Управління Науковими Установами
України

République
Socialiste des Soviéts de l'Ukraine

Commissariat de l'Instruction du Peuple

Office des Institutions Scientifiques

НАУКОВІ ЗАПИСКИ
НАУКОВО-ДОСЛІДЧИХ МАТЕМАТИЧНИХ КАТЕДР УКРАЇНИ

Редактор акад. С. БЕРНШТЕЙН

[вып. 2]

ANNALES SCIENTIFIQUES
DES INSTITUTIONS MATHEMATIQUES SAVANTES DE l'UKRAINE

Rédacteur prof. S. BERNSTEIN

ДЕРЖАВНЕ ВИДАВНИЦТВО УКРАЇНИ
ХАРКІВ — 1926 — KHARKOW

У. С. Р. Р.

НАРКОМОС

Управління Науковими Установами України

République Socialiste des Soviéts de l'Ukraine

Commissariat de l'Instruction du Peuple

Office des Institutions Scientifiques

ОПЕЧАТКИ

Стран.	Строка	Напечатано	Должно быть
52	13 св.	$\chi_s = \varphi_s (C_1 \dots C_{p-1}, \chi_p) + 5h$	$\chi_s = \varphi_s (C_1 \dots C_{p-1} \chi,_p)$
53	10 сн.	Autrement, si	Sidonc
53	1 „	nues, $2q - m \geqslant r$,	nulles, $2q - m \leqslant r$,
81	16 св.	$\varphi(0) =)$	$\varphi'(0) = 0$
81	17 „	$\psi(0) = 1$	$\psi'(0) = 1.$
81	1 сн. (числитель)	$\varphi(u) + V_1 \psi(u)$	$\varphi'(u) + V_1 \psi'(u).$
90	24 св.	асимптоматических	асимптотических
91	12 сн.	. Применяя	. Применяя
95	6 „	e_β, e	e_β, e_n
96	10 св.	$\frac{1}{\rho} =$	$\frac{1}{\rho_n} =$
97	15 „	$\frac{1}{\zeta_n} =$	$\frac{1}{\rho_n} =$
98	7 сн.	, определяя	, и определяя
98	1 „	$- d\gamma$	$- d\gamma'$
101	9 „	, и	, мы,
103	3 св.	$S_1 (\gamma, d, p)$,	$S_1 (\gamma, d, p)$, —

Кроме того, по техническим соображениям, на странице 88 сокращено примечание, полный текст которого должен быть таков:

Особенность этого, предложенного Bour'ом, определения симметричных косых поверхностей состоит в том, что в нем совершенно не указано, какие функции, определяющие поверхность, должны быть у симметричных поверхностей одинаковыми („nous donnerons le nom de surfaces symétriques aux deux surfaces qui ne diffèrent l'une de l'autre que par le signe de β". J. Éc. P., cah. 39, p. 45). Исходя из этого обстоятельства и принимая во внимание оба способа определения косой поверхности функциями, мы,— на ряду с косыми поверхностями, симметричными в обычном, собственном смысле этого слова, различающимися только знаками параметров распределения при своем определении основными величинами,— назовем две косые поверхности, наложимые друг на друга при параллельности соответственных образующих,— симметричными в несобственном смысле слова, так как эти поверхности, всегда попарно существующие („è sempre possibile trasformare una superficie gobba in modo che ciascuna generatrice della trasformata sia parallela alla corrispondente generatrice della primitiva". Opere matem. di E. Beltrami. T. 1, p. 220), определяются по способу Minding'а одними и теми же тремя функциями с единственным отличием в знаке для их параметров распределения (Darboux, Surfaces, III, p. 302).

У. С. Р. Р.

НАРКОМОС

Управління Науковими Установами України

République Socialiste des Soviéts de l'Ukraine

Commissariat de l'Instruction du Peuple

Office des Institutions Scientifiques

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

НАУКОВО-ДОСЛІДЧИХ МАТЕМАТИЧНИХ КАТЕДР УКРАЇНИ

Редактор акад. С. БЕРНШТЕЙН

ANNALES SCIENTIFIQUES

DES INSTITUTIONS MATHEMATIQUES SAVANTES DE l'UKRAINE

Rédacteur prof. S. BERNSTEIN

ДЕРЖАВНЕ ВИДАВНИЦТВО УКРАЇНИ

ХАРКІВ — 1926 — KHARKOW

ХАРКІВСЬКА ШКОЛА
ДРУКАРСЬКОГО ДІЛА
ІМ. А. БАГИНСЬКОГО

Укрголовліт 13812, 27 - IV - 25 р.
Тираж 600. Зам. 1600.

О Г Л А В Л Е Н И Е
TABLE DES MATIÉRES

Sur une propriété des fonctions entières de genre 0

Serge Bernstein

On sait, qu'il existe des cas exceptionnels, où la somme de deux fonctions de genre 0 représente une fonction de genre 1. Ainsi, par exemple, la somme *)

$$f_1(x) + f_1(-x) = F(x),$$

où

$$f_1(x) = \prod_{n=2}^{\infty}\left(1 + \frac{x}{n(\log n)^{\alpha}}\right), \tag{1}$$

est une fonction entière de genre 1, quoique $f_1(x)$ est de genre 0, lorsque $2 > \alpha > 1$. Dans ce cas particulier les coefficients des puissances paires de la fonction $f_1(x)$ de genre 0 sont les mêmes que dans la fonction $\frac{1}{2}F(x)$, qui est de genre 1. Par conséquent, comme l'a remarqué M. Lindelöf dans le mémoire cité, on ne puit affirmer d'une façon générale que si la fonction $f(x)$, majorante de la série $\frac{1}{2}F(x)$ est de genre 0, cette dernière doit aussi être de genre 0.

Posons, en général,

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n \ldots \tag{2}$$

On vérifie *) sans difficulté, que pour les fonctions de genre 0 et d'ordre réel inférieur à 1, la série

$$\sum^{\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \tag{3}$$

est convergente. Mais dans le cas, où l'ordre reel de la fonction $f(x)$ le genre 0 est égal à 1, comme cela a lieu dans l'exemple (1), la convergence de la serie (3) est douteuse. M. Lindelöf démontre, en effet, que dans son exemple on a pour une infinité de valeurs de n (ε étant positif et arbitrairement petit).

$$\sqrt[n]{|c_n|} > \frac{e(1-\varepsilon)}{(\alpha-1)\,n\,(\log n)_{\alpha-1}} \tag{4}$$

---

*) Ernst Lindelöf. „Mémoire sur la theorie des fonctions entières". Acta Societatis Scientiarum Fennicae, t. XXXI (1902).

et, en supposant que l'inégalité (4) subsiste pour **toute** valeur de n assez grande il s'exprime ainsi: „En admettant cette conclusion *), dont l'exactitude n'est pas douteuse, mais dont il ne semble pas aisé de trouver une démonstration directe, on voit d'abord que, bien que la fonction donnée soit du genre zéro, la série $\sum^{\infty} \sqrt[n]{c_n}$ n'en est pas moins divergente".

Je vais montrer plus loin, que l'inégalité (4) pour la fonction de M. Lindelöf est, en effet, vérifiée pour **toute** valeur de n, de sorte que la conclusion citée de cet éminent géomètre est parfaitement exacte.

Il est d'autant plus intéressant de signaler la proposition suivante, qui montre, que pour les fonctions **paires** l'exception constatée par M. Lindelöf serait impossible.

Si $$f(x) = c_0 + c_2 x^2 + \ldots + c_{2n} x^{2n} + \ldots \tag{5}$$

est une fonction paire de genre 0, la série

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[2n]{|c_{2n}|} \tag{6}$$

est toujours convergente.

Il résulte, en particulier, de notre théorème, que toutes les fois, où, comme dans l'exemple de M. Lindelöf, la série (3) relative à la fonction (2) sera divergent, la somme $f(x) + f(-x)$ sera de genre 1.

Passons à présent à la démonstration du théorème énoncé.

On la, par hypothèse (pour simplifier l'écriture supposons $c_0 = 1$)

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x_2}{\beta_n^2}\right) = 1 + c_2 x^2 + \ldots + c_{2n} x^{2n} + \ldots, \tag{7}$$

où

$$\sigma = \sum_1^{\infty} \frac{1}{|\beta_n|} \tag{8}$$

est convergente.

Il est clair que, $|\beta_n|$ étant donnés, les coefficients c_{2n} auront leurs modules les plus grands, lorsque tous les β_n seront réels et positifs: nous pouvons donc nous borner, à considérer ce cas, comme le plus défavorable pour la convergence de la serie (6). Supposons donc $\beta_n > 0$.

Ceci posé, envisageons le polynome:

$$f_N(x) = \prod_{n=1}^{n=N} \left(1 + \frac{x^2}{\beta_n^2}\right) = 1 + A_1 x^2 + \ldots\ldots + A_N x^{2N}. \tag{9}$$

On aura:

$$A_1 = \sum\nolimits_1 \frac{1}{\beta_n^2}, \quad A_2 = \sum\nolimits_2 \frac{1}{\beta_m^2 \beta_n^2} \text{ etc.,}$$

*) L'exactitude de l'inégalité (4) pour toute valeur de *n*. S. B.

le signe $\sum_k$ exprimant que l'on fait la somme de tous les produits de k facteurs $\dfrac{1}{\beta_m^2\beta_n^2\dots\beta_s^2}$ obtenus en combinant de toutes les façons possibles les N quantités $\dfrac{1}{\beta_n^2}$.

Montrons d'abord, que l'on a quel que soit l'entier m

$$A_m A_{m-2} < A_{m-1}^2, \tag{10}$$

pourvu qu'on pose $A_0 = 1$ et $A_m = 0$, lorsque $m < 0$ ou $m > N$, et que l'on remplace le signe $<$ par $=$, si $m \leqslant 0$ ou $m > N+1$.

En effet, notre affirmation est évidente pour $N = 1$. Il suffit donc de faire voir, que les inégalités (10) étant vraies pour $N = N_0$, elles le seront également pour $N = N_0 + 1$.

Or, en désignant par A'_m les coefficients correspondants du polynome $f_{N+1}(x)$ de degré $2(N+1)$, obtenu par l'introduction dans (9) d'un nouveau facteur $(1 + h^2x^2)$, où $h^2 = \dfrac{1}{\beta_{N+1}^2} > 0$, on a, en effectuant la multiplication,

$$f_{N+1}(x) = 1 + A'_1x^2 + \dots\dots + A'_m x^{2m} + \dots\dots + A'_{N+1}x^{2N+2},$$

où

$$A'_m = h^2A_{m-1} + A_m \tag{11}$$

Il suffit donc de vérifier que

$$(h^2A_{m-1} + A_m)(h^2A_{m-3} + A_{m-2}) < (h^2A_{m-2} + A_{m-1})^2, \tag{12}$$

les nombres A_m satisfaisant, par hypothèse, aux inégalités (10). Or, l'inégalité (12) est une conséquence des trois inégalités

$$A_{m-1}A_{m-3} < A_{m-2}^2,\ A_m A_{m-2} < A_{m-1}^2,\ A_m A_{m-3} < A_{m-1}A_{m-2}, \tag{13}$$

dont la dernierè se déduit par la multiplication des deux premières. En remarquant d'ailleurs que l'inégalité (12) subsiste même, si deux des inégalités (13) sont remplacées par des égalités, et se reduit à une égalité, seulement, lorsque toutes les trois des inégalités (13) se trouvent remlacées par les égalités correspondantes, nous voyons que

$$A'_m A'_{m-2} < (A'_{m-1})^2, \tag{14}$$

tant que $0 < m \leqslant N+2$, l'inégalité (14) se réduisant à une égalité pour toutes les autres valeurs de m. En répétant le même raisonnement de proche en proche, nous constatons que, les inégalités (10) sont vraies quel que soit N.

Il résulte, en particulier, de notre raisonnement que $m > 1$ étant donné la différence

$$A_{m-1}^2 - A_m A_{m-2} > 0$$

va en croissant avec N; donc on aura à fortiori

$$c_{2m-2}^2 - c_{2m} \cdot c_{2m-4} > 0 \tag{15}$$

Revenons encor à notre polynome $f_N(x)$, donné par la formule (9), le nombre N étant fixe. En vertu de (10), $A_m > 0$ pour $0 \leqslant m \leqslant N$.

Par conséquent, en posant

$$\sqrt{\frac{A_{m+1}}{A_m}} = \frac{1}{P_m}, \tag{16}$$

nous voyons, que $\frac{1}{P_m} > 0$, tant que $N > m \geqslant 0$, et $\frac{1}{P_m} = 0$ pour $m = N$; de plus les termes de la somme

$$S_N = \frac{1}{P_0} + \frac{1}{P_1} + \ldots\ldots + \frac{1}{P_N} \tag{17}$$

vont en décroissant à cause de (10).

Soit, d'autre part,

$$\sigma_N = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{\beta_N}. \tag{18}$$

Cherchons une limite supérieure de l'accroissement de S_N, lorsque nous introduisons dans $F_N(x)$, comme auparavant, le nouveau facteur $1 + h^2 x^2$, de sorte que la somme σ_N reçoit l'accroissement h et devient égale à

$$\sigma_{N+1} = \sigma_N + h. \tag{19}$$

En vertu de l'égalité (11), chaque terme $\frac{1}{P_m}$ sera remplacé par

$$I_m = \frac{1}{P_m}\sqrt{\frac{1 + h^2 P_m^2}{1 + h^2 P_{m-1}^2}},$$

de sorte que la somme S_N se trouvera trausformée en

$$S_{N+1} = \sum_{m=0}^{m=N} \frac{1}{P_m}\sqrt{\frac{1 + h^2 P_m^2}{1 + h^2 P_{m-1}^2}} = \sum_{m=0}^{m=N} \sqrt{\frac{\frac{1}{P_m^2} + h^2}{1 + h^2 P_{m-1}^2}} \tag{20}$$

pourvu qu'on pose $P_{-1} = 0$ et que l'on remarque que le dernier terme $\frac{1}{P_N}$ qui était nul daus S_N se transforme effectivement en $\sqrt{\frac{h^2 A_N}{A_N + h^2 A_{N-1}}} = \sqrt{\frac{h^2}{1 + h^2 P_{N-1}}}$

Ceci posé, nous allons décomposer S_{N+1} en trois parties s'il y a lieu (il se pourrait que la première ou dernière partie ne contienne aucun terme):

$$S_{N+1} = \sum_{m=0}^{m=m_0} I_m + \sqrt{\frac{\dfrac{1}{P^2_{m_0+1}} + h^2}{1 + P^2_{m_0} h^2}} + \sum_{m=m_0+2}^{m=N} I_m , \tag{21}$$

où m_0 est le plus petit indice pour lequel

$$h^2 (2 P_{m_0} + P_{m_0+1}) P_{m_0+1} > 1 , \tag{22}$$

de sorte qu'on aura pour toute valeur de $m \leqslant m_0$

$$h^2 (2 P_{m-1} + P_m) P_m \leqslant 1 . \tag{23}$$

Chaque terme de la première partie pourra être mis sous la forme:

$$I_m = \frac{1}{P_m} \sqrt{\frac{1 + h^2 P^2_m}{1 + h^2 P^2_{m-1}}} = \frac{1}{P_m} \sqrt{1 + h^2 \frac{P^2_m - P^2_{m-1}}{1 + h^2 P^2_{m-1}}} <$$

$$< \frac{1}{P_m} \left[1 + \frac{h^2}{2} \frac{P^2_m - P^2_{m-1}}{1 + h^2 P^2_{m-1}} \right]. \tag{24}$$

Or,

$$\frac{P^2_m - P^2_{m-1}}{1 + h^2 P^2_{m-1}} = (P_m - P_{m-1}) \frac{P_m + P_{m-1}}{1 + h^2 P^2_{m-1}} =$$

$$= \frac{P_m - P_{m-1}}{1 + h^2 P_m} \cdot \frac{1 + h^2 P^2_m}{1 + h^2 P^2_{m-1}} (P_m + P_{m-1}) , \tag{25}$$

et

$$\frac{P_m - P_{m-1}}{1 + h^2 P_m} < \int_{P_{m-1}}^{P_m} \frac{dz}{1 + h^2 z^2} . \tag{26}$$

Mais, en multipliant par $(P_m - P_{m-1})$ les deux membres de l'inégalité (23) qui est vérifiée, par hypothèse, pour toutes les valeurs de m que nous considérons actuellement, on a

$$h^2 [P^2_m + P_m P_{m-1} - 2P^2_{m-1}] P_m \leqslant P_m - P_{m-1} ,$$

ou bien

$$(1 + h^2 P^2_m)(P_m + P_{m-1}) \leqslant 2P_m (1 + h^2 P^2_{m-1}) ; \tag{27}$$

par conséquent, en tenant compte de (26) et (27), on tire de (25)

$$\frac{P^2_m - P^2_{m-1}}{1 + h^2 P^2_{m-1}} < 2P_m \int_{P_{m-1}}^{P_m} \frac{dz}{1 + h^2 z^2} ,$$

de sorte que, d'aprés (24),

$$I_m < \frac{1}{P_m} + h^2 \int_{P_{m-1}}^{P_m} \frac{dz}{1+h^2 z^2}$$

et finalement

$$\sum_{m=0}^{m=m_0} I_m < \sum_{m=0}^{m=m_0} \frac{1}{P_m} + h^2 \int_0^{P_{m_0}} \frac{dz}{1+h^2 z^2} \leqslant \sum_{m=0}^{m=m_0} \frac{1}{P_m} + h\frac{\pi}{4}, \tag{28}$$

car $h P_{m_0} \leqslant 1$, en vertu de (23).

D'autre part, la dernière partie

$$\sum_{m=m_0+2}^{m=N} I_m < \sum_{m=m_0+1}^{m=N-1} \frac{1}{P_m}, \tag{29}$$

puisque

$$I_m = \sqrt{\frac{\frac{1}{P_m^2} + h^2}{1 + h^2 P_{m-1}^2}} < \frac{1}{P_{m-1}}$$

Ainsi nous concluons de (28) et (29) que l'accroissement

$$S_{N+1} - S_N < h\frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{\frac{1}{P_{m_0+1}^2} + h^2}{1 + P_{m_0}^2 h^2}}, \tag{30}$$

P_{m_0} et P_{m_0+1} devant satisfaire à l'inégalité (22); mais, grâce à l'inégalité signalée, on a

$$\frac{1 + \frac{1}{h^2 P_{m_0+1}^2}}{1 + h^2 P_{m_0}^2} < \frac{1 + \frac{2P_{m_0} + P_{m_0+1}}{P_{m_0+1}}}{1 + \frac{P_{m_0}^2}{P_{m_0+1}(2P_{m_0} + P_{m_0+1})}} = \frac{2(2P_{m_0} + P_{m_0+1})}{P_{m_0} + P_{m_0+1}} < 3.$$

Par conséquent, quelle que soit la valeur positive h,

$$S_{N+1} - S_N < h\left[\sqrt{3} + \frac{\pi}{4}\right]. \tag{31}$$

Il en résulte que dans tous les cas, et quel que soit N,

$$S_N < \sigma_N\left[\sqrt{3} + \frac{\pi}{4}\right], \tag{32}$$

car pour $N=1$, on a $S_1=\sigma_1$.

