathrm{Const.}\ e^{-\frac{e_2 + e_1}{r} \cdot \frac{1 \mp \mathrm{tang} u}{2 \ \mathrm{tang} u}}, \text{ где } u = \varphi \mp \frac{\pi}{4}$$

Взяв верхний знак и предположив $\frac{e_2 + e_1}{r} > 0$, получим сл. 4 (при $e_2 + e_1 = 0$ получаем прямые линии,—точка не будет критической).

C. $\frac{(e_2 - e_1)^2}{4} > r^2$. Линии токов оказываются спиралями, для которых критическая точка есть асимптотический полюс (сл. 5).

$$(e_2 - e_1)\ xy + r\ (x^2 + y^2) = C.\ e^{a \cdot \psi}$$

где

$$a = \frac{e_2 + e_1}{\sqrt{1 - \frac{(e_2 - e_1)^2}{4r^2}}} \text{ и } \psi = \mathrm{arctang}\ \frac{\frac{y}{x} + \frac{e_2 - e_1}{2r}}{\sqrt{1 - \frac{(e_2 - e_1)^2}{4r^2}}}$$

При $e_2 + e_1 = 0$ спирали обращаются в эллипсы (сл. 6).

Достаточно сравнить рисунки Н. Е. Жуковского на стр. 92 его сочинений т. I. М. 1912 г. или в Моск. Мат. Сб. т. VIII (статья Н. Е. Ж., § 20) хотя бы с таблицей на стр. 9 в статье W. Dyck'a Über die singulären Stellen eines Systems von Differentialgleichungen I. O. (München Ber. 1909 г.), чтобы увидеть совпадение: сл. I. Н. Е. Жуковского это Doppelpunkt (col), 2.— Knotenpunkt (noeud), 3.— Büschelpunkt, 5.—Wirbelpunkt (foyer) и 6.—Isolierter Punkt (centre).

Обращает внимание различение Н. Е. Жуковским случая 4, не фигурирующего в схеме W. Dyck'a. Случай этот, если взять всю совокупность кривых, представляет большое сходство со случаем 2., но здесь имеется точка пресечения, а в случае 2—точка перегиба.

Н. Е. Жуковский называет далее (стр. 94) разобранные точки нулевыми точками 1. порядка и подчеркивает следующие результаты: при движении несжимаемой жидкой площади нулевые критические точки 1-го порядка (т. е. особенные точки интегральных кривых дифференциального уравнения 1-го порядка и 1 степени) бывают гиперболические или эллиптические. В 1-ом случае две линии тока пересекаются в критической точке, во 2-ом линии токов обхватывают критическую точку, обращаясь в пределе в бесконечно малые эллипсы. Если в нулевой критической точке 1 порядка вращение элемента площади равно нулю, то чрез эту точку проходят две пересекающиеся под прямым углом линии тока.

Не ограничиваясь нулевыми критическими точками 1-го порядка, Н. Е. Ж. обращает внимание на существование нулевых критических точек n-го порядка, когда в данной точке скорости u, v и их производные до n-го порядка обращаются в 0, а производные n-го порядка конечны, ограничиваясь в их исследовании для плоского течения случаем течения без сжатия и вращения, а также обращает внимание на случай, когда u и v обращаются в ∞ или $\frac{0}{0}$.

Таким образом в работе Н. Е. Жуковского 1876 г. есть различение основных типов критических точек дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Разумеется, это обстоятельство не уменьшает значения работ H. Poincaré, но в истории вопроса имя Н. Е. Жуковского не должно быть опущено.

Отметим в заключение, что анализ Н. Е. Жуковского существенно предполагает, что в разложении по степеням x,y функций M и N уравнения

$$Mdx + Ndy = 0$$

первые члены

$$M = c + ax + by + \dots$$
$$N = c' + a'x + by + \dots$$

имеют определитель $ab' - a'b \neq 0$, а потому исключается случай, когда $ab' - a'b = 0$, — когда изменением переменных уравнение соответствующее (18') может быть приведено к виду

$$-\alpha\, dy + \beta x\, dx = 0$$

с общим интегралом

$$\beta x^2 - 2\alpha y = c.$$

Проективным преобразованием мы можем особенную точку привести в начало координат и получаем случай

$$\beta x_2^{2'} - 2\alpha x_3 x_1 = C x_1^2$$

когда характеристическое уравнение коллинеации устанавливаемой уравнением Якоби имеет тройной корень, и мы имеем то, что можно назвать point d'osculation (Berührungspunkt).

Последнее обстоятельство обнаруживает значение введения при изучении расположения интегральных кривых вблизи особенной точки рассмотрения соотв. соприкасающегося билинейного коннекса и связывает этот вопрос с изучением различных типов самопроективных кривых (W—кривых)—интегральных кривых уравнения Якоби,—на что было мною указано в свое время (К вопросу об особенных элементах коннекса 1902 г.—Изв. Каз. Физ.-Мат. Общества и on the. theory of connexes в Трудах V. Матем. Конгресса в Кембридже. Отмечу, что это обстоятельство и побудило меня несколько лет тому назад поставить темою работы на премию изучение W—кривых.

Это изучение было сделано с большою обстоятельностью Н. М. Душиным темою, составившими великолепный атлас всех различных встречающихся при этом кривых; к сожалению, работа Н. М. Душина, несмотря на постановление факультета, по обстоятельствам времени осталась не напечатанной.

Как я указывал в свое время в отзыве, рассмотрение детально и точно выполненных чертежей соотв. кривых указывает с ясностью глубокое различие с геометрической стороны случаев 2 и 4 Н. Е. Жуковского.