Критерий неприводимости целых функций в любом алгебраическом поле.

М. Сопман.

Следующая теорема, представляющая значительное обобщение известного критерия Айзенштейна, имеет силу в любом алгебраическом поле.

Теорема Айзенштейна:

Полином

$$f(x) = x^n + pa_1x^{n-1} + pa_2x^{n-2} + \dots pa_n$$

где p—простое число, $a_1, a_2, \dots a_n$ —целые числа, из которых a_n на p не делится,—неприводим в области рациональных чисел.

Обобщение таково:

Дан полином $f(x) = x^n + \delta a_1x^{n-1} + \delta a_2x^{n-2} + \dots + \delta a_n$, (*)

где $\delta, a_1, a_2, \dots a_n$ —целые числа некоторой области, причем δ и a_n - числа взаимно простые:

$$(\delta, a_n) = 1 \tag{1}$$

Если f(x) имеет в данной области делителя степени r, то должно существовать равенство:

$$(\delta^r) = j^n$$

где j—идеал данной области.

Доказательство. Корни f(x) суть целые алгебраические числа, обозначим их $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$.

Из равенства $f(\omega_\iota) = 0$, по (*) следует

$$\omega_\iota^n = \delta(-a_1\omega_\iota^{n-1} - a_2\omega_\iota^{n-2} - \dots - a_n)$$

или

$$\omega_\iota^n = \delta k_\iota \qquad \iota = 1, 2, \dots n \tag{2}$$

где k_ι—целые алгебраические числа.

Далее из равенства

$$\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \ldots \cdot \omega_n = \pm \delta a_n$$

по возвышении в n-ую степень при помощи (2) получаем:

$$k_1, k_2, \ldots k_n = \pm a_n^n \qquad (3)$$

Пусть теперь f(x) имеет делителя степени r

$$\varphi(x) = x^r + b_1 x^{r-1} + \ldots b_r, \qquad (^{**})$$

$b_1, b_2, \ldots b_r$ — числа данной области, как известно, целые.

Если корни $\psi(x) - \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_r$, то по (**)

$$\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_r = \pm b_r$$

По возвышении в n-ую степень при помощи (2) имеем:

$$\delta^r \cdot k_1 \cdot k_2 \ldots k_r = \pm b_r^n$$

или, полагая

$$k_1 \cdot k_2 \ldots k_r = K,$$

$$\delta^r \cdot K = \pm b_r^n \qquad (4)$$

K — целое алгебраическое число, по (4) принадлежащее к данной области. По (3) K — делитель a_n^n, отсюда из (1) заключаем, что K и δ — числа взаимно простые

$$(K, \delta) = 1.$$

Поэтому рассматривая в (4) разложение обеих частей на простые идеальные множители, мы и приходим к искомому равенству

$$(\delta^r) = j^n \qquad (5)$$

Следствие 1. Если (δ) не представляет степени некоторого идеала с показателем, равным делителю n, полином f(x) неприводим.

Следствие 2. При n простом полином f(x) неприводим, если (δ) не представляет n-ой степени некоторого идеала.

Примечание. В частном случае, когда $a_n = 1$, легко видеть, что идеал j должен быть главным. В этом случае равенство (5) можно написать так:

$$\delta^r = \varepsilon \alpha^n$$

где ε — единица, α — целое число данной области.