En faisant croitre N indéfiniment, nous voyons ainsi que la somme

$$\sum_{m=1}^{n}\sqrt{\frac{c_{2m}}{|c_{2m-2}|}}<\sigma\left[\sqrt{3}+\frac{\pi}{4}\right],$$

quelque soit n. Donc la série

$$S=\sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{\frac{|c_{2m}|}{c_{2m-2}}}<\sigma\left[\sqrt{3}+\frac{\pi}{4}\right] \tag{33}$$

est convergente.

Le conclusion est maintenant immédiate, grâce au théorème suivant, dû à M. Carleman:

Si
$$S=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$
est une série convergente à termes positifs, la série

$$\Sigma=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{u_1\,u_2\ldots u_n}$$

est également convergente, et on a $\Sigma\leqslant eS$.

En appliquant ce théorème de M. Carleman à notre série S, nous tirons de (33) que la série

$$\Sigma=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[2n]{|c_{2n}|}<e\left[\sqrt{3}+\frac{\pi}{4}\right]\sigma \tag{34}$$

est convergente. C. q. f. d.

Il y a lieu de signaler que, grâce à la remarque faite au debut de notre démonstration, la convergence de Σ est bien assurée quels que soient les nombres β_n; par contre, la convergence de la série S n'est aucunement certaine, lorsque les nombres β_n ne sont pas positifs (il est évident que la variation d'une seule des quantités β_n suffirait pour détruire la convergence, en annulant un des coefficients c_{2m}).

Remarque. La réciproque de notre théorème n'est exacte, en général, car, quel que soit le genre de la fonction entière donnée par la série (5), il suffirait que ses coefficients présentent des lacunes assez grandes pour que la série (6) puisse converger. Si cependant nous nous bornons au cas, où les nombres β_n sont réels, nous avons vu que les coefficients de (5) satisfont à l'inégalité (15), qui leur impose une certaine régularité de décroissanse, et alors la réciproque est bien exacte. En d'autres termes, je dis que pour $\beta_n>0$, la divergence de la série (8) (qui exprime que la fonction (7) est de genre 1) entraine la divergence de la série (6). Il suffira évidemment de prouver la divergence de la série

$$S=\sum_{1}^{\infty}\sqrt{\frac{c_{2m}}{c_{2m-2}}}, \tag{35}$$

puisque les termes de cette série étant décroissants [d'après (15)], sa divergence entraine nécessairement celle de la série (6), dont les termes sont supérieurs respectivement à ceux de la série (35). Pour le montrer nous allons faire voir que l'introduction d'un nouveau facteur $1+h^2x^2$ dans le produit (9) qui correspond à l'augmentation de h de la somme σ_N donnée par la formule (18) entraine une augmentation be la somme S_N d'une quantité supérieure à Ah, où A est un nombre positif fixe: il en resultera que σ_n croissant indéfiniment, par hypothèse, il en sera de même de S_N.

Définissons le nombre $m_0 \geqslant 0$ par la condition que

$$h\ P_m > 1 \text{ (ponr } m \geqslant m_0) \quad h\ P_m \leqslant 1 \text{ (poun } m < m_0).$$

Nous pouvons faire deux hypothèses différentes: 1) soit d'abord $h P_{m_0} \geqslant 2$: dans ces conditions en se reportant à (24), nous vérifions que

$$I_{m_0} = \frac{1}{P_{m_0}} \sqrt{\frac{1+h^2 P_{m_0}^2}{1+h^2 P_{m_0-1}^2}} \geqslant \frac{1}{P_{m_0}} \sqrt{\frac{1+h^2 P_{m_0}}{2}} \geqslant \frac{1}{P_{m_0}} + \frac{h}{4},$$

car

$$\sqrt{\frac{1+x^2}{2}} - \frac{x}{4} < 1 \text{ croit avec } x \text{ (pour } x \geqslant 2).$$

En tenant compte de ce que tous les termes de S_n reçoivent des accroissements positifs, nous voyons que dans l'hypothèse considérée l'accroissement de S_N est supérieur à $\frac{h}{4}$. 2) Soit à présent $hP_{m_0} < 2$; nous avons alors pour toutes les valeurs de $m \leqslant m_0$

$$I_m = \frac{1}{P_m} \sqrt{1+h^2 \frac{P_m^2 - P_{m-1}^2}{1+h^2 P_{m-1}^2}} > \frac{1}{P_m} \left[1 + \frac{h^2}{4} \frac{P_m^2 - P_{m-1}^2}{1+h^2 P_{m-1}^2} \right]$$

Donc, l'accroissement de I_m est supérieur à

$$\frac{h^2 (P_m - P_{m-1})}{4(1+h^2 P_{m-1}^2)} > \frac{h^2}{4} \int_{P_{m-1}}^{P_m} \frac{dz}{1+h^2 z^2},$$

et la somme de tous ces accroissements sera grâce à (36) supérieure à

$$\frac{h^2}{4} \int_0^{P_{m_0}} \frac{dz}{1+h^2 z^2} \geqslant \frac{h}{4} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{h\pi}{16}$$

Ainsi dans cette seconde hypothèse également, l'accroissement de S_N sera supérieur à Ah, où $A = \frac{\pi}{16}$ c. q. f. d. Je terminerai cette note par la demonstration de l'inégalité (4) de M. Lindelöf relative à la fonction (1). A cet effet, je remarquerai, que pour obtenir les coefficients successifs du développement de

$$(1 + b_1 x)(1 + b_2 x)\dots(1 + b_n x)\dots = 1 + c_1 x + \dots + c_m x^m + \dots$$

ont peut employer le procédé suivant. Désignons par $c_h^{(k)}$ le coëfficient de x^k du produit infini obtenu en rejetant les *h* premiers facteurs; ainsi, en particulier, $c_0^{(k)} = c_k$. On aura évidemment

$$c_h' = \sum_{h+1}^{\infty} b_n, \quad c_h'' = \sum_{h+1}^{\infty} b_n c_n', \quad \dots \quad c_h^{(k)} = \sum_{h+1}^{\infty} b_n c_n^{(k-1)} \dots$$

Pour la fonction (1) on a $b_n = \dfrac{1}{(n+1)(\log \overline{n+1})^{\alpha}}$

Donc $$c_h' = \sum_{h+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\log \overline{n+1})^{\alpha}} > \int_{h+1}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(\log \overline{x+1})^{\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{(\alpha-1)(\log \overline{h+2})^{\alpha-1}}$$

$$c_h'' = \frac{1}{\alpha-1} \sum_{h+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\log \overline{n+1})^{\alpha}(\log \overline{n+2})^{\alpha-1}} >$$

$$> \frac{1}{\alpha-1} \int_{h+1}^{\infty} \frac{dx}{(x+2)(\log \overline{x+2})^{2\alpha-1}} =$$

$$= \frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, (\alpha-1)^2} \cdot \frac{1}{(\log \overline{h+3})^{2\alpha-2}};$$

en général $$c_h^{(k)} > \frac{1}{k!\,(\alpha-1)^k} \, \frac{1}{[\log (h+k+1)]^{k\alpha-k}},$$

de sorte que $$c^k = c_0^{(k)} > \frac{1}{k!\,(\alpha-1)^k (\log \overline{k+1})^{k\alpha-k}}$$

Donc, en tenant compte de la formule de Stirling, on a bien, quel que petit que soit ε, pour toute valeur de n assez grande.

$$\sqrt[n]{c_n} > \frac{e}{(\alpha-1)\, n\, (\log \overline{n+1})^{\alpha-1}} > \frac{e(1-\varepsilon)}{(\alpha-1)\, n\, (\log \overline{n+1})^{\alpha-1}} \qquad (4)$$

La série $\sum \sqrt[n]{c_n}$ est donc bien divergente, si $\alpha \leqslant 2$.

О различных мерах точечных ансамблей *)

Гр. Грузинцев

---

1. В своей предыдущей заметке „Об одном типе свойств точечных ансамблей" я указал на один класс свойств ансамблей, которые назвал α-свойствами. Приложением понятия α-свойств к измерению линейных ансамблей мы теперь и займемся.

И подобно тому, как канторовская мера ансамблей, римановский интеграл, жордановские функции ограниченной варьяции и непрерывные функции оказываются тесно связанными между собой, так как при построении этих понятий мы можем взять один и тот же исходный пункт — то, что я назвал бэровским α-свойством, точно так же и замена бэровского α-свойства общим α-свойством приводит к обобщению меры, интеграла и понятий функций ограниченной варьяции и непрерывных.

Напомню, что задача измерения линейного ансамбля очень просто сводится к отысканию определенного интеграла от некоторой функции, связанной с измеряемым ансамблем.

Именно, под длиной ансамбля ε, лежащего в интервале (a, b), мы понимаем

$$\int_a^b \mu(x)dx$$

где функция $\mu(x)$ равна единице для всех точек ансамбля E и нулю — для точек дополнительного ансамбля. Поэтому мы сначала определим интеграл, а от него перейдем к мере ансамбля.

2. Предварительно мы дадим обобщение понятия верхней (resp. нижней) границы и колебания функции в промежутке и в точке.

Пусть нам дано некоторое α-свойство.

Тогда функцией α-ограниченной в интервале (a, b), мы будем называть функцию $f(x)$, определенную в этом интервале, если можно определить два числа A и B так, чтобы ни ансамбль чисел x, удовлетворяющих неравенству

$$f(x) > A,$$

---

*) Доложено Екатеринославскому Мат. О-ву 24. VI. 20 под заглавием: „О различных определениях интеграла" и Харьковскому Мат. О-ву 15. II. 23 под заглавием: „О формальном методе исследования в теории ансамблей и в теории функций".

ни ансамбль чисел x, удовлетворяющих неравенству

$$f(x) < B$$

не имели бы данного α-свойства.

В случае, если α-свойство будет бэровским (т.-е. „не быть пустым"), то мы получим просто ограниченную функцию.

3. Число M_α (f, a, b) или, короче, M_α мы будем называть верхним α-пределом функции $f(x)$ в интервале (a, b), если оно удовлетворяет двум условиям:

I. Как бы ни было мало положенное число ε, ансамбль чисел x, удовлетворяющих неравенству

$$f(x) > M_\alpha - \varepsilon,$$

всегда имеет α-свойство.

II. Как-бы ни было мало положительное число ε, ансамбль чисел x, удовлетворяющих неравенству

$$f(x) > M_\alpha + \varepsilon,$$

никогда не имеет α-свойства.

Верхний α-предел функции есть частный случай верхнего α-предела ансамбля, который определяется аналогичными двумя условиями и имеет следующие два важные свойства:

I. Верхний α-предел ансамбля всегда существует, если ансамбль α-ограничен и имеет α-свойство.

II. Если ансамбль E_1, есть часть ансамбля E_2, то его верхний α-предел не может быть больше верхнего α-предела ансамбля E_2.

Нетрудно конструировать и нижний α-предел функции, и нижний α-предел ансамбля.

4. Можно было бы привести много примеров α-свойств, но я ограничусь пятью.

Пусть α_1 — будет „не быть пустым"

α_2 — „ „быть бесконечным"
α_3 — „ „быть неприводимым"
α_4 — „ „быть неисчислимым"
α_5 — „ „быть не меры нуль" *)

Тогда, очевидно, M_{α_1} будет верхней границей функции в данном промежутке и M_{α_2} — верхним пределом. Остальные же три мы назовем: M_{α_3} — верхним неприводимым пределом, M_{α_4} — верхним сгущенным пределом и, наконец, M_{α_5} — верхним метрическим пределом.

Нетрудно показать, что для одной и той же функции в одном и том же промежутке

$$M_{\alpha_1} \geqslant M_{\alpha_2} \geqslant M_{\alpha_3} \geqslant M_{\alpha_4} \geqslant M_{\alpha_5}$$

---

*) Для определенности, я в этом случае меру беру в смысле Borel — Lebesgue'a.

Таким же образом, если мы обозначим m_α нижний α-предел, то для одной и той же функции в одном и том же промежутке

$$m_{\alpha_1} \leqslant m_{\alpha_2} \leqslant m_{\alpha_3} \leqslant m_{\alpha_4} \leqslant m_{\alpha_5}$$

5. Если нам дана некоторая α-ограниченная функция $f(x)$ и некоторое частное значение независимого переменнаго, напр., x, то, окружив это значение интервалом длины h, мы получим два числа

$$M_\alpha\left(f, x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}\right) = M_\alpha(h)$$

и

$$m_\alpha\left(f, x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}\right) = m_\alpha(h)$$

т.-е. верхний и нижний α-пределы в соответствующих интервалах.

При уменьшении этого интервала до нуля, оба эти числа, как это нетрудно показать, стремятся к определенным пределам:

$$\lim_{h \to 0} M_\alpha(h) = M_\alpha(f, x)$$

$$\lim_{h \to 0} m_\alpha(h) = m_\alpha(f, x).$$

Эти пределы мы будем называть **верхний и нижний α-пределы функции f в точке x.**

Так как при этом постоянно

$$m_\alpha(h) \leqslant M_\alpha(h)$$

то, следовательно,

$$m_\alpha(f, x) \leqslant M_\alpha(f, x)$$

6. Неравенства, существующие между верхним и нижним α-пределами дают возможность определить положительные (точнее: не отрицательное число которое мы назовем **α-колебанием** функций **в данном интервале**:

$$\omega_\alpha(a, b) = M_\alpha(a, b) - m_\alpha(a, b)$$

Подобным же образом мы определим и **α-колебание** функции в данной **точке**:

$$\omega_\alpha(f, x) = M_\alpha(f, x) - m_\alpha(f, x)$$

Относительно α-колебания функции в точке и интервале можно доказать теорему, которая является обобщением теоремы Baire'а о равномерности колебания функции.

Если во всех точках x некоторого полного интервала $[a, в]$ *) имеет место неравенство

$$\omega_\alpha(f, x) \leqslant k$$

*) **Полным** интервалом (a, b) я называю ансамбль точек x, удовлетворяющих неравенствам.

то для всякого $\varepsilon > 0$ всегда можно подобрать такое δ, что во всяком промежутке, лежащем в $[a, b]$ и не превышающем по длине δ, α-колебание ω_α будет меньше $(k + \varepsilon)$

$$\omega_\alpha < k + \varepsilon$$

Введение понятия α-колебания дает возможность определить два класса функций, которые мы назовем функциями

$$a \leqslant x \leqslant b$$

ограниченного α-колебания и α-непрерывными.

Разобьем интервал $[a, b]$, в котором определена функция $f(x)$, предполагаемая нами α-ограниченной, на конечное число частных интервалов

$$\triangle_1, \triangle_2, \ldots\ldots \triangle_k, \ldots\ldots, \triangle_n$$

так, чтобы они не находили друг на друга, и чтобы сумма их равнялась длине первоначального интервала. Обозначим ω_α^k α-колебание функции в k-ом интервале.

Тогда функцию $f(x)$ мы будем называть функцией ограниченного α-колебания в интервале $[a, b]$, если

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_\alpha^k$$

ограничено сверху, как бы мы ни брали частные интервалы

Если же для всех значений x в полном интервале $[a, b]$ имеет место равенство:

$$\omega_\alpha(f, x) = 0$$

то такую функцию мы будем называть α-непрерывной в этом интервале.

На α-непрерывные функции без труда распространяется теорема G. Cantor'a о равномерности непрерывности: это прямое следствие формулированной выше обобщенной теоремы R. Baire'a.

Следует заметить, что такое определение α-непрерывных функций и функций ограниченного α-колебания легко распространить и на функции многих переменных, так как при определении чисел M_α, m_α и ω_α мы не пользовались тем фактом, что значения переменного x расположены в скалярном порядке *).

---

*) Обобщение функций à variation bornée на случай многих переменных можно произвести и в другом направлении, которое мне представляется более интересным.

В своей работе (1916 г.; еще не опубликована) „Fonctions de deux variables réelles et fonctions analytiques" я ввожу понятие о „une couple de fonctions à variation bornée commune" и даю обобщение интеграла Stieltjes'a—Ляпунова, полезное для решения некоторых задач теории однозначных аналитических функций.

Название, которое я привожу, дает, мне кажется, достаточно ясное понятие о направлении, в котором идет обобщение.

8. Обращаясь к тем пяти случаям α-свойств, которые я указал выше, мы получим пять классов α-непрерывных функций: непрерывные функции, в обычном смысле слова и, кроме того, предельно-непрерывные неприводимо-непрерывные, сгущенно-непрерывные и метрически-непрерывные.

В частности известная функция Lejeune-Dirichlet (равная 1 для иррациональных значений и 0 для рациональных) принадлежит, очевидно, к числу сгущенно-непрерывных.

Точно так же мы получаем, кроме функций ограниченного колебания, еще четыре класса функций: функции ограниченного предельного колебания, ограниченного неприводимого колебания, ограниченного метрического колебания.

9. Пусть нам дана функция $f(x)$, определенная в интервале $[a, b]$ и α-ограниченная в нем.

Разделим весь интервал на n частей:

$$\triangle_1,\ \triangle_2, \ldots \triangle_k \ldots \triangle_n$$

и составим суммы:

$$\sum_{k=1}^{n} M_\alpha^k \triangle_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} m_\alpha^k \triangle_k$$

где M_α^k и m_α^k — верхний и нижний α-пределы функции $f(x)$ в k-ом интервале.

Пусть $\triangle$ будет наибольший из частных интервалов $\triangle_k$.

Тогда, какова бы ни была функция $f(x)$, лишь бы она была α-ограниченной,— обе вышеуказанные суммы будут стремиться к определенным пределам, если

$$\lim \triangle = 0$$

При этом величина этих пределов не зависит от способа подразделения $[a. b]$ на частные интервалы.

В этом состоит обобщение теоремы Darboux.

Назовем эти пределы

$$\lim \sum M_\alpha^k \triangle_k = \overline{\int_{a}^{b}}_{\alpha} f(x)\,dx$$

верхним α-интегралом и

$$\lim \sum m_\alpha^k \triangle_k = \underline{\int_{a}^{b}}_{\alpha} f(x)\,dx$$

нижним α-интегралом.

Если оба эти интегралы равны, то общую их величину мы будем обозначать

$$\int_{a}^{b}{}_{\alpha} f(x)\,dx$$

и будем называть α-интегралом функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ а функцию $f(x)$ будем называть α-интегрируемой в этом промежутке.

10. Из определения α-интеграла без труда вытекают три свойства его:

I. двоякая аддитивность операции α-интегрирования — по отношению к функции и по отношению к области, т.-е.,

$$\int_{\alpha}(f_1 + f_2)\,dx = \int_{\alpha} f_1\,dx + \int_{\alpha} f_2\,dx$$

$$\int_{a\,\alpha}^{b} f\,dx = \int_{a\,\alpha}^{c} f\,dx + \int_{c\,\alpha}^{b} f\,dx$$

II. теорема о средней, а именно, если M_α и m_α будут относиться ко всему интервалу $[a, b]$, то

$$m_\alpha . (b - a) \leqslant \int_{a\,\alpha}^{b} f(x)\,dx \leqslant M_\alpha . (b - a)$$

III. свойства неопределенного интеграла, а именно функция

$$F(x) = \int_{a\,\alpha}^{x} f(x)\,dx$$

определенная в интервале $[a, в]$ будет в этом интервале одновременно и непрерывной и ограниченного колебания.

Условию α-интегрируемости можно придать ту же форму, как и условию существования римановского интеграла, т.-е.;

$$\lim_{\Delta = 0} \sum \omega_\alpha^k \; \triangle_k = 0$$

В частном случае это условие соблюдается и для α-непрерывных функций и для функций ограниченного α-колебания.

Данному выше условию α-интегрируемости нетрудно дать форму, аналогичную форме, выведенной Lebesgue'ом для интеграла Riemann'a.

Функция $f(x)$ должна быть почти везде*) α-непрерывной.

12. Исследование α-интегрируемости функции $f(x)$ можно свести на исследование интегрируемости в смысле Riemann'a функций $M_\alpha(f, x)$ и $m_\alpha(f, x)$.

Это мы можем сделать, опираясь на две леммы:

I. Во всяком промежутке верхняя граница функции $M_\alpha(f, x)$ совпадает с верхним α-пределом функции $f(x)$ и

II. Во всяком промежутке нижняя граница функции $m_\alpha(f, x)$ совпадает с нижним α-пределом функции $f(x)$.

*) Т.-е. за исключением, быть может, ансамбля меры нуль.

Из этих лемм вытекает, что

$$\overline{\int_a^b}_{\alpha} f(x)dx = \overline{\int_a^b}_{\alpha} M_\alpha(f,x)\,dx$$

и

$$\underline{\int_a^b}_{\alpha} f(x)dx = \underline{\int_a^b}_{\alpha} m_\alpha(f,x)\,dx$$

т.-е. верхний α-интеграл функции $f(x)$ равен верхнему римановскому интегралу функции $M_\alpha(f,x)$, а нижний α-интеграл функции $f(x)$ равен нижнему римановскому интегралу функции $m_\alpha(f,x)$.

13. Переходя к условиям α-интегрируемости, мы отметим следующие очевидные неравенства:

$$\overline{\int} M_\alpha\,dx \geqslant \underline{\int} M_\alpha\,dx \geqslant \underline{\int} m_\alpha\,dx$$

$$\overline{\int} M_\alpha\,dx \geqslant \overline{\int} m_\alpha\,dx \geqslant \underline{\int} m_\alpha\,dx$$

интегралы берутся в римановском смысле и в интервале (a, b).

Сравнивая эти неравенства с равенствами предыдущего n°, мы находим: необходимыми и достаточными условиями α-интегрируемости функции $f(x)$ являются 1) интегрируемость в риманновском смысле функций $M_\alpha(f,x)$ и $m_\alpha(f,x)$ и 2) равенство полученных таким образом интегралов:

$$\int_a^b M_\alpha\,dx = \int_a^b m_\alpha\,dx.$$

14. Так как всегда верхний α-предел меньше или равен верхней границе, а нижний α-предел больше или равен нижней границе, то

$$\overline{\int} F(x)\,dx \geqslant \overline{\int}_{\alpha} F(x)\,dx \geqslant \underline{\int}_{\alpha} F(x)\,dx \geqslant \underline{\int} F(x)\,dx,$$

где функция $F(x)$ ограничена во всем интервале интегрирования.

Положим $F = M_\alpha(f,x)$

Тогда получим:

$$\overline{\int} M_\alpha(f,x)\,dx \geqslant \overline{\int}_{\alpha} M_\alpha(f,x)\,dx \geqslant \underline{\int}_{\alpha} M_\alpha(f,x)\,dx \geqslant \underline{\int} M_\alpha(f,x)\,dx,$$

Допустим теперь, что функция $f(x)$ α-интегрируема; тогда $M_\alpha(f,x)$, как мы знаем, будет интегрируема в смысле Riemann'а и все написанные выше неравенства превращаются в равенства.

Отсюда вытекает, во-первых, что $M_\alpha(f, x)$ α-интегрируема и, во-вторых,

$$\int_\alpha M_\alpha (f,x)\, dx = \int M_\alpha (f,x)\, dx = \int_\alpha f(x)\, dx.$$

Тот-же вывод можно, очевидно, сделать и относительио функции $m_\alpha (f, x)$; т.-е. во-первых m_α (f, x) α-интегрируемо и, во-вторых,

$$\int_\alpha m_\alpha(f, x)\, dx = \int m_\alpha(f, x)\, dx = \int_\alpha f(x) dx.$$

Отсюда следует, что

$$\int_\alpha (M_\alpha - f)\, dx = 0$$

и

$$\int_\alpha (f - m_\alpha)\, dx = 0$$

15. Допустим тепер, что функция $f(x)$ неинтегрируема в смысле Riemann'a, но имеет какой-нибудь α-интеграл.

Тогда легко убедиться, что к f можно прибавить такую неинтегрируемую в смысле Riemann'a функпию σ, имеющую α-интеграл, равный нулю, что полученная новая функция

$$f + \sigma$$

будет интегрируема по Riemann'y и, кроме того,

$$\int (f + \sigma)\, dx = \int_\alpha f\, dx$$

Таких функций, очевидно, можно указать бесчисленное множество; вот одна из них:

$$\sigma(x) = M_\alpha (f, x) - f(x)$$

Таким образом, всякая функция $f(x)$, не интегрируемая в смысле Riemann'a, но α-интегрируемая, может быть представлена в виде суммы двух функций

$$f(x) = \phi(x) + \rho(x)$$

где ϕ — интегрируема по Riemann'y, а ρ — имеет α-интеграл, повсюду равный нулю.

16. Допустим, что у нас имеется несколько α-свойств, которые можно расположить в ряд так, что если ансамбль имеет некоторые из этих свойств, то он будет иметь и все последующие.

Мы будем говорить в этом случае, что у нас имеется шкала α-свойств.

Пример такой шкалы мы видели в самом начале статьи (n° 4).

Сравнение различных α-свойств, принадлежащих к одной и той же шкале, приводит к интересным выводам, из которых я отмечу только некоторые:

I. Если функция интегрируема для какого-нибудь α-свойства, то она будет интегрируема и для всех следующих.

II. Если функция интегрируема для двух различных α-свойств, то соответствующие α-интегралы равны.

III. Оценка α-интеграла при помощи теоремы о средней дает для следующих α-свойств лучшие результаты.

IV. При переходе от предыдущих α-свойств к последующим происходит расширение класса интегрируемых функций, причем это расширение можно представить себе в такой форме: увеличивается класс функций, имеющий интеграл, повсюду равный нулю, а именно: некоторые функции, которые были раньше неинтегрируемыми, делаются интегрируемыми, ибо их интеграл равен нулю; остальные же „приобретают", так сказать, интегрируемость в силу теоремы, аналогичной теореме n° 15.

17. Воспользоваться изложенными результатами для построения меры ансамбля, связанной с данным α-свойством, уже нетрудно.

Мы этого делать не будем, ограничившись напоминанием замечания, сделанного в n° 1 относительно функции $\mu(x)$.

О конечных разностях функций двух независимых переменных

М. Н. Марчевский

1. Во многих вопросах, как, например, при решении задачи интерполирования или нахождения конечных определенных сумм, нам приходится встречаться с так называемыми конечными разностями различных порядков для некоторой функции f(x) одного независимого переменного x.

Предполагая эти понятия, равно как и важнейшие формулы, относящиеся к конечным разностям, известными, мы лишь напомним формулы, дающие выражения разностей любого порядка с помощью значений функций и, наоборот выражения значений функций с помощью ее последовательных разностей. Эти формулы имеют вид:

$$\left.\begin{array}{r}\Delta^k f(x)=f(x+kh)-C_k^1 f[x+(k-1)h]+C_k^2 f[x+(k-2)h]\ldots\ldots+(-1)^k f(x)\\ f(x+kh)=f(x)+C_k^1\Delta f(x)+C_k^2\ \Delta^2 f(x)+\ldots\ldots+\Delta^k f(x)\end{array}\right\}\ (A)$$

Мы напишем их еще проще в символической форме, для чего предварительно введем следующие сокращенные обозначения:

$$f(x)=f_0,\ f(x+h)=f_1,\ f(x+2h)=f_2,\ldots\ldots f(x+kh)=f_k,$$

т.-е. индексами будем указывать, сколько раз повторяется буква h, прибавляемая к x. Тогда первую из вышенаписанных формул мы представим в следующем символическом виде:

$$\Delta^k f(x)=(f_1-1)^k \quad \text{или} \quad \Delta^k f_0=(f_1-1)^k,$$

при чем условимся, возвышая символически в k-ую степень в правой части, ставить коэффициенты, как и при действительном возвышении в эту степень какого-либо двучлена $(z-1)$, а индексы у f в каждом члене писать такие, какие должны были бы быть показатели буквы z в соответствующем члене выражения $(z-1)^k$, так что f_3 будет соответствовать z^3, f_0 будет стоять на месте z^0, т.-е. в последнем члене разложения, и т. д. Например:

$$\Delta^3 f(x)=(f_1-1)^3=f_3-3f_2+3f_1-f_0=$$
$$=f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x).$$

Вторую из формул (A) мы также напишем символически в виде:

$$f(x+kh)=(1+\triangle)^k f(x), \quad \text{или} \quad f_k=(1+\triangle)^k f_0;$$

так, например, $f(x+4h)$ вычисляется по этой формуле следующим образом:

$$f(x+4h)=(1+\triangle)^4 f(x)=(1+4\triangle+6\triangle^2+4\triangle^3+\triangle^4)f(x)=$$
$$=f(x)+4\triangle f(x)+6\triangle^2 f(x)+4\triangle^3 f(x)+\triangle^4 f(x).$$

2. Одно из первых применений конечных разностей различных порядков мы встречаем в так называемой **интерполяционной формуле Ньютона**. Предполагая, что для некоторой функции $f(x)$ даны значения ее для ряда равноотстоящих значений x, а именно

$$f(a),\ f(a+h),\ f(a+2h),\ldots\ldots f[a+(n-1)h],\ f(a+nh),$$

мы имеем известный интерполяционный полином Ньютона:

$$F(z)=f(a)+\frac{z-a}{1}\triangle f(a)+\frac{(z-a)(z-a-h)}{2!\,h^2}\triangle^2 f(a)+\ldots\ldots+$$
$$+\frac{(z-a)(z-a-h)\ldots\ldots[z-a-(n-1)h]}{n!\,h^n}\triangle^n f(a),$$

значения которого при $z=a,\ a+h,\ a+2h,\ldots\ldots a+nh$ будет совпадать с значениями $f(z)$, т.-е.:

$$F(a)=f(a),\ F(a+h)=f(a+h),\ldots\ldots F(a+nh)=f(a+nh),$$

на основании чего для некоторого значения x, отличного от $a, a+h, \ldots\ldots a+nh$ пишут приближенное равенство:

$$f(x)=F(x), \text{ т.-е.}$$

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}\triangle f(a)+\frac{(x-a)(x-a-h)}{2!\ h^2}\triangle^2 f(a)+$$
$$+\ldots\ldots+\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots\ldots[x-a-(n-1)h]}{n!\ h^n}\triangle^n f(a),$$

которое и представляет собою интерполяционную формулу Ньютона.

3. Мы имеем в виду в настоящей статье заняться обобщением некоторых формул теории конечных разностей на случай функций **двух** независимых переменных.

Подобно тому, как в дифференциальном исчислении при распространении понятия о дифференциалах различных порядков на случай функций двух (и вообще, нескольких) переменных приходится вводить понятия о частных и полных дифференциалах, так и при аналогичном построении теории конечных разностей для функций $f(x, y)$ двух независимых переменных мы должны будем ввести в рассмотрение **частные** и **полные** разности различных порядков, а затем исследовать их важнейшие свойства *).

Мы будем предполагать, что x может принимать ряд равноотстоящих значений вида:

$$a,\ a+h,\ a+2h, \ldots\ldots a+mh,$$

постепенно увеличивающихся на h; значения же y, также равностоящие пусть будут:

$$b,\ b+k,\ b+2k, \ldots\ldots b+nk,$$

т.-е. все время увеличиваются на k. Рассматривая для каждой пары значений x и y соответствующую точку (x, y) в координатной плоскости XOУ, мы будем, таким образом, иметь целый ряд точек с координатами вида $(a+mh,\ b+nk)$ где m и n могут изменяться независимо друг от друга. Мы условимся еще иногда для краткости письма пользоваться сокращенным обозначением:

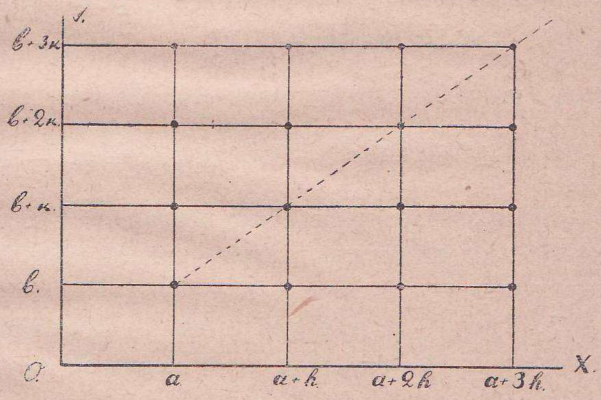


Рис. 1

$$f(a+mh,\ b+nk) = f_{m,n}, \text{ в частности: } f(a, b) = f_{0,0}$$

4. Станем теперь под **частными** разностями 1-го порядка, взятыми, относительно переменных x и y, понимать выражения:

$$\left.\begin{aligned}\Delta_x f(a, b) &= f(a+h, b) - f(a, b)\\ \Delta_y f(a, b) &= f(a, b+k) - f(a, b)\end{aligned}\right\} \quad \text{или, короче} \quad \left\{\begin{aligned}\Delta_x f_{0,0} &= f_{1,0} - f_{0,0}\\ \Delta_y f_{0,0} &= f_{1,0} - f_{0,0}\end{aligned}\right.$$

Далее можем рассматривать частные разности высших порядков:

$$\Delta^2_{x^2} f(a, b) = \Delta_x[\Delta_x f(a, b)],\ \Delta^2_{xy} f(a, b) = \Delta_y[\Delta_x f(a, b)]$$
$$\Delta^2_{yx} f(a, b) = \Delta_x[\Delta_y f(a, b)],\ \Delta^2_{y^2} f(a, b) = \Delta_y[\Delta_y f(a, b)] \text{ и т. д.}$$

При этом мы сейчас же видим, что

$$\Delta^2_{xy} f(a,\ b) = \Delta^2_{yx} f(a,\ b),$$

потому что $\Delta_y[\Delta_x f(a, b)] = \Delta_y[f(a+h, b) - f(a,\ b)] =$

$$= f(a+h,\ b+k) - f(a,\ b+k) - f(a+h,\ b) + f(a,\ b)$$
$$\Delta_x[\Delta_y f(a, b)] = \Delta_x[f(a, b+k) - f(a, b)] =$$
$$= f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b)$$

И вообще можно было бы легко убедиться в том, что результат последовательного нахождения конечных разностей по различным переменным не зависит от порядка таких действий.

*) См. Lacroix — Traité des differences et des séries, 1819 г. или Schlömilch,— Theorie der Differenzen und Summen, 1848 г.

Что же касается последовательного конечного диференцирования по одному и тому же переменному, т.-е. в предположении, что другое сохраняет неизменную величину то, очевидно, оно совершается по известным уже нам правилам, относящимся к функциям одного переменного. Таким образом, мы могли бы писать:

$$\left.\begin{aligned}\Delta^n_{x^n} f(a,b) &= f(a+nh,b) - C^1_n f[a+(n-1)h,b] + \\ &+ C^2_n f[a+(n-2)h,\ b] - \ldots\ldots + (-1)^n f(a,b) \\ \Delta^n_{y^n} f(a,b) &= f(a,b+nk) - C^1_n f[a,b+(n-1)k] + \\ &+ C^2_n f[a,b+(n-2)k] - \ldots\ldots + (-1)^n f(a,b)\end{aligned}\right\}(n=1,2,3,\ldots\ldots)$$

или, еще короче, в символической форме:

$$\Delta^n_{x^n} f_{0,0} = (f_{1,0}-1)^n,\ \Delta^n_{y^n} f_{0,0} = (f_{0,1}-1)^n \qquad (n=1,2,3,\ldots\ldots),$$

где при возвышении в степень изменяется только значек 1 по тому же правилу, которое мы встречали в случае одного переменного, значек же 0 остается без перемены.

5. Сумму частных разностей 1-го порядка назовем **полной** разностью 1-го порядка и обозначим через $\Delta f(a,b)$, так что

$$\Delta f(a,b) = \Delta_x f(a,b) + \Delta_y f(a,b),$$

после чего определим и полные разности высших порядков:

$$\Delta^2 f(a,\ b) = \Delta[\Delta f(a,\ b)],\ \Delta^3 f(a,\ b) = \Delta[\Delta^2 f(a,\ b)],\ldots\ldots,\Delta^n f(a,\ b) = \\ = \Delta[\Delta^{n-1} f(a,\ b)]$$

Нахождение полных разностей различных порядков на основании их определения не представляет никаких затруднений. Но мы, вместо этого, постараемся установить общую формулу для полной разности n-го порядка. Из равенства

$$\Delta f(a,b) = \Delta_x f(a,b) + \Delta_y f(a,b)$$

тотчас же имеем:

$$\Delta^2 f(a,b) = \Delta_x[\Delta_x f(a,b) + \Delta_y f(a,b)] + \Delta_y[\Delta_x f(a,b) + \Delta_y f(a,b)] = \\ = \Delta^2_{x^2} f(a,b) + 2\Delta^2_{xy} f(a,b) + \Delta^2_{y^2} f(a,b).$$

Отсюда легко нашли бы дальше, что

$$\Delta^3 f(a,b) = \Delta^3_{x^3} f(a,b) + 3\Delta^3_{x^2y} f(a,b) + 3\Delta^3_{xy^2} f(a,b) + \Delta^3_{y^3} f(a,b),$$

но и без этой последней формулы, на основании вида выражений для $\Delta f(a,b)$ и $\Delta^2 f(a,b)$ естественно предположить, что:

$$\Delta^n f(a,\ b) = \Delta^n_{x^n} + C^1_n \Delta^n_{x^{n-1}y} + C^2_n \Delta^n_{x^{n-2}y^2} + \ldots\ldots \\ + C^m_n \Delta^n_{x^{n-m}y^m} + \ldots\ldots + C^{n-1}_n \Delta^n_{xy^{n-1}} + \Delta^n_{y^n}\ {}^{*)}$$

*) Для краткости в правой части во всех членах опускаем $f(a,\ b)$.

В том, что эта формула действительно справедлива при всяком n, можно убедиться путем перехода от n к $n+1$. Для этого допустим, что она справедлива для какого-либо значения n и примем во внимание, что, по определению

$$\triangle^{n+1} f = \triangle(\triangle^n f) = \triangle_x(\triangle^n f) + \triangle_y(\triangle^n f),$$

и, кроме того, как легко проверить:

$$\left.\begin{aligned} \triangle_x (Af + B\varphi + \ldots\ldots + K\omega) &= A\triangle_x f + B\triangle_x \varphi + \ldots\ldots + K\triangle_x \omega \\ \triangle_y (Af + B\varphi + \ldots\ldots + K\omega) &= A\triangle_y f + B\triangle_y \varphi + \ldots\ldots + K\triangle_y \omega \end{aligned}\right\},$$

где A, B.....K — постоянные числа, а f, φ, ...ω — функции от x и y. Тогда можем написать:

$$\begin{gathered} \triangle^n f = \triangle^n_{x^n} + C^1_n \triangle^n_{x^{n-1}y} + C^2_n \triangle^n_{x^{n-2}y^2} + \ldots\ldots + C^m_n \triangle^n_{x^{n-m}y^m} + \\ + \ldots\ldots + C^{n-1}_n \triangle^n_{xy^{n-1}} + \triangle^n_{y^n} \end{gathered}$$

$$\left.\begin{gathered} \triangle^{n+1} f = \triangle^{n+1}_{x^{n+1}} + C^1_n \triangle^{n+1}_{x^n y} + C^2_n \triangle^{n+1}_{x^{n-1}y^2} + \ldots\ldots + C^m_n \triangle^{n+1}_{x^{n-m+1}y^m} + \\ + \ldots\ldots + \triangle^{n+1}_{xy^n} + \triangle^{n+1}_{x^n y} + C^1_n \triangle^{n+1}_{x^{n-1}y^2} + \ldots\ldots + C^{m-1}_n \triangle^{n+1}_{x^{n-m+1}y^m} + \\ + \ldots\ldots + C^{n-1}_n \triangle^{n+1}_{xy^n} + \triangle^{n+1}_{y^{n+1}} \end{gathered}\right\}$$

отсюда, замечая, что $C^m_n + C^{m-1}_n = C^m_{n+1}$, получаем формулу:

$$\begin{gathered} \triangle^{n+1} f = \triangle^{n+1}_{x^{n+1}} + C^1_{n+1} \triangle^{n+1}_{x^n y} + C^2_{n+1} \triangle^{n+1}_{x^{n-1}y^2} + \ldots\ldots + C^m_{n+1} \triangle^{n+1}_{x^{n+1-m}y^m} + \\ + \ldots\ldots + C^n_{n+1} \triangle^{n+1}_{xy^n} + \triangle^{n+1}_{y^{n+1}}, \end{gathered}$$

которая прямо может быть получена из допущенной нами формулы для $\triangle^n f$ путем замены n на $n+1$. Так как, кроме того, для $n=1$ и $n=2$ формулы составляются именно по указанному закону, то он верен при всяком n.

Формулы служащие для нахождения последовательных полных разностей, могут быть очень просто записаны в символическом виде, не требующем особых пояснений:

$$\left.\begin{aligned} \triangle\ f(a, b) &= (\triangle_x + \triangle_y)^1 f(a, b) \\ \triangle^2 f(a, b) &= (\triangle_x + \triangle_y)^2 f(a, b) \\ \triangle^3 f(a, b) &= (\triangle_x + \triangle_y)^3 f(a, b) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \triangle^n f(a, b) &= (\triangle_x + \triangle_y)^n f(a, b) \end{aligned}\right\}$$

Эти формулы представляют полную аналогию с известными формулами для нахождения полных дифференциалов высших порядков функции двух независимых переменных с помощью ее частных дифференциалов.

6. Кроме рассмотренных нами частных и полных конечных разностей различного порядка для функции $f(x, y)$, нам необходимо ввести еще одну разность

специального вида. Именно, мы предположим, что совместные значения переменных x и y представляются в виде следующих систем:

$$(a, b),\ (a+h,\ b+k),\ (a+2h,\ b+2k), \ldots (a+nh,\ b+nk),$$

геометрически изображаемых диагональными точками параллелограмов (см. пунктирную линию предыдущего чертежа). Составим теперь разность

$$f(a+h,\ b+k) - f(a, b),$$

которую обозначим через $\delta f(a, b)$*), так что

$$\delta f(a, b) = f(a+h,\ b+k) - f(a, b), \text{ или короче; } \delta f_{0,0} = f_{1,1} - f_{0,0}$$

С помощью этой разности 1-го порядка станем составлять такие же разности высших порядков:

$$\delta^2 f(a, b) = \delta[\delta f(a, b)],\ \delta^3 f(a, b) = \delta[\delta^2 f(a, b)], \ldots,$$
$$\delta^n f(a, b) = \delta[\delta^{n-1} f(a, b).$$

Мы займемся сейчас выводом формул, дающих выражение этих разностей с помощью значений функции $f(x, y)$, а также формул, служащих для решения обратной задачи — выражения значений функции с помощью последовательных разностей указанного вида. Здесь очень удобно пользоваться сокращенными обозначениями, а именно, мы можем написать последовательно:

$$\delta f_{0,0} = f_{1,1} - f_{0,0}$$
$$\delta^2 f_{0,0} = \delta(f_{1,1} - f_{0,0}) = (f_{2,2} - f_{1,1}) - (f_{1,1} - f_{0,0}) = f_{2,2} - 2f_{1,1} + f_{0,0}$$
$$\delta^3 f_{0,0} = \delta(f_{2,2} - 2f_{1,1} + f_{0,0}) = (f_{3,3} - 2f_{2,2} + f_{1,1}) - (f_{2,2} - 2f_{1,1} + f_{0,0}) =$$
$$= f_{3,3} - 3f_{2,2} + 3f_{1,1} - f_{0,0} \text{ и т. д.}$$

Получившийся закон составления этих формул совершенно ясен, и мы могли бы, аналогично разобранному методу составления полной разности n-го порядка, показать и здесь, по методу совершенной индукции, справедливость общей формулы:

$$\delta^n f_{0,0} = f_{n,n} - C_n^1 f_{n-1,\ n-1} + C_n^2 f_{n-2,\ n-2} - \ldots + (-1)^m C_n^m f_{n-m,\ n-m} +$$
$$+ \ldots + (-1)^n f_{0,0},$$

*) Эту разность Lacroix обозначает через $\triangle f(a, b)$ и называет полною разностью.

Данное нами понятие полной разности не совпадает с определением Lacroix. Мы предпочитаем введенную нами терминологию не только в виду формул, полученных в № 5, аналогичных формулам для полных дифференциалов, но также и в виду формулы, выражающей условие, необходимое и достаточное для того, чтобы выражение $M_1(x,y) + M_2(x,y)$ было полной конечной разностью $\triangle u(x,y)$ Это условие, как нетрудно было бы убедиться, состоит в том, что должно выполняться тождество: $\triangle_y M_i(x, y) = \triangle_x M_j(x, y)$ $(i = 1,\ j = 2$ или $j = 1,\ i = 2)$.

или в раскрытом виде:

$$\delta^n f(a, b) = f(a + nh, b + nk) - C_n^1 f[a + (n-1)h, b + (n-1)k] +$$
$$+ C_n^2 f[a + (n-2)h, b + (n-2)k] + \ldots\ldots +$$
$$+ (-1)^m C_n^m f[a + (n-m)h, b + (n-m)k] + \ldots\ldots + (-1)^n f(a, b)$$

Очень удобно пользоваться символическими формулами:

$$\delta^n f_{0,0} = (f_{1,1} - 1)^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots\ldots),$$

где *оба* значка 1 при символическом возвышении в степень подчиняются известному уже нам правилу.

Теперь решим обратную задачу, а именно, покажем, как найти

$$f(a + nh, b + nk)$$

с помощью разностей $\delta, \delta^2, \ldots\ldots \delta^n$

Из равенства

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \delta f(a, b)$$

имеем прежде всего:

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \delta f(a, b).$$

откуда следует, что

$$\delta f(a + h, b + k) = \delta f(a, b) + \delta^2 f(a, b).$$

После сложения этих равенств имеем:

$$f(a + h, b + k) + \delta f(a + h, b + k) = f(a, b) + 2\delta f(a, b) + \delta^2 f(a, b),$$

иначе говоря:

$$f(a + 2h, b + 2k) = f(a, b) + 2\delta f(a, b) + \delta^2 f(a, b),$$

потому что, очевидно,

$$f(a + 2h, b + 2k) = f(a + h, b + k) + \delta f(a + h, b + k).$$

Составив затем $\delta f(a + 2h, b + 2k)$ и сложив получившееся выражение с $f(a + 2h, b + 2k)$, пришли бы к формуле:

$$f(a + 3h, b + 3k) = f(a, b) + 3\delta f(a, b) + 3\delta^2 f(a, b) + \delta^3 f(a, b),$$

но уже и предыдущие результаты заставляют предположить, что

$$f(a + nh, b + nk) = f(a, b) + C_n^1 \delta f(a, b) +$$
$$+ C_n^2 \delta^2 f(a, b) + \ldots\ldots + C_n^m \delta^m f(a, b) + \ldots\ldots + \delta^n f(a, b);$$

в том, что эта формула действительно справедлива при всяком n, легко было бы убедиться по методу перехода от n к $n+1$ с помощью равенства

$$f[a+(n+1)h,\ b+(n+1)k]=f(a+nh,\ b+nk)+\delta f(a+nh,\ b+nk).$$

Полученные нами результаты мы также запишем символически в виде:

$$f(a+nh,\ b+nk)=(1+\delta)^n f(a,\ b)$$

или, короче:

$$f_{n,n}=(1+\delta)^n f_{0,0}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ldots\ldots).$$

7. Решенная нами сейчас задача о выражении разностей $\delta^n f(a,\ b)$ с помощью значений функции и, наоборот, значений функции $f(a+nh,\ b+nk)$ с помощью последовательных разностей могла бы быть распространена и на более общий случай, когда требуется выразить частную разность $\Delta^n_{x^m y^{n-m}}\ f(a,\ b)$ с помощью значений функции или, наоборот, выразить значение функции $f(a+mh,\ b+nk)$ с помощью ее последовательных частных разностей.

Решение первого из указанных вопросов, во-первых, мало имеет значения для всего дальнейшего и, во-вторых, приводит к формулам довольно сложного вида. Поэтому мы обратимся ко второму, очень важному для нас, вопросу о выражении значения функции $f_{m,n}=f(a+mh,\ b+nk)$ с помощью ее последовательных частных разностей. Мы имели выше решение этой задачи лишь для частного случая $m=n$, и притом с помощью разностей специального вида $\delta,\ \delta^2,\ldots\delta^n\ldots$

Из случаев, когда $m\neq n$, можно указать еще два, в которых требуемые формулы получаются немедленно на основании известных теорем, относящихся к функциям одного независимого переменного. Именно, когда $n=0$, то $f_{m,0}=$ $=f(a+mh,\ b)$, когда же $m=0$, то $f_{0,n}=f(a,\ b+nk)$; в обоих случаях к $f(a+mh,\ b)$ и $f(a,\ b+nk)$ могут быть применены известные уже нам формулы, касающиеся функций одного переменного, которые и дадут решение вопроса:

$$\left.\begin{array}{r} f(a+mh,\ b)=(1+\Delta_x)^m f(a,\ b) \\ f(a,\ b+nk)=(1+\Delta_y)^n f(a,\ b) \end{array}\right\},\ \text{или}\ \left\{\begin{array}{l} f_{m,0}=(1+\Delta_x)^m f_{0,0} \\ f_{0,n}=(1+\Delta_y)^n f_{0,0} \end{array}\right.$$

Чтобы подметить закон составления $f_{m,n}$ для общего случая, мы постараемся найти $f_{2,1}$ и $f_{1,2}$, для чего придется начать с $f_{1,1}$. Так как

$$\Delta^2_{xy} f_{0,0}=\Delta_x(\Delta_y f_{0,0})=\Delta_y(\Delta_x f_{0,0}),$$

то

$$\Delta^2_{xy} f_{0,0}=\Delta_x(f_{0,1}-f_{0,0})=\Delta_y(f_{1,0}-f_{0,0}),$$

или

$$\Delta^2_{xy} f_{0,0}=f_{1,1}-f_{1,0}-f_{0,1}+f_{0,0},$$

откуда

$$f_{1,1}=f_{1,0}+f_{0,1}-f_{0,0}+\Delta^2_{xy} f_{0,0}.$$

Так как, кроме того, по определению

$$f_{1,0} - f_{0,0} = \triangle_x f_{0,0}, \quad f_{0,1} - f_{0,0} = \triangle_y f_{0,0},$$

то

$$f_{1,0} = f_{0,0} + \triangle_x f_{0,0}, \quad f_{0,1} = f_{0,0} + \triangle_y f_{0,0}$$

Вставляя эти значения в выражение для $f_{1,1}$ получим, по упрощении:

$$f_{1,1} = f_{0,0} + \triangle_x f_{0,0} + \triangle_y f_{0,0} + \triangle_{xy}{}^2 f_{0,0},$$

или еще короче в символической форме:

$$f_{\cdot,1} = (1 + \triangle_y)\,(1 + \triangle_y) f_{0,0},$$

где, по умножении двучленов обыкновенным способом, нужно к каждому члену приставить $f_{0,0}$ и рассматривать полученное произведение, как частную разность; кроме того, произведение $\triangle_x \triangle_y$ рассматривается, как $\triangle^2_{xy}$.

Можно и еще скорее прийти к найденному выражению для $f_{1,0}$, если принять во внимание, что

$$f_{1,1} - f_{1,0} = \triangle_y f_{1,0} \text{ и } f_{1,1} - f_{0,1} = \triangle_x f_{0,1},$$

т.-е.

$$f_{1,1} = f_{1,0} + \triangle_y f_{1,0} = f_{0,1} + \triangle_x f_{0,1},$$

и на основании этого писать:

$$\left.\begin{aligned} f_{1,0} &= f_{0,0} + \triangle_x f_{0,0} \\ \triangle_y f_{1,0} &= \triangle_y f_{0,0} + \triangle^2_{xy} f_{0,0} \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left\{\begin{aligned} f_{0,1} &= f_{0,0} + \triangle_y f_{0,0} \\ \triangle_x f_{0,1} &= \triangle_x f_{0,0} + \triangle^2_{xy} f_{0,0} \end{aligned}\right.$$

В обоих случаях после сложения двух равенств получим

$$f_{1,1} = f_{0,0} + \triangle_x f_{0,0} + \triangle_y f_{0,0} + \triangle^2_{xy} f_{0,0},$$

как и было найдено ранее.

Последний, более короткий, способ мы применим к нахождению значений

$$f_{2,1} = f_{1,1} + \triangle_x f_{1,1} \quad \text{и} \quad f_{1,2} = f_{1,1} + \triangle_y f_{1,1}.$$

А именно, мы можем написать

$$\left.\begin{aligned} f_{1,1} &= f_{0,0} + \triangle_x f_{0,0} + \triangle_y f_{0,0} + \triangle^2_{xy} t_{0,0} \\ \triangle_x f_{1,1} &= \phantom{f_{0,0} +{}} \triangle_x f_{0,0} + \phantom{\triangle_y f_{0,0} +{}} \triangle^2_{xy} f_{0,0} + \triangle^2_{x^2} f_{0,0} + \triangle^3_{x^2y} f_{0,0} \\ \hline f_{2,1} &= f_{0,0} + 2\triangle_x f_{0,0} + \triangle_y f_{0,0} + 2\triangle^2_{xy} f_{0,0} + \triangle^2_{x^2} f_{0,0} + \triangle^3_{x^2y} f_{0,0} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{1,1} &= f_{0,0} + \triangle_x f_{0,0} + \triangle_y f_{0,0} + \triangle^2_{xy} f_{0,0} \\ \triangle_y f_{1,1} &= \phantom{f_{0,0} + \triangle_x f_{0,0} +{}} \triangle_y j_{0,0} + \triangle^2_{xy} f_{0,0} + \triangle^2_{y^2} f_{0,0} + \triangle^3_{xy^2} f_{0,0} \\ \hline f_{1,2} &= f_{0,0} + \triangle_x f_{0,0} + 2\triangle_y f_{0,0} + 2\triangle^2_{xy} f_{0,0} + \triangle^2_{y^2} f_{0,0} + \triangle^3_{xy^2} f_{0,0} \end{aligned}\right\}.$$

Обе полученные довольно сложные формулы для $f_{2,1}$ и $f_{1,2}$ приобретают чрезвычайно простой вид, если им придать символическую форму:

$$\left.\begin{aligned} f_{2,1} &= (1+\triangle_x)^2 (1+\triangle_y) f_{0.0} \\ f_{1,2} &= (1+\triangle_x)(1+\triangle_y)_2 f_{0,0} \end{aligned}\right\}$$

В указанной сейчас форме закон настолько ясен, что позволяет нам сделать предположение, что вообще

$$f_{m,n} = (1+\triangle_x)^m (1+\triangle_y)^n f_{0,0},$$

Для доказательства того что эта формула справедлива, достаточно, очевидно убедиться в том, что, если она верна для каких-либо значений m и n, то она останется верна и при увеличении одного из этих чисел на 1. Мы проведем доказательство лишь для буквы m т.-е. проверим, что $f_{m+1,n}$ составится по тому же закону, что и $f_{m,n}$. Итак допустим, что

$$f_{m,n} = (1+\triangle_x)^m (1+\triangle_y)^n = \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=o}^{n} C_m^p C_n^q \triangle_{x^p y^q}^{p+q} = \sum_{q=}^{n} C_n^q \left\{ \sum_{p=o}^{m} C_m^p \triangle_{x^p y^q}^{p+q} \right\},$$

где для простоты $f_{0,0}$ не приписываем и, кроме того, принимаем, что

$$C_k^o = 1, \triangle_{x^o y^q}^{o+q} = \triangle_{y^q}^q, \triangle_{x^p q^o}^{p+o} = \triangle_{x^p}^p, \triangle_{x^o y^o}^{o+o} = 1, \triangle_{x^0}^0 = \triangle_{y^0}^0 = 1.$$

Тогда для нахождения

$$f_{m+1,n} = f_{m,n} + \triangle^x f_{m,n}$$

мы составим два равенства

$$f_{m,n} = \sum_{q=0}^{n} C_n^q \left\{ \triangle_{y^q}^q + C_m^1 \triangle_{xy^q}^{1+q} + C_m^2 \triangle_{x^2 y^q}^{2+q} + \ldots + C_m^{m-1} \triangle_{x^{m-1} y^q}^{m-1+q} + \triangle_{x^m y^q}^{m+q} \right\}$$

$$\triangle_x f_{m,n} = \sum_{q=0}^{n} C_n^q \left\{ \qquad \triangle_{xy^q}^{1+q} + C_m^1 \triangle_{x^2 y^q}^{2+q} + \ldots + C_m^{m-1} \triangle_{x^m y^q}^{m+q} + \triangle_{x^{m+1} y^q}^{m+1+q} \right\},$$

от сложения которых тотчас же находим:

$$f_{m+1,n} = \sum_{q=0}^{n} \left\{ \triangle_{y^q}^q + C_{m+1}^1 \triangle_{xy^q}^{1+q} + C_{m+1}^2 \triangle_{x^2 y^q}^{2+q} + \ldots + C_{m+1}^m \triangle_{x^m y^q}^{m+q} + \triangle_{x^{m+1} y^q}^{m+1+q} \right\} =$$

$$= \sum_{q=0}^{n} C_n^q \left\{ \sum_{p=0}^{m+1} C_{m+1}^p \triangle_{x^p y^q}^{p+q} \right\} = \sum_{p=0}^{m+1} \sum_{q=0}^{n} C_{m+1}^p C_n^q \triangle_{x^p y^q}^{p+q}.$$

А это и показывается ,что $f_{m+1,n}$ составляется по тому же закону, т.-е.

$$f_{m+1,n} = (1+\triangle_x)^{m+1} (1+\triangle_y)^n f_{0,0};$$

то же самое можно было бы доказать и для $f_{m,n+1}$. Итак, формула

$$f_{n,m} = (1+\triangle_x)^m (1+\triangle_y)^n f_{0,0},$$

справедлива при всяких m и n.

Мы видим отсюда, между прочим, что для нахождения $f_{m,n} = f(a + mh, b + nk)$ нам нужны частные разности до $(m + n)$-го порядка включительно, причем из разностей $(m + n)$ порядка в формулу $f_{m,n}$, войдет только $\Delta^{m+n}_{x^m y^n} f_{0,0}$.

8. Установив формулу для определения $f_{m,n}$ мы можем обнаружить интересную зависимость между разностями Δ_x, Δ_y, Δ^2_{xy} и разностью δ. Действительно, раньше мы уже имели формулу

$$f_{n,n} = (1 + \delta)^n f_{0,0}\,;$$

теперь же, полагая $m = n$ в только что найденной формуле для $f_{m,n}$, получим

$$f_{n,n} = (1 + \Delta_x)^n (1 + \Delta_y)^n f_{0,0}$$

Из сопоставления двух последних формул можно заключить, что

$$(1 + \delta)^n = (1 + \Delta_x)^n (1 + \Delta_y)^n$$

или:

$$1 + \delta = (1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) \text{ *)},$$

откуда получаем, по упрощении:

$$\delta = \Delta_x + \Delta_y + \Delta^2_{xy}$$

и

$$\delta f_{0,0} = \Delta_x f_{0,0} + \Delta_y f_{0,0} + \Delta^2_{xy} f_{0,0}. \tag{B}$$

Хотя при таком рассуждении мы все время поступали с символическими равенствами, как с обыкновенными, тем не менее, полученная сейчас зависимость действительно имеет место, в чем легко убедиться непосредственной проверкой:

$$\Delta_x f_{0,0} = f(a + h, b) - f(a, b) = f_{1,0} - f_{0,0}$$

$$\Delta_y f_{0,0} = f(a, b + k) - f(a, b) = f_{0,1} - f_{0,0}$$

$$\Delta^2_{xy} f_{0,0} = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b) = f_{1,1} - f_{1,0} - f_{0,1} + f_{0,0}$$

$$\Delta_x f_{0,0} + \Delta_y f_{0,0} + \Delta^2_{xy} f_{0,0} = f(a + h, b + k) - f(a, b) = f_{1,1} - f_{0,0}\,;$$

но в то же время, по определению, существует равенство:

$$\delta f_{0,0} = f(a + h, b + k) - f(a, b) = f_{1,1} - f_{0,0},$$

откуда и видна справедливость полученной выше формулы (B).

9. Полученные нами результаты найдут себе применение в вопросе о составлении для функции $f(x, y)$ двух независимых переменных интерполяционной формулы, аналогичной формуле Ньютона для функции одного независимого переменного.

---

*) Отсюда вытекает также новая символическая формула для разности $n^{\text{го}}$ порядка δ^n:

$$\delta^n = [(1 + \Delta x)(1 + \Delta y) - 1]^n.$$

Задача интерполирования, в случае функций одного переменного, состоит, как известно, в нахождении по данным значениям

$$f(a_1),\ f(a_2), \ldots\ldots f(a_n) \qquad \text{C)}$$

такого полинома $F(z)$, который при $z = a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ принимал бы те же самые значения (C). Затем при каком-либо $x \neq a_i$ $(i = 1,2, \ldots\ldots n)$ приближенно полагают

$$f(x) = F(x),$$

т.-е. ординату $f(x)$ заменяют ординатой $F(x)$ параболы $(n-1)^{го}$ порядка $y = F(x)$ [Полином $F(z)$, определенный с помощью n данных, является полиномом $(n-1)^{ой}$ степени].

В частности, когда даются $(n+1)$ значений

$$f(a),\ f(a+h),\ f(a+2h), \ldots\ldots f[a+(n-1)h],\ f(a+nh),$$

мы получаем интерполяционный полином Ньютона $n^{ой}$ степени, о котором уже упоминали в самом начале (№ 2).

Мы дадим сейчас более короткую и удобную символическую запись этого полинома, которая особенно будет нам полезна для распространения на случай двух независимых переменных.

Именно, мы условимся для краткости в таком символическом обозначении:

$$(z-a)(z-a-h)\ldots\ldots[z-a-(k-1)h] = (z-a)^{(k)} \qquad (k = 1,2, \ldots\ldots n).$$

Тогда известный нам интерполяционный полином Ньютона может быть написан в виде:

$$F(z) = f(a) + \frac{(z-a)^{(1)}}{h}\triangle f(a) + \frac{(z-a)^{(2)}}{2!\,h^2}\triangle^2 f(a) + \frac{(z-a)^{(3)}}{3!\,h^3}\triangle^3 f(a) + \ldots\ldots + \\ + \frac{(z-a)^{(n)}}{n!\,h^n}\triangle^n f(a).$$

Еще короче можно написать предыдущее равенство в такой символической форме:

$$F(z) = f(a) + \left(\frac{z-a}{h}\triangle\right)^{(1)} f(a) + \frac{1}{2!}\left(\frac{z-a}{h}\triangle\right)^{(2)} f(a) + \frac{1}{3!}\left(\frac{z-a}{h}\triangle\right)^{(3)} f(a) + \\ + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{z-a}{h}\triangle\right)^{(n)} f(a).$$

Если желаем сделать проверку, что при $z = a + mh$ $(m \leqslant n)$ действительно выполняется требование

$$F(a+mh) = f(a+mh),$$

то мы должны ввести еще новую символическую запись:

$$mh\,(m-1)h\ldots\ldots(m-k+1)h = (mh)^{(k)},$$

т.-е. $m(m-1)\ldots\ldots(m-k+1) = A_m^k = m^{(k)}$ $\qquad (k = 1,2,\ldots\ldots n)$,

при чем, очевидно, будем иметь

$$m^{(m)} = m! \text{ и } m^{(k)} = 0 \text{ при } k \geqq m+1.$$

При этих условиях легко получаем при $z = a + mh$:

$$F(a+mh) = f(a) + (m\triangle)^{(1)} f(a) + \frac{1}{2!}(m\triangle)^{(2)} f(a) + \ldots\ldots + \frac{1}{m!}(m\triangle)^{(m)} f(a) +$$
$$+ \frac{1}{(m+1)!}(m\triangle)^{(m+1)} f(a) + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}(m\triangle)^{(n)} f(a).$$

Все члены во второй строке, в силу замеченного выше, обратятся в нуль и мы получим:

$$F(a+mh) = f(a) + m\triangle f(a) + \frac{m(m-1)}{2!}\triangle^2 f(a) + \ldots\ldots + \triangle^m f(a) = f(a+mh).$$

Теперь обратимся к вопросу об интерполировании для случая функции $f(x, y)$ двух независимых переменных, т.-е. станем искать приближенное значение такой функции с помощью целой рациональной функции, или многочлена $F(u, v)$. Для этого, прежде всего, заметим связь между числом коэффициентов многочлена $F(u, v)$ и его степенью относительно u и v. Обозначая это число коэффициентов через N, а степень многочлена — символом (F), имеем следующие зависимости:

$$\left.\begin{array}{ll} (F) = 1; & N = 1+2 \\ (F) = 2; & N = 1+2+3 \\ (F) = 3; & N = 1+2+3+4 \\ (F) = n; & N = 1+2+\ldots\ldots+(n+1) \end{array}\right\}$$

Поэтому, для возможности определения интерполяционного многочлена $F(u, v)$ нужно для рассматриваемой функции $f(x, y)$ задавать 3, или 6, или 10, или 15,..... или $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ значений. При этих условиях особенно удобно рассматривать интерполирование через равные промежутки, т.-е. когда u и v принимают значения:

$$a \;\; a+h,\; a+2h, \ldots\ldots;\; b,\; b+k,\; b+2k, \ldots\ldots$$

Тогда для получения интерполяционного многочлена 1ой, 2ой, 3ей и т. д. степеней нужно задавать следующие значения функции $f(x, y)$:

$(F) = 1,\ N = 3;\ f_{0,0};\ f_{1,0};\ f_{0,1} \quad (1+2)$

$(F) = 2,\ N = 6;\ f_{0,0};\ f_{1,0};\ f_{0,1};\ f_{2,0};\ f_{1,1};\ f_{0,2} \quad (1+2+3)$

$(F) = 3,\ N = 10;\ f_{0,0};\ f_{1,0};\ f_{0,1};\ f_{2,0};\ f_{1,1};\ f_{0,2};\ f_{3,0};\ f_{2,1};\ f_{1,2};\ f_{0,3}$

$(1+2+3+4)$ и т. д.;

при, этом для получения многочлена $F(u, v)$ более высокой степени, нужно, не изменяя прежних данных, присоединить к ним ряд новых. В общем случае, когда функция $F(u, v)$ должна быть $n^{\text{ой}}$ степени, нужно, как мы указали, дать $N = 1 + 2 = 3 + \ldots + (n + 1)$ значений функции $f(x, y)$. Мы их напишем более подробно в следующем виде:

$$f(a, b) \qquad (1)$$

$$f(a + h, b);\ f(a, b + k) \qquad (2)$$

$$f(a + 2h, b),\ f(a + h, b + k);\ f(a, b + 2k) \qquad (3)$$

. . . .

$$f(a + nh, b),\ f[a + (n - 1)h, b + k], \ldots\ f[a + h, b + (n - 1)k],\ f(a, b + nk) \qquad (n + 1)$$

Здесь номера, поставленные нами в конце каждой строчки, в то же время совпадают с числом данных, содержащихся в этой строчке.

Присмотревшись внимательно к сокращенной символической записи интерполяционного полинома Ньютона для функции одного независимого переменного, мы очень легко прийдем к мысли, что для случая двух независимых переменных искомый многочлен $n^{\text{ой}}$ степени $f(u, v)$ будет иметь вид:

$$F(u, v) = f(a, b) + \left(\frac{u - a}{h}\triangle_x + \frac{v - b}{k}\triangle_y\right)^{(1)} f(a, b) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{u - a}{h}\triangle_x + \frac{v - b}{k}\triangle_y\right)^{(2)} f(a, b) + \ldots + $$
$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{u - a}{h}\triangle_x + \frac{v - b}{k}\triangle_y\right)^{(n)} f(a, b),$$

где при раскрытии символических обозначений нужно полагать

$$(u - a)^{(\mu)} = (u - a)(u - a - h) \ldots [u - a(\mu - 1)h],$$
$$(v - b)^{(\nu)} = (v - b)(v - b - k) \ldots [v - b - (\nu - 1)k].$$

В более подробном виде наш интерполяционный многочлен напишется так:

$$F(u, v) = f(a, b) + \left(\frac{u - a}{h}\triangle_x + \frac{v - b}{k}\triangle_y\right) f(a, b) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{(u - a)(u - a - h)}{h^2}\triangle^2_{x^2} + 2\,\frac{(u - a)(v - b)}{hk}\triangle^2_{xy} +\right.$$
$$\left. + \frac{(v - b)(v - b - k)}{k^2}\triangle^2_{y^2}\right] f(a, b) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left\{\frac{(u - a)\ldots[u - a - (n - 1)h]}{h^n}\triangle^n_{x^n} +\right.$$
$$+ C^1_n \frac{(u - a)\ldots[u - a - (n - 2)h](v - b)}{h^{n-1}k}\triangle^n_{x^{n-1}y} + \ldots +$$

$$+ C_n^1 \frac{(u-a)(v-b)\ldots\ldots[v-b-(n-2)k]}{hk^{n-1}} \triangle^n_{xy^{n-1}} +$$

$$+ \frac{(v-b)[v-b-(n-1)k]}{k^n} \triangle^n_{yn} \Big\} f(a, b).$$

Нам остается только проверить, что написанный таким образом многочлен $F(u, v)$ удовлетворяет $1+2+3\ldots\ldots+(n+1)=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ условиям:

$$F(a+\mu h, b+\nu k) = f(a+\mu h, b+\nu k),$$

где не только $o \leqslant \mu \leqslant n$, $o \leqslant \nu \leqslant n$, но еще и $o \leqslant \mu+\nu \leqslant n$, как прямо видно из таблицы данных значений функции $f(x,y)$; то же можно было бы видеть и из чертежа, на котором были бы изображены точки:

(a, b); $(a+h, b)$, $(a, b+k)$; $(a+2h, b)$, $(a+h, b+k)$, $(a, b+2k)$;$\ldots$ $(a+nh, b)$, $[a+(n-1)h, b+k]$,$\ldots\ldots$ $[a+h, b+(n-1)k]$, $(a, b+nk)$.

Для проверки указанных равенств мы станем пользоваться упрощенной символической формой интерполяционного многочлена. Мы должны, следовательно, показать, что при:

$$u = a+\mu h,\ u = b+\nu k \left(\text{или } \frac{u-a}{h}=\mu, \frac{v-b}{x}=\nu\right),$$

$$\text{где } 0 \leqslant \mu \leqslant n,\ 0 \leqslant \nu \leqslant n,\ 0 \leqslant \mu+\nu \leqslant n$$

этот многочлен приведется к

$$f(a+\mu h, b+\nu k) = f_{\mu,\nu} = (1+\triangle_x)^\mu (1+\triangle_y)^\nu f_{0,0}$$

т.-е. к сумме вида

$$\sum_{p=0}^{\mu} \sum_{q=0}^{\nu} C_\mu^p C_\nu^q \triangle^{p+q}_{x^p y^q} f^{0,0} \tag{D}$$

При этих значениях u и v интерполяционный многочлен примет вид

$$f(a, b) + (\mu\triangle_x + \nu\triangle_y)^{(1)} f(a, b) + \frac{1}{2!}(\mu\triangle_x + \nu\triangle_y)^{(2)} f(a, b) + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{1}{(\mu+\nu)!}(\mu\triangle_x + \nu\triangle_y)^{(\mu+\nu)} f(a, b), \tag{E}$$

так как все последующие биномы со степенями $(\mu+\nu+1)$, $\ldots\ldots$ (n) обратятся в нули, потому что их отдельные члены содержат произведения $\mu^{(\alpha)}\nu^{(\beta)}$, где $\alpha+\beta \geqslant \mu+\nu+1$, так что либо $\alpha \leqslant \mu$, но $\beta \geqslant \nu+1$, либо $\alpha > \mu$ (т.-е $\alpha \geqslant \mu+1$): в обоих случаях $\mu^{(\alpha)}\nu^{(\beta)} = 0$, так как один из множителей этого произведения обращается в нуль. Далее, замечая, что $\frac{\mu^{(p)}}{p!} = \frac{A_\mu^p}{p!} = C_\mu^p$, мы можем общий член в (E) представить в таком виде:

$$\frac{1}{\lambda!}(\mu\triangle_x + \nu\triangle_y)^{(\lambda)} f(a, b) = \frac{1.}{\lambda!}\Big\{\mu^{(\lambda)}\triangle^\lambda_{x\lambda} + \frac{\lambda}{1}\mu^{(\lambda-1)}\nu^{(1)}\triangle^{\lambda-1}_{x\lambda-1}\triangle_y +$$

$$+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}\mu^{(\lambda-2)}\nu^{(2)}\Delta^{\lambda-2}_{x^{\lambda-2}}\Delta^{2}_{y^2}+\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!}\mu^{(\lambda-3)}\nu^{(3)}\Delta^{\lambda-3}_{x^{\lambda-3}}\Delta^{3}_{y^3}+$$

$$+\ldots\ldots+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots\ldots(\lambda-p+1)}{p!}\mu^{(\lambda-p)}\nu^{(p)}\Delta^{\lambda-1}_{x^{\lambda-p}}\Delta^{p}_{y^p}+\ldots\ldots+$$

$$^{(\lambda)}\Delta^{\lambda}_{y^\lambda}\Big\}f(a,b)=\Big[C^{\lambda}_{\mu}\Delta^{\lambda}_{x^\lambda}+C^{\lambda-1}_{\mu}C^{1}_{\nu}\Delta^{\lambda}_{x^{\lambda-1}y}+C^{\lambda-2}_{\mu}C^{2}_{\nu}\Delta^{\lambda}_{x^{\lambda-2}y^2}+\ldots\ldots+$$

$$+C^{\lambda-p}_{\mu}C^{p}_{\nu}\Delta^{\lambda}_{x^{\lambda-p}y^p}+\ldots\ldots+C^{\lambda}_{\nu}\Delta^{\lambda}_{y^\lambda}\Big]f(a,b).$$

Здесь мы считали $\lambda<\mu+\nu$; если же $\lambda=\mu+\nu$, то последний член в (E) обратится, очевидно, в

$$C^{\mu}_{\mu}C^{\nu}_{\nu}\Delta^{\mu+\nu}_{x^\mu y^\nu}=\Delta^{\mu+\nu}_{x^\mu y^\nu},$$

ибо все другие члены суммы сведутся, к нулю: в $C^{p}_{\mu}C^{q}_{\nu}\Delta^{\mu+\nu}_{x^p y^q}$, где $p+q=\mu+\nu$ мы будем иметь либо $p<\mu$, но $q>\nu$, — тогда $C^{q}_{\nu}=0$, либо $p>\mu$, — тогда $C^{p}_{\mu}=0$.

Итак, сумма (E) составлена из членов вида $C^{p}_{\mu}C^{q}_{\nu}\Delta^{p+q}_{x^p y^q}$, где $p+q\leqq\mu+\nu$ соединенных по группам, в каждой из которых

$$p+q=\text{const}=\lambda\ (\lambda=1,2,\ldots\ldots\mu+\nu);$$

очевидно, эта сумма вполне тождественна с суммой (D), порядок членов которой не указан.

Мы видим таким образом, что, действительно, составленный нами интерполяционный многочлен F (u, v) при $u=a+\mu h$, $v=b+\nu k$ принимает теже самые значения, что и рассматриваемая функция $f(u,v)$. Поэтому его можно рассматривать, как обобщение интерполяционного полинома Ньютона на случай функции двух независимых переменных.

И подобно тому, как интерполирование с помощью формулы Ньютона состоит в том, что для значения x, не совпадающего с данными значениями $a, a+h\ldots\ldots a+nh$, пишется приближенное равенство

$$f(x)=F(x),$$

так и в случае двух независимых переменных мы могли бы для значений $x\neq a+\mu h$; $y\neq b+\nu k$ писать приближенное равенство (интерполяционную формулу):

$$f(x,y)=F(x,y),$$

где F есть составленный выше интерполяционный многочлен $n^{\text{ой}}$ степени.

11. Мы обратимся теперь к вопросу о неопределенных и определенных конечных суммах (интегралах) для функций двух независимых переменных где, как и в случае функций одного независимого переменного, найдут себе применение изученные уже нами конечные разности.

Прежде всего считаем нелишним напомнить, что для функций одного переменного неопределенная конечная сумма вводится следующим образом: если $\triangle F(x)=f(x)$, то $F(x)=\sum f(x)$. Если бы оказалось также, что и $\Phi(x)=\sum f(x)$, то, как известно, обе конечные суммы отличаются на произвольную периодическую функцию $\pi(x)$ с периодом h, т.-е. мы имеем:

$$\Phi(x)=F(x)+\pi(x), \quad \text{где } \pi(x+h)=\pi(x).$$

Поэтому общий вид неопределенной конечной суммы будет:

$$\sum f(x)=F(x)+\pi(x),$$

где $F(x)$ — одно из ее значений. Формула эта аналогична основной формуле интегрального исчисления:

$$\int f(x)\, dx=F(x)+C,$$

где $F(x)$ — одно из значений неопределенного интеграла.

Некоторую аналогию с формулами интегрального исчисления

$$\int_a^x f(x)\,dx=F(x)-F(a)=[F(z)]_a^x, \qquad \int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=[F(x)]_a^b$$

можно усмотреть в получении определенной конечной суммы. А именно, если $F(x)$ и $\Phi(x)$ любые две неопределенные конечные суммы для одной и той же функции $f(x)$, то, как известно,

$$F(a+mh)-F(a+nh)=\Phi(a+mh)-\Phi(a+nh),$$

или, короче: $$[F(x)]_{a+nh}^{a+mh}=[\Phi(x)]_{a+nh}^{a+mh},$$

и обе эти разности представляют конечную определенную сумму, а именно:

$$F(a+mh)-F(a+nh)=\sum_{a+nh}^{a+mh} f(x),$$

причем эта последняя сумма имеет вид:

$$\sum_{a+nh}^{a+mh} f(x)=f(a+nh)+f[a+(n+1)h]+\ldots\ldots+f[a+(m-1)h].$$

[Последнее равенство обычно выводится как следствие из таких соотношений:

1. $$\sum_{a+nh}^{a+(n+1)h} f(x)=F[a+(n+1)h]-F(a+nh)=\triangle F(a+nh)=f(a+nh),$$

2. $$\sum_{a+nh}^{a+mh} f(x) = \sum_{a+nh}^{a+kh} f(x) + \sum_{a+kh}^{a+mh} f(x) \text{ *)}, \text{ в частности}$$

3. $$\sum_{a+nh}^{a+mh} = \sum_{a+nh}^{a+(n+1)h} + \sum_{a+(n+1)h}^{a+(n+2)h} + \ldots\ldots + \sum_{a+(m-1)h}^{a+mh} \Big].$$

12. Желая теперь провести аналогичные рассуждения и построения для функций двух независимых переменных, мы должны будем прийти к конечным неопределенным и определенным **двойным** суммам, а потому необходимо предварительно остановиться на неопределенных и определенных двойных интегралах.

Условимся определять двойной неопределенный интеграл следующим образом:

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = F(x, y), \quad \text{если} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

или — что все равно — $d^2_{xy}\, F(x, y) = f(x, y)\, dx\, dy$.

Мы видим, что двойной неопределенный интеграл есть такая функция, второй частный дифференциал которой, взятый по x и по y, равен подынтегральному дифференциалу.

Если $F(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ суть два каких-либо значения двойного интеграла $\iint (x, y)\, dx\, dy$, то между ними легко установить следующую зависимость:

$$\Phi(x, y) = F(x, y) + \varphi_1(x) + \varphi_2(y),$$

где φ_1 и φ_2 — совершенно произвольные функции своих аргументов. Действительно, мы прежде всего имеем:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

откуда сейчас же следует, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \Pi(x),$$

де $\Pi(x)$ — произвольная функция. Отсюда далее выводим:

$$\Phi(x, y) = F(x, y) + \int \Pi(x)\, dx + \varphi_2(y) = F(x, y) + \varphi_1(x) + \varphi_2(y),$$

где $\varphi_2(y)$ и $\varphi_1(x)$ (как интеграл от произвольной функции) суть две произвольные функции.

Станем теперь под символом $\int_a^x \int_c^y f(x, y)\, dx\, dy$ понимать такой двойной

---

*) Свойство это аналогично известному свойству определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

интеграл, который обращался бы в нуль $x = a$ или при $y = c$, а, следовательно, и тогда, когда одновременно $x = a$, $y = c$. Тогда основное соотношение

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = F(x, y) + \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$$

дает нам три новых равенства:

$$\left.\begin{array}{l} F(a, y) + \varphi_1(a) + \varphi_2(y) = 0 \\ F(x, c) + \varphi_1(x) + \varphi_2(c) = 0 \\ F(a, c) + \varphi_1(a) + \varphi_2(c) = 0 \end{array}\right\},$$

откуда нетрудно заключить, что

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(y) = -F(a, y) - F(x, c) + F(a, c),$$

и, следовательно:

$$\int_a^x \int_c^y f(x, y)\, dx\, dy = F(x, y) - F(a, y) - F(x, c) + F(a, c).$$

Условимся для краткости полагать:

$$F(x, y) - F(a, y) - F(x, c) + F(a, c) = [F(u, v)]_{a,c}^{x,y};$$

тогда мы сможем полученный выше результат написать в виде:

$$\int_a^x \int_c^y f(x, y)\, dx\, dy = [F(u, v)]_{a,c}^{x,y}.$$

В частности, может случиться, что мы полагаем $x = b$, $y = d$; тогда получим формулу для вычисления двойного определенного интеграла с постоянными пределами:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy = [F(x, y)]_{a,c}^{b,d}:$$

При этом, не нужно забывать, что в этой формуле, как и в предыдущей $F(x, y)$ означает л ю б о й из двойных неопределенных интегралов, т.-е. л ю б у ю функцию, для которой тождественно $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y)$, потому что

$$[\varphi_1(x) + \varphi_2(y)]_{a,\ c}^{b,\ d} =$$

$$= \varphi_1(b) + \varphi_2(d) - \varphi_1(a) - \varphi_2(d) - \varphi_1(b) - \varphi_2(c) + \varphi_1(a) + \varphi_2(c) \equiv 0.$$

13. Применение формулы

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

позволяет иногда очень быстро вычислять двойной определенный интеграл, когда легко находится соответствующий неопределенный интеграл, как, например:

$$1^\circ. \qquad \int_a^b\int_c^d e^{xy}(xy+1)\,dx\,dy = \left[e^{xy}\right]_{a,c}^{b,d} = e^{bd} - e^{ad} - e^{bc} + e^{ac}.$$

$$2^\circ. \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\,dx\,dy = \Big[-\sin(x+y)\Big]_{0,0}^{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\sin\pi + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 2.$$

Иногда нахождение двойного неопределенного интеграла может быть удобно выполнено с помощью формулы интегрирования по частям. Для вывода ее заметим, что, если u и v суть некоторые функции от x и y, то,

$$d_x(uv) = (u'_x v + uv'_x)\,dx = vd_xu + ud_xv,$$

$$d^2_{xy}(uv) = (u''_{xy}v + u'_x v'_y + u'_y v'_x + uv''_{xy})\,dx\,dy = vd^2_{xy}u +$$

$$+ d_xud_yv + d_yud_xv + ud^2_{xy}v.$$

Отсюда и получается формула интегрирования по частям в виде:

$$\iint ud^2_{xy}v = uv - \iint vd^2_{xy}u - \iint d_xud_yv - \iint d_yud_xv;$$

она особенно упрощается, если u есть функция только одного из двух переменных x и y, именно, тогда:

$$\iint ud^2_{xy}v = uv - \iint d_xud_yv \qquad [u = u(x)]$$

$$\iint ud^2_{xy}v = uv - \iint d_yud_xv \qquad [u = u(y)]$$

Так, например:

$$\iint x^2\sin(x+y)\,dx\,dy = -x^2\sin(x+y) + 2\iint x\cos(x+y)\,dx\,dy =$$

$$= -x^2\sin(x+y) - 2x\cos(x+y) - 2\iint \sin(x+y)\,dx\,dy =$$

$$= (2 - x^2)\sin(x+y) - 2x\cos(x+y).$$

Едва ли нужно прибавлять, что этот интеграл можно было бы найти без формулы интегрирования по частям, раскрыв предварительно $\sin(x+y)$, но такой способ оказался бы значительно сложнее.

14. Теперь мы можем установить понятие о двойных конечных суммах неопределенных и определенных. Если функции $f(x, y)$ и $F(x, y)$ связаны зависимостью

$$\triangle^2_{xy} F(x, y) = f(x, y),$$

то мы, по аналогии со случаем функций одного независимого переменного, будем писать:

$$F(x, y) = \sum\sum f(x, y)$$

и называть $F(x, y)$ двойной непределенной конечной суммой (или интегралом) по отношению к функции $f(x, y)$; знак **двойного** суммирования найдет себе оправдание, как будет дальше выяснено.

Если бы, кроме функции $F(x, y)$, нашлась еще другая функция $\Phi(x, y)$, удовлетворяющая тому же самому условию

$$\Delta^2_{xy} \Phi(x, y) = f(x, y), \text{ т.-е. } \Phi(x, y) = \sum\sum f(x, y),$$

то, как мы сейчас покажем, такие две неопределенные двойные суммы будут связаны друг с другом зависимостью следующего вида:

$$\Phi(x, y) = F(x, y) + \pi'_{(x)}(x, y) + \pi''_{(y)}(x, y),$$

где π' и π'' — две произвольные периодические функции, первая — относительно x с периодом h, а вторая — относительно y с периодом κ, т.-е.

$$\pi'_{(x)}(x+h, y) = \pi'_{(x)}(x, y), \quad \pi''_{(y)}(x, y+\kappa) = \pi''_{(y)}(x, y);$$

мы ставим у этих функций внизу значки (x) и (y) для напоминания о том по какому именно переменному они периодичны.

Чтобы вывести указанную нами зависимость, заметим прежде всего, что

$$\triangle^2_{xy} \Phi(x, y) = \triangle^2_{xy} F(x, y) = f(x, y),$$

следовательно, если обозначить $\Phi - F = \varphi$, то будем иметь:

$$\triangle^2_{xy} (\Phi - F) = \triangle^2_{xy} \varphi(x, y) = 0 \quad \text{или} \quad \triangle_x [\triangle_y \varphi(x, y)] = 0,$$

откуда заключаем, что

$$\triangle_y \varphi(x, y) = \Pi_{(x)}(x, y), \text{ где } \Pi_{(x)}(x+h, y) = \Pi_{(x)}(x, y).$$

Отсюда, производя неопределенное суммирование по букве y, очевидно получим:

$$\varphi(x, y) = \sum_{(y)} \Pi_{(x)}(x, y) + \pi''_{(y)}(x, y), \text{ где } \pi''_{(y)}(x, y+\kappa) = \pi''_{(y)}(x, y);$$

а так как первое слагаемое, т.-е. $\sum\limits_{(y)} \Pi_{(x)}(x, y)$ останется периодической функцией относительно переменного x с периодом h, то, обозначая эту периодическую функцию через $\pi_{(x)}(x, y)$, мы и получим

$$\Phi(x, y) - F(x, y) = \varphi(x, y) = \pi'_{(x)}(x, y) + \pi''_{(y)}(x, y), \text{ или}$$
$$\Phi(x, y) = F(x, y) + \pi'_{(x)}(x, y) + \pi''_{(y)}(x, y).$$

Установив это основно соотношение, нетрудно показать затем, что

$$[F(x,y)]_{a+\mu h,\, b+\nu k}^{a+mh,\, b+nk} = [\Phi(x,y)]_{a+\mu h,\, b+\nu k}^{a+mh,\, b+nk}, \qquad (F)$$

где указанные знаки подстановки имеют тот же смысл, что и для двойных определенных интегралов. Для этого, очевидно, достаточно убедиться в том, что применение тех же подстановок к функции $\pi'_{(x)} + \pi''_{(y)}$ даст в результате нуль. И, действительно, благодаря известной уже нам периодичности этих функций мы будем иметь при любых x и y:

$$\pi'_{(x)}(a+mh,y) = \pi'_{(x)}(a+\mu h,y),\quad \pi''_{(y)}(x,b+n\kappa) = \pi''_{(y)}(x,b+\nu\kappa),$$

а потому можем написать:

$$[\pi'_{(x)}(x,y) + \pi''_{(y)}(x,y)]_{a+\mu h,\, b+\nu k}^{a+mh,\, b+nk} = \pi'_{(x)}(a+mh,b+nk) +$$
$$+\pi''_{(y)}(a+mh,b+nk) - \pi'_{(x)}(a+\mu h\, b+nk) - \pi''_{(y)}(a+\mu h,b+nk) -$$
$$-\pi'_{(x)}(a+mh,b+\nu k) - \pi''_{(y)}(a+mh,b+\nu k) + \pi'_{(x)}(a+\mu h,b+\nu k) +$$
$$+\pi''_{(y)}(a+\mu h,b+\nu k) \equiv 0.$$

Итак, действительно, подтверждается справедливость равенства (F), которое в подробном виде, но с применением знакомых нам сокращенных обозначений, может быть написано так:

$$F_{m,n} - F_{\mu,n} - F_{m,\nu} + F_{\mu,\nu} = \Phi_{m,n} - \Phi_{\mu,n} - \Phi_{m,\nu} + \Phi_{\mu,\nu}.$$

Полученное таким образом выражение мы назовем двойной определенной конечной суммой (или интегралом) от функции $f(x,y)$ в пределах $(a+\mu h, a+mh)$ для x и в пределах $(b+\nu k, b+nk)$ для y, и введем такое обозначение:

$$[F(x,y)]_{a+\mu h,\, b+\nu k}^{a+mh,\, b+nk} = F_{m,n} - F_{\mu,n} - F_{m,\nu} + F_{\mu,\nu} = \sum_{a+\mu h}^{a+mh}\ \sum_{b+\nu k}^{b+nk} f(x,y),$$

где первый слева знак суммы относится к переменному x, а второй — к y.

Вместе с тем мы докажем, что имеет место равенство:

$$\sum_{a+\mu h}^{a+mh}\ \sum_{b+\nu k}^{b+nk} f(x,y) = \sum_{a+\mu h}^{a+mh} \left\{ \sum_{b+\nu k}^{b+nk} f(x,y) \right\} =$$
$$= \sum_{a+\mu h}^{a+mh} \left\{ f_{x,\nu} + f_{x,\nu+1} + \ldots\ldots + f_{x,n-1} \right\} =$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} \quad f_{\mu,\nu} + f_{\mu,\nu+1} + \ldots\ldots + f_{\mu,n-1} + \\ + f_{\mu+1,\nu} + f_{\mu+1,\nu+1} + \ldots\ldots + f_{\mu+1,n-1} + \\ + \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . + \\ + f_{m-1,\nu} + f_{m-1,\nu+1} + \ldots\ldots + f_{m-1,n-1}, \end{array} \right.$$

т.-е. что мы здесь имеем действительно *двойную* сумму. Применим для этого рассуждения, являющиеся обобщением тех, которые прилагаются к функциям одного независимого переменного, и схему которых мы приводили выше (№11).

1°. Во-первых, равенство,

$$F_{m,n} - F_{\mu,n} - F_{m,\nu} + F_{\mu,\nu} = \sum_{a+\mu h}^{a+mh} \sum_{b+\nu k}^{b+nk} f(x, y)$$

при $m = \mu + 1$ и $n = \nu + 1$ принимает следующий вид:

$$F[a + (\mu + 1)h,\ b + (\nu + 1)k] - F[a + \mu h,\ b + (\nu + 1)k] -$$

$$- F[a + (\mu + 1)h,\ b + \nu k] + F(a + \mu h,\ b + \nu k) = \sum_{a+\mu h}^{a+(\mu+1)h} \sum_{b+\nu k}^{b+(\nu+1)k} f(x, y).$$

Но левая часть полученного равенства, очевидно, выражает собою $\Delta_{xy}^2 F(a + \mu h, b + \nu k)$, иначе говоря, равна $f(a + \mu h, b + \nu k)$ — на основании зависимости между функциями $F(x, y)$ и $f(x, y)$. Таким образом, имеем основное соотношение:

$$\sum_{a+\mu h}^{a+(\mu+1)} \sum_{b+\nu k}^{b+(\nu+1)k} f(x, y) = \Delta_{xy}^2 F(a + \mu h, b + \nu k) = f(a + \mu h, b + \nu k).$$

2°. Во-вторых, по аналогии с легко доказываемым свойством двойного определенного интеграла (см. рис. 2)

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta = \int_a^A \int_b^B + \int_a^A \int_B^\beta + \int_A^\alpha \int_b^B + \int_A^\alpha \int_B^\beta$$

можно обнаружить такое же свойство двойных определенных сумм:

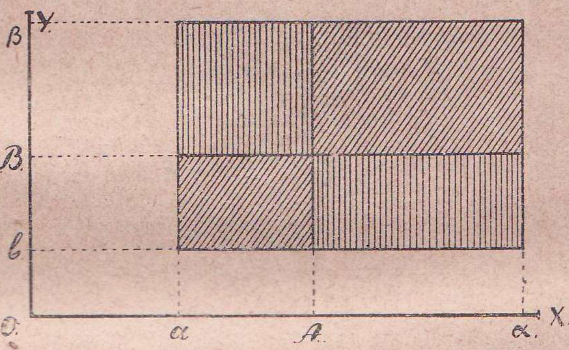


Рис. 2

$$\sum_{\mu h}^{mh} \sum_{\nu k}^{nk} = \sum_{\mu h}^{Mh} \sum_{\nu k}^{Nk} + \sum_{\mu h}^{Mh} \sum_{Nk}^{nk} + \sum_{Mh}^{mh} \sum_{\nu k}^{Nk} + \sum_{Mh}^{mh} \sum_{Nk}^{nk} \tag{G}$$

(для краткости вместо $a + \mu h$, $b + \nu k$ и т. д. написано просто μh, νk и т. д.). Чтобы в этом убедиться, достаточно заменить все двойные определенные суммы их выражениями с помощью неопределенной суммы, т.-е. функции $F(x, y)$:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{\mu h}^{Mh} \sum_{\nu k}^{Nk} &= F_{M,N} - F_{\mu,N} - F_{M,\nu} + \underline{F_{\mu,\nu}} \\
\sum_{\mu h}^{Mh} \sum_{Nk}^{nk} &= F_{M,n} - \underline{F_{\mu,n}} - F_{M,N} + F_{\mu,N} \\
\sum_{Mh}^{mh} \sum_{\nu k}^{Nk} &= F_{m,n} - F_{M,N} - \underline{F_{m,\nu}} + F_{M,\nu} \\
\sum_{Mh}^{mh} \sum_{Nk}^{nk} &= \underline{F_{m,n}} - F_{M,n} - F_{m,N} - F_{M,N}
\end{aligned}\right\};$$

от сложения правых частей у нас получатся лишь четыре подчеркнутых члена:

$$F_{m,n} - F_{\mu,n} - F_{m,\nu} + F_{\mu,\nu} = \sum_{\mu h}^{mh}\sum_{\nu k}^{nk},$$ что и доказывает формулу (G)

В частности, могло бы оказаться, что $N = n$ или $M = m$; тогда получились бы более простые формулы:

$$\sum_{\mu h}^{mh}\sum_{\nu k}^{nk} = \sum_{\mu h}^{Mh}\sum_{\nu k}^{nk} + \sum_{Mh}^{mh}\sum_{\nu k}^{nk}, \quad \sum_{\mu h}^{mh}\sum_{\nu k}^{nk} = \sum_{\mu h}^{mh}\sum_{\nu k}^{Nk} + \sum_{\mu h}^{mh}\sum_{Nk}^{nk}.$$

3°. Наконец, в-третьих, пользуясь всеми только что доказанными положениями и вводя для сумм еще более сокращенные обозначения: $\sum\limits_{\mu}^{m}\sum\limits_{\nu}^{n}$ и т. п., мы можем написать:

$$\sum_{a+\mu h}^{a+mh}\sum_{b+\nu k}^{b+nk} = \sum_{\mu}^{m}\sum_{\nu}^{n} = \sum_{\mu}^{m}\sum_{\nu}^{\nu+1} + \sum_{\mu}^{m}\sum_{\nu+1}^{\nu+2} + \cdots + \sum_{\mu}^{m}\sum_{n-1}^{n} =$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \sum\limits_{\mu}^{\mu+1}\sum\limits_{\nu}^{\nu+1} + \sum\limits_{\mu+1}^{\mu+2}\sum\limits_{\nu}^{\nu+1} + \cdots + \sum\limits_{m-1}^{m}\sum\limits_{\nu}^{\nu+1} + \\ + \sum\limits_{\mu}^{\mu+1}\sum\limits_{\nu+1}^{\nu+2} + \sum\limits_{\mu+1}^{\mu+2}\sum\limits_{\nu+1}^{\nu+2} + \cdots + \sum\limits_{m-1}^{m}\sum\limits_{\nu+1}^{\nu+2} + \\ + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot + \\ + \sum\limits_{\mu}^{\mu+1}\sum\limits_{n-1}^{n} + \sum\limits_{\mu+1}^{\mu+2}\sum\limits_{n-1}^{n} + \cdots + \sum\limits_{m-1}^{m}\sum\limits_{n-1}^{n} + \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{c} + f_{\mu,\nu} + f_{\mu+1,\nu} + \cdots + f_{m-1,\nu} + \\ + f_{\mu,\nu+1} + f_{\mu+1,\nu+1} + \cdots + f_{m-1,\nu+1} + \\ + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot + \\ f_{\mu,n-1} + f_{\mu+1,n-1} + \cdots + f_{m-1,n-1} \end{array}\right\},$$

что и желали доказать.

15. Чтобы на примере показать, как можно находить двойные определенные суммы с помощью неопределенных, обратим внимание на следующие весьма простые равенства, легко получаемые на основании известных правил отыскания конечных разностей некоторых функций одного независимого переменного:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle_x \sin(x+y) = 2\sin\dfrac{h}{2}\cos\left(x+y+\dfrac{h}{2}\right) \\ \triangle_{xy}^2 \sin(x+y) = -4\sin\dfrac{h}{2}\sin\dfrac{k}{2}\sin\left(x+y+\dfrac{h+k}{2}\right) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \triangle_x \cos(x+y) = -2\sin\dfrac{h}{2}\sin\left(x+y+\dfrac{h}{2}\right) \\ \triangle_{xy}^2 \cos(x+y) = -4\sin\dfrac{h}{2}\sin\dfrac{k}{2}\cos\left(x+y+\dfrac{h+k}{2}\right) \end{array}\right\}$$

Отсюда легко вывести и такие следствия:

$$\left.\begin{aligned}\sum\sum \sin(x+y) &= \frac{\sin\left(x+y-\frac{h+k}{2}\right)}{-4\sin\frac{h}{2}\sin\frac{k}{2}}\\ \sum\sum \cos(x+y) &= \frac{\cos\left(x+y-\frac{h+k}{2}\right)}{-4\sin\frac{h}{2}\sin\frac{k}{2}}\end{aligned}\right\}$$

Предположим теперь, что требуется найти двойную сумму для $\sin(x+y)$ либо $\cos(x+y)$ соответственно следующим значениям аргумента $x+y$:

$$\left.\begin{matrix}2\alpha+2\beta, & 4\alpha+2\beta, \ldots\ldots 2m\alpha+2\beta\\ 2\alpha+4\beta, & 4\alpha+4\beta, \ldots\ldots 2m\alpha+4\beta\\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ 2\alpha+2n\beta, & 4\alpha+2n\beta, \ldots\ldots 2m\alpha+2n\beta\end{matrix}\right\}$$

(пусть в каждом двучлене первое и второе слагаемые соответствуют переменным x и y). Мы видим, что в наших общих формулах суммирования нужно для данного случая принять:

$$a=2\alpha,\ b=2\beta;\ h=2\alpha,\ k=2\beta.\ \frac{h+k}{2}=\alpha+\beta.$$

Применяя формулу перехода от неопределенных двойных сумм к определенным, мы получаем:

$$\sum_{2\alpha}^{2(m+1)\alpha}\sum_{2\beta}^{2(n+1)\beta}\sin(x+y)=\left[-\frac{\sin(x+y-\alpha-\beta)}{4\sin\alpha\sin\beta}\right]_{2\alpha,\ 2\beta}^{2(m+1)\alpha,\ 2(n+1)\beta}=$$

$$=\frac{-1}{4\sin\alpha\sin\beta}\{\sin[(2m+1)\alpha+(2n+1)\beta]-\sin[\alpha+(2n+2)\beta]-\sin[(2m+1)\alpha+\beta]+\sin(\alpha+\beta)\}=$$

$$=-\frac{-1}{4\sin\alpha\sin\beta}\{2\sin[(m+1)\alpha+(n+1)\beta]\cos(m\alpha+n\beta)-2\sin[(m+1)\alpha+(n+1)\beta]\cos(m\alpha+n\beta)\},\ \text{т.е.}$$

$$\sum_{2\alpha}^{2(m+1)\alpha}\sum_{2\beta}^{2(n+1)\beta}\sin(x+y)=\frac{\sin[(m+1)\alpha+(n+1)\beta]\sin m\alpha\sin n\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Совершенно так же нашли бы, что

$$\sum_{2\alpha}^{2(m+1)\alpha}\sum_{2\beta}^{2(n+1)\beta}\cos(x+y)=\frac{\cos[(m+1)\alpha+(n+1)\beta]\sin m\alpha\sin n\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Огсюда получили бы, например, при $m=3$, $n=2$ следующие суммы:

$$\left.\begin{aligned}&\sin(2\alpha+2\beta)+\sin(4\alpha+2\beta)+\sin(6\alpha+2\beta)+\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(4\alpha+4\beta)+\\&\qquad+\sin(6\alpha+4\beta)=\frac{\sin(4\alpha+3\beta)\sin 3\alpha \sin 2\beta}{\sin\alpha\ \sin\beta}\\&\cos(2\alpha+2\beta)+\cos(4\alpha+2\beta)+\cos(6\alpha+2\beta)+\cos(2\alpha+4\beta)+\cos(4\alpha+4\beta)+\\&\qquad+\cos(6\alpha+4\beta)=\frac{\cos(4\alpha+3\beta)\sin 3\alpha \sin 2\beta}{\sin\alpha\ \sin\beta}\end{aligned}\right\}$$

Если еще принять здесь $\beta=\alpha$, то тогда

$$\left.\begin{aligned}\sin 4\alpha+2\beta\sin 6\alpha+2\beta\sin 8\alpha+\sin 10\alpha&=\frac{\sin 7\alpha\ \sin 3\alpha\ \sin 2\alpha}{\sin^2\alpha}\\ \cos 4\alpha+2\cos 6\alpha+2\cos 8\alpha+\cos 10\alpha&=\frac{\cos 7\alpha\ \sin 3\alpha\ \sin 2\alpha}{\sin^2\alpha}\end{aligned}\right\}$$

Справедливость всех таких равенств, конечно, можно было бы проверить элементарным путем, с помощью тригонометрии, но это потребовало бы довольно сложных выкладок.

M. Marczewsky. Sur les différences finies des fonctions de deux variables indépendantes.

Resumé.

Dans cette Note je considère les notions des différences partielles et complètes (ces dernières — en sens un peu différent de celui de S. F. Lacroix) des fonctions de deux variables indépendantes, puis je donne la formule d'interpolation (analogue à celle de Newton) qu'on peut présenter sous la forme la plus condensée (N⁰ 10):

$$f(x,y)=f(a,b)+\left(\frac{x-a}{h}\triangle_x+\frac{y-b}{k}\triangle_y\right)^{(1)}f(a,b)+$$
$$\frac{1}{2!}\left(\frac{x-a}{h}\triangle_x+\frac{y-b}{k}\triangle_y\right)^{(2)}f(a,b)+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{x-a}{h}\triangle_x+\frac{x-b}{k}\triangle_y\right)^{(n)}f(a,b).$$

Enfin je passe au procédé inverse à la differentiation finie, c'est à dire à l'intégration finie des fonctions de deux variables indépendantes (N⁰ 14 — 15).

J'introduis une somme double finie en ecrivant

$$F(x,y)=\sum\sum f(x,y),\qquad \text{si l'on a } \triangle^2_{xy}F(x,y)=f(x,y).$$

Le signe de la double sommation se trouve justifié dans la suite, quand on passe à la somme double définie. Il demontre la formule (№ 14)

$$\begin{aligned}\sum_{a+\mu h}^{a+mk}\ \sum_{b+\nu k}^{b+nk} f(x,y)&=(f_{\mu,\nu}+f_{\mu,\nu+1}+\ldots\ldots+f_{\mu,n-1})+\\&(f_{\mu+1,\nu}+f_{\mu+1,\nu+1}+\ldots\ldots+f_{\mu+1,n-1})+\ldots\ldots+\\&+(f_{m-1,\nu}+f_{m-1,\nu+1}+\ldots\ldots+f_{m-1,n-1}),\end{aligned}$$

où F désigne la somme double indéfinie correspondante à f. A l'aide de cette relation fondamentale on peut parfois trouver effectivement quelques sommes doubles, dont on trouve des exepmles dans № 15.

Classe du système d'équations de Pfaff.

C. Russyan

La classe du système d'équations de Pfaff

$$\omega_i = \sum_1^p {}_s X_{is}\, dx_s = 0 \quad i = 1 \ldots m \tag{1}$$

est le nombre minimum de variables $y_1 \ldots y_p$ restant après la transformation

$$x_s = \varphi_s\,(y_1 \ldots y_p) \quad s = 1 \ldots p$$

dans le système donné, ou dans le système équivalent convenablement choisis.

Je vais déterminer ce nombre par la méthode dirècte et simple sans considération des él'éments caractéristiques du système (1) et des covariants bilinéaires introduits par Lipschitz *) et si usités dans la théorie du problème de Pfaff.

Si

$$x_s = \varphi_s\,(y_1 \ldots y_p) \quad s = 1 \ldots p$$

sont formules de la transformation des variables $x_1 \ldots x_p$, après laquelle les variables $y_q \ldots y_p$ disparaissent dans le système de Pfaff équivalent

$$\overline{\omega}_i = \sum_1^m {}_k \lambda_{ik}\, \omega_k = 0 \qquad i = 1 \ldots m$$

$$(\sum \pm \lambda_{11} \ldots \lambda_{mm} \gtreqless 0)$$

la forme de Pfaff

$$\Omega = t_1\, \omega_1 + \ldots t_m\, \omega_m$$

où $t_1 \ldots t_m$, $x_1 \ldots x_p$ sont les variables indépendantes, ne contient pas de $y_q \ldots y^p$ après la transformation

$$t_k = \sum_1^m {}_i \lambda_{ik}\, T_i, \quad x_s = \varphi_s(y^1 \ldots y_p) \quad s = 1 \ldots p, \quad k = 1 \ldots m$$

*) J. Crelle, Bd LXX.

des variables $t_1 \dots t_k$, $x_1 \dots x_p$, car elle obtient la forme

$$\Omega = T_1 \overline{\omega}_1 + \dots + T_m \overline{\omega}_m.$$

Inversement, si cette forme de Pfaff, ayant après la transformation

$$t_k = \sum_1^m {}_i T_i \lambda_{ik} \quad (\Sigma \pm \lambda_{11} \dots \lambda_{mm} \gtrless 0) \quad \kappa = 1 \dots m$$

$$x_s = \varphi_s (y_1 \dots y_p) \quad s = 1 \dots p$$

a forme

$$\Omega = T_1 \overline{\omega}_1 + \dots + T_m \overline{\omega}_m$$

où $\overline{\omega}_i = \sum_1^m {}_k \lambda_{ik} \omega_k \quad i - 1 \dots m$ ne contient pas après cette transformation de variables $y_q \dots y_p$, le système de Pfaff

$$\overline{\omega}_i = \sum_1^m {}_k \lambda_{ik} \omega_k = 0 \quad i = 1 \dots m$$

équivalent au système donné (I) ne contient pas après la transformation

$$x_s = \varphi_s (y_1 \dots y_p) \quad s = 1 \dots p$$

de — mêmes variables.

La condition donc nécéssaire et suffisante, pour que le système de Pfaff

$$\overline{\omega}_i = \sum_1^m {}_k \lambda_{ik} \omega_k = 0 \, i = 1 \dots m$$

équivalent au système donné (I) ne contienne pas de variables $y_q \dots y_p$ aprés la transformation

$$x_s = \varphi_s (y_1 \dots y_p) \quad s = 1 \dots p$$

est que la forme de Pfaff

$$\Omega = t_1 \omega_1 + \dots + t_m \omega_m$$

ne contienne pas de mêmes variables après la transformation

$$t_k = \sum_1^m {}_i T_i \lambda_{ik} \quad \kappa = 1 \dots m$$

$$x_s = \varphi_s (y_1 \dots y_p) \quad s = 1 \dots p.$$

Il est connu de la théorie du problème de Pfaff, que la condition nécéssaire et suffisante pour que la forme de Pfaff quelconque

$$\omega = \sum_1^p {}_s X_s \, dx_s$$

ne contienne pas de variables $y_q \ldots y_p$ après la transformation

$$x_s = f_s(y_1 \ldots y_p) \quad s = 1 \ldots p$$

est que les fonctions f_s $s = 1 \ldots p$ satisfassent aux équations différentielles

$$\omega = \sum_1^p{}_s X_s \, dx_s = 0$$

$$(1s)\, dx_1 + \ldots + (ps)\, dx_p = 0 \quad s = 1 \ldots p \tag{a}$$

où

$$(ks) = \frac{\partial X_k}{\partial x_s} - \frac{\partial X_s}{\partial x_k} \quad k, s = 1 \ldots p,$$

les différentielles $dx_1 \ldots dx_p$ étant prises par rapport aux $y_q \ldots y_p$. Ces équations (a) sont covariants de la forme de Pfaff ω relativement à tout changement des variables $x_1 \ldots x_p$.

Le système (a) a pour la forme de Pfaff Ω la forme

$$\Omega = t_1 \omega_1 + \ldots + t_m \omega_m = 0,$$

$$\omega_1 = 0, \ldots \omega_m = 0,$$

$$-X_{11}\, dt_1 - \ldots - X_{m1}\, dt_m + \sum_1^m{}_i t_i (11)_i dx_1 + \ldots + \sum_1^m{}_i t_i (p1)_i \, dx_p = 0$$

. . . .

$$-X_{1p}\, dt_1 - \ldots - X_{mp}\, dt_m + \sum_1^m{}_i t_i (1p)_i \, dx_1 + \ldots + \sum_1^m{}_i t_i (pp)_i \, dx_p = 0$$

oú

$$(k, s)_i = \frac{\partial X_{ik}}{\partial x_s} - \frac{\partial X_{is}}{\partial x_k} \quad i = 1 \ldots m, \quad k, s = 1 \ldots p.$$

La première de ces équations est conséquence des autres, de sorte que nous n'avons à considerér que les équations

$$\omega_1 = 0, \ldots \quad \omega_m = 0$$

$$-X_{11}\, dt_1 - \ldots - X_{m1}\, dt_m + \sum_1^m{}_i t_i (11)_i dx_1 + \ldots + \sum_1^m{}_i t_i (p1)_i \, dx_p = 0$$

. . . . (b)

$$-X_{1p}\, dt_1 - \ldots - X_{mp}\, dt_m + \sum_1^m{}_i t_i (1p)_i \, dx_1 + \ldots + \sum_1^m{}_i t_i (pp)_i \, dx_p = 0$$

Elles sont covariants de la forme de Pfaff Ω relativement á tout changement des variables $t_1 \dots t_m \quad x_1 \dots x_p$. Le changement des variables de la forme

$$t_k = \sum_1^m {}^i T_i \mu_{ik}, \quad x_s = \Theta_s (y_1 \dots y_p) \quad s = 1 \dots p, \quad k = 1 \dots m$$

laisse en outre invariable la forme de l'expdréssion différentielle Ω et celle des équations (b). Comme les équations (I) sont indépendantes et si p. ex.

$$\triangle = \sum \pm X_{11} \dots X_{mm} \gtreqless 0$$

on peut représenter les equations (b) sous la forme

$$\omega_1 = 0_1 \dots \quad \omega_m = 0$$

$$- X_{11}\, dt_1 - \dots - X_{m1}\, dt_m + \sum_1^m {}^i t_i (11)_i\, dx_1 + \dots + \sum_1^m {}^i t_i (p_1)_i\, dx_p = 0$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (b_1)$$

$$- X_{1m}\, dt_1 - \dots - X_{mm} dt_m + \sum_1^m {}^i t_i (1m)\, dx_1 + \dots + \sum_1^m {}^i t_i (pm)_i\, dx_p = 0$$

$$\sum_1^m {}^i t_i \quad \omega_{i\, m+s} = 0 \quad s = 1 \dots p - m,$$

où

$$\omega_{im+s} = \begin{vmatrix} X_{11}, & \dots X_{m1}, & (11)_i\, dx_1 + \dots + (p1)_i\, dx_p \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{1m}, & \dots X_{mm}, & (1m)_i\, dx_1 + \dots + (pm)_i\, dx_p \\ X_{1m+s}, & \dots X_{mm+s}, & (1m+s)_i\, dx_1 + \dots + (pm+s)_i\, dx_p \end{vmatrix}$$

Les formules de la transformation cherchée

$$x_s = \varphi_s\, (y_1 \dots y)_p \quad s = 1 \dots p$$

doivent donc satisfaire aux équations

$$\omega_i = 0, \; \omega_{i,\, m+s} = 0 \quad i = 1 \dots m, \; s = 1 \dots p - m.$$

On peut démontrer que ces équations sont covariants relativement â tout changement des variables $x_1 \dots x_p$ et à tout système de Pfaff équivalent au système donné (I).

En effet, le système d'équations (b_1) est covariant et consèrve sa forme relativement à tout changement des variables $t_1 \dots t_m, x_1 \dots x_p$ de la forme

$$t_k = \sum_1^m {}^i T_i / \mu_{ik}, \quad x_s = \Theta_s\, (y_1 \dots y_p) \quad s = 1 \dots p, \; k = 1 \dots m.$$

Si donc la forme de Pfaff Ω devient après cette transformation

$$\Omega = T_1 \overline{\omega}_1 + \ldots + T_m \overline{\omega}_m$$

$$\text{où } \overline{\omega}_i = \sum_1^m {}^k \mu_{ik} \overline{\omega}_k = \sum_1^p {}^s Y_{is} dy_s \qquad i = 1 \ldots m$$

et les équations (b_1) sont pour cette forme:

$$\overline{\omega}_1 = 0, \ldots \overline{\omega}_m = 0$$

$$-Y_{11}\, dT_1 - \ldots - Y_{m1}\, dT_m + \sum_1^m {}^i T_i\, (11)_i\, dy_1 + \ldots + \sum_1^m {}^i T_i\, (p1)_i\, dy_p = 0,$$

. . . .

$$-Y_{1m}\, dT_1 - \ldots - Y_{mm}\, dT_m + \sum_1^m {}^i T_i\, (1m)\, dy_1 + \ldots + \sum_1^m {}^i T_i\, (pm)_i\, dy_p = 0,$$

$$\sum_1^m {}^i T_i\, \overline{\omega}_{i,\, m+s} = 0 \qquad s = 1 \ldots p - m$$

oú

$$\overline{\omega}_{i,\, m+s} = \begin{vmatrix} Y_{11} \ldots Y_{m1}, & (11)_i\, dy_1 + \ldots + (p1)_i\, dy_p \\ \ldots & \ldots \\ Y_{1m} \ldots Y_{mm}, & (1m)_i\, dy_1 + \ldots + (pm)_i\, dy_p \\ Y_{1,\, m+s}, \ldots Y_{m,\, m+s}, & (1\, m+s)_i\, dy_1 + \ldots + (p\, m+s)_i\, dy_p \end{vmatrix}$$

dans la supposition que

$$\triangle_1 = \sum \pm Y_{11} \ldots Y_{mm} \gtreqless 0$$

on a que

$$\overline{\omega}_i = \sum_1^m {}^k \mu_{ik}\, \omega_k \qquad i = 1 \ldots m,$$

$$\sum_1^m {}^i T_i\, \overline{\omega}_{i,\, m+s} = \sum_1^{p-m} {}^\sigma \alpha_{\sigma s} \left(\sum_1^m {}^k t_k\, \omega_{k\, m+\sigma} \right) + \sum_1^m {}^k \tau_{ks}\, \omega_k$$

où

$$\tau_{ks} = \sum_1^m {}^i T_i\, \beta_{i\, ks} \qquad s = 1 \ldots p - m$$

et $\alpha_{\sigma s}$, β_{iks} ne dépendent que des $y_1 \ldots y_p$.
Il s'ensuit que

$$\overline{\omega}_{i\, m+s} = \sum_1^{p-m} {}^\sigma \sum_1^m {}^k \alpha_{\sigma s}\, \mu_{ik}\, \omega_{k\, m+\sigma} + \sum_1^m {}^k \beta_{i\, ks}\, \omega_k$$

$$i = 1 \ldots m, \qquad s = 1 \ldots p - m.$$

Ces identités et celles

$$\overline{\omega}_i = \sum_1^m {}^k \mu_{ik}\, \omega_k \qquad i = 1 \ldots m \ \left(\sum \pm \mu_{11} \ldots \mu_{mm} \gtreqless 0 \right)$$

démontrent la proposition.

Le nombre donc d'équations indépendantes du système

$$\omega_i = 0,\ \omega_{i\,m+s} = 0 \quad i = 1 \ldots m, \quad s = 1 \ldots p - m \qquad (c)$$

établies pour les systèmes de Pfaff transformés $\overline{\omega}_i = 0 \quad i = 1 \ldots m$ reste invariable.

C'est invariant du système de Pfaff donné (I).

Proposition. Ce nombre r est classe du système de Pfaff (I).

Il est évident que $r \leqslant p$. Si $r = p$, il s'ensuit des équations (c) que $dx_1 = \ldots = dx_p = 0$ c. à d. que p est nombre minimum des variables $x_1 \ldots x_p$, donc classe du système (I). Soit $r < p$. Adjoignons aux r équations indépendantes du système (c) encore $p - r - 1$ équations différentielles quelconqes de la forme

$$\sum_1^p {}^s X_s \, dx_s = 0$$

pourvu que toutes les $p - 1$ équations obtenues soient indépendantes. Ces $p - 1$ équations différentielles ordinaires ont les $p - 1$ intégrales, p. ex.

$$x_s = \varphi_s\,(C_1 \ldots C_{p-1},\ x_p) + 5h \quad s = 1 \ldots p - 1,$$

où $C_1 \ldots C_{p-1}$ sont constantes arbitraires.

Si nous portons ces expréssions des $x_1 \ldots x_{p-1}$ dans les équations

$$-X_{11}\,dt_1 - \ldots - X_{m1}\,dt_m + \sum_1^m {}^i\, t_i\,(11)_i\,dx_1 + \ldots + \sum_1^m {}^i\, t_i\,(p_{2h}1)_i\,dx_p = 0,$$

$$-X_{1m}\,dt_1 - \ldots - X_{mm}\,dt_m + \sum_1^m {}^i\, ti\,(1m)_i\,dx_1 + \ldots + \sum_1^m {}^i\, t_i\,(p_{2h}\,m)_i\,dx_p = 0,$$

nous obtiendrons m équations différentielles ordinaires en $t_1 \ldots tm\ x_p$ linéaires et homogènes par rapport aux $t_1 \ldots t_m$ et à leurs différentielles. Ces équations ont les m intégrales de la forme

$$t_k = \sum_1^m {}^i\, K_i\,\lambda_{ik} \quad k = 1 \ldots m$$

oú $K_i \quad i = 1 \ldots m$ sont constantes arbitraires et

$$\sum \pm \lambda_{11} \ldots \lambda_{mm} \gtreqless 0.$$

Les formules de la transformation

$$t_k = \sum_1^m {}^i\, T_i\,\lambda_{ik} \quad k = 1 \ldots m$$

$$x_s = \varphi_s\,(y_1 \ldots y_{p-1}\ x_p) \quad s = 1 \ldots p - 1$$

qu'on obtient en remplaçant $K_1 \ldots K_m,\ C_1 \ldots C_{p-1}$ par les nouvelles variables indépendantes $T_1 \ldots T_m\ y_1 \ldots y_{p-1}$ satisfont aux équations (b) les différentielles $dt_1 \ldots dx_{p-1}$ étant prises par rapport à x_p. L'équation donc de Pfaff $\Omega = 0$

ne contient pas après cette transformation de la variable x_p. Le système donc de Pfaff

$$\overline{\omega}_i = \sum_1^m {}^k \lambda_{ik} \omega_k = 0 \quad i = 1 \ldots m \ (I_1)$$

équivalent au système donné (I) ne contient pas non plus x_p après la transformation

$$x_s = \varphi_s (y_1 \ldots y_{p-1} x_p) \quad s = 1 \ldots p - 1.$$

Le système d'équations (b) établies pour le système (I_1) ne contient pas x_p et le système (c) correspondant ne contient que r équations indépendantes.

En appliquant le-même raisonnement par rapport au systeme (I_1) nous obtiendrons aprés la deuxième transformation le deuxiéme système de Pfaff (I_2) équivalent au donné (I) qui ne contient pas de deux variables x_p et p. ex. y_{p-1} et pour lequel le susteme d'équations (c), libre de y_{p-1}, x_p ne contient que r équations indépendantes et ainsi de suite. Nous obtiendrons après p—r telles transformations le (p—r)-ième système de Pfaff (I_{p-r}) équivalent au système donné (I) qui ne contient que r variables et pour lequel le système correspondant (c) ne contient que r équations indèpendantes. Le dernier système de Pfaff (I_{p-r}) contient donc le nombre minimum r de variables. Le nombre donc r d'equaitons indépendantes du système d'équations (c) est classe du système donné de Pfaff (I). Le théorème est démontré.

Si les variables du dernier système de Pfaff (I_{p-r}) sont $z_1 \ldots z_r$ le dernier système d'equations (c) correspondent à ce système de Pfaff est équivalent an systéme

$$dz_1 = 0_1 \ldots dz_r = 0 \qquad \text{(d)}$$

Le système donc (c) initial, correspondant au systéme de Pfaff donné (I), équivalent au système (d) est complètement intéqrable. Mais cette propriéte du système (c) ne joue dans notre exposition aucun rôle.

Nous avons dit que classe du système de Pfaff donné (I) ne surpasse pas p. Quant à sa borne inférieure, il est évident que le nombre r ne peut pas être moindre que celui d'équations indépendantes du système (b) diminué de m. Autrement, si 2q est le plus haut dégré des mineurs principaux du détérminant symmétrique gauche

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0, & X_{11} & \ldots & X_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0_1 & \ldots & 0, & X_{m1} & \ldots & X_{mp} \\ -X_{11}, & \ldots & -X_{m1}, & \sum_1^m {}^i t_i (1\,p)_i, & \ldots & \sum_1^m {}^i t_i (p\,1)_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -X_{1p}, & \ldots & -X_{mp}, & \sum_1^m {}^i t_i (1\,p)_i, & \ldots & \sum_1^m {}^i t_i (pp)_i, \end{vmatrix}$$

qui ne sont pas identiquement nues, $2q - m \geqslant r$, où évidemment $2q \geqslant 2m$.

On peut démontrer que 2q est aussi le plus haut dégré de ces mineurs principaux, qui ne sont pas nuls identiquement et qui contiennent les éléments des m premières lignes (et des m premières colonnes) du déterminant $\triangle$. On peut considérer au lieu de ces mineurs principaux leurs racines carrées. On peut démontrer de même que la racine carrée du détérminant symmétrique gauche du dégre paire $2k \geqslant 2m$

$$\left|\begin{array}{cccccc} 0_1 & \ldots & 0_1 & X_{1\rho} & \ldots & X_{1\sigma} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0_1 & \ldots & 0_1 & X_{m\rho} & \ldots & X_{m\sigma} \\ -X_{1\rho} & \ldots & -X_{m\rho} & \sum_1^m{}^i t_i(\rho\rho)_i & \ldots & \sum_1^m{}^i t_i(\sigma\rho) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -X_{1\sigma} & \ldots & -X_{m\sigma} & \sum_1^m{}^i t_i(\rho\sigma)_i & \ldots & \sum_1^m{}^i t_i(\sigma\sigma)_i \end{array}\right|$$

$$\rho \ldots \sigma = 1 \ldots p$$

est:

$$\pm \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} \frac{1}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!} t_1^{\alpha_1} \ldots t_m^{\alpha_m} \triangle_{\rho \ldots \sigma}^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$$

où $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = k - m$ et

$$\triangle_{\rho \ldots \sigma}^{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = \left|\begin{array}{ccc|c} X_{1\rho} & \ldots & X_{1\sigma} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ X_{m\rho} & \ldots & X_{m\sigma} & \\ \frac{\partial}{\partial x_\rho} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_\sigma} & \\ X_{1\rho} & \ldots & X_{1\sigma} & \alpha_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{\partial}{\partial x_\rho} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_\sigma} & \\ X_{m\rho} & \ldots & X_{m\sigma} & \alpha_m \end{array}\right|$$

les signes $|\alpha_1 \ldots |\alpha_m$ désignont que la paire correspondante de lignes figure $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ fois et que les éléments de chacune de ces paires ne sont pas assujettis à la loi commutative.

La borne donc inférieure de la classe r du système de Pfaff donné (I) est $2q - m$, $2q - m$ étant le plus haut dégré des déterminants symboliques du type indiqué qui ne sont pas nuls identiquement.

Dans le cas d'une e'quation de Pfaff et dans le cas du système (I) complètement intéqrable la classe est égale à sa borne inférieure $2q - 1$ et m. La condition donc nécéssaire et suffisante pour qu'une équation de Pfaff

$$\omega = \sum_1^p{}^s X_s \, dx_s = 0$$

soit reductible à l'équaton équivalente contenant le nombre $2q-1$ minimum de variables. ou pour qu'elle soit integragle par le nombre minimum q d'intégrales complètes est que le dégré le plus haut des déterminants

$$\left| \begin{array}{ccc|c} X_\rho & \cdots\cdots\cdots & X_\sigma & \\ \frac{\partial}{\partial x_\rho}, & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial}{\partial x_\sigma} & \\ X_\rho & \cdots\cdots\cdots & X_\sigma & k \end{array} \right|$$

qui ne sont pas nuls identiqument, soit égal à $2q-1$.

La condition nécéssaire et suffisante pour que le système de Pfaff (I) soit complètement intégrable est que les déterminants

$$\left| \begin{array}{ccc} X_{1\rho} & \cdots\cdots\cdots & X_{1\sigma} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ X_{m\rho} & \cdots\cdots\cdots & X_{m\sigma} \\ \frac{\partial}{\partial x_\rho}; & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \\ X_{i\rho} & \cdots\cdots\cdots & X_{i\sigma} \end{array} \right| \quad i = \ldots m, \quad \rho \ldots \sigma = 1 \ldots p$$

soient nuls identiquement. [1]

[1] J'ai donné deux démonstrations de ce théorème en 1898 (Annales de l'Université de la Nouvelle Russie).

Об одном определении интеграла

А. К. Сушкевич

Раньше чем перейти к предмету, которому посвящается эта статья, я должен разъяснить одну вещь, которая может показаться многим читателям странной и даже несуразной: в то время как в настоящее время принято „обобщать" понятие интеграла, я в настоящей статье, наоборот — „сужаю" это понятие.

Причина этому та, что цель моя совершенно иная, чем цель тех, кто старается обобщить понятие интеграла: в настоящей моей статье я вовсе не стараюсь проникнуть в новые, еще неизвестные области: я остаюсь в области известной, уже „перейденной", стараясь лишь установить связь между известными уже вещами. Дело в следующем: как известно, интеграл в смысле Riemann'а тесно связан с понятием меры Jordan, интеграл же Lebesgue'а связан с мерой Lebesgue'а и Borel'я; но связь эта в обоих случаях различна: ведь и определения интегралов Riemann'а и Lebesgue'а совершенно разнородны: в то время, как при определении интеграла Riemann'а делится на части интервал для независимого переменного, — при определении интеграла Lebesgue'а делится на части интервал для самой функции. Возникает вопрос: нельзя ли интеграл Riemann'а определить подобно Lebesgue'у, деля на части интервал для функции и применяя только вместо меры Lebesgue'а меру Jordan. Такому определению и посвящена настоящая статья; и вот оказывается, что определенный таким образом интеграл не совпадает с интегралом Riemann'а, а уже этого последнего. Следовательно, связь интеграла Riemann'а с мерой Jordan совершенно не та, что связь интеграла Lebesgue'а с мерой Lebesgue'а.

Мы начнем наше исследование с изложения свойств меры в смысле Jordan, — свойств по большей части уже известных. Затем введем понятие о функциях измеримых — в смысле Jordan, и, наконец, определим интеграл намеченным выше путем.

§ 1. Пусть A — данный линейный, ограниченный ансамбль точек, ограниченный, т.-е. целиком помещающийся на некотором конечном отрезке (a, b). Разделим (a, b) на конечное число частей m_1, затем каждую часть снова подразделим на части, так что весь отрезок (a, b) разделится на m_2 частей; и т. д.—повторяем эту операцию бесчисленное множество раз; при $n^{\text{ом}}$ таком делении отрезок (a, b) разделится на m_n частей. Пусть при этом эти деления таковы, что при $n \to \infty$ все части, на которые мы делим (a, b), стремятся (по длине) к нулю, так что при достаточно большом n длина каждой из m_n частей $n^{го}$ деления будет как угодно мала.

Введем такую терминологию: всю совокупность делений данного отрезка (a, b) назовем с е т ь ю, которую мы н а к л а д ы в а е м на (a, b).

Каждое отдельное деление назовем р е ш е т к о й; решетки сети мы отличаем друг от друга номерами: 1 решетка есть деление (a, b) на m_1 частей; 2 решетка есть дальнейшее подразделение каждой части, приводящее к делению всего отрезка (a, b) на m_2 частей. Данная сеть состоит, таким образом, из исчислимого множества решеток.

Пусть данная решетка представляет собой деление отрезка (a, b) на m частей точками $x_1, x_2, \ldots x_{m-1}$; эти точки — у з л ы данной решетки; а часть $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots (x_{m-1}, b)$ — п е т л и решетки.

Итак, наложим какую-нибудь сеть на (a, b).

В каждой решетке сети мы выбираем те петли, каждая из которых содержит по крайней мере одну точку из ансамбля A внутри себя или на границе; пусть S_n сумма длин этих выбранных петель.

Можно доказать (см., напр., Hobson: The theory of functions of a real variable 2_{nd} ed. vol. I, ch. III), что: с увеличением n, S_n не увеличивается, — существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$; этот предел один и тот же для всевозможных родов делений интервала (a, b) и является нижней границей всех сумм S_n для всевозможных делений интервала (a, b).

Этот предел S называется в н е ш н е й д л и н о й или п р о т я ж е н н о с т ь ю ансамбля A; обозначим его: $S = l_e A$.

Эта протяженность обладает следующими свойствами (см. Hobson — указанное выше сочинение и глава):

1. Если ансамбль A состоит из всех точек (замкнутого или незамкнутого) интервала (a, b) то $l_e A =$ длине этого интервала.

2. Для конгруэнтных ансамблей протяженность одна и та же.

3. Если $A_1, A_2, \ldots A_n$ — замкнутые ансамбли попарно, без общих точек, то:

$$l_e(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = l_e A_1 + l_e A_2 + \ldots + l_e A_n.$$

Это свойство иначе выражается словами: для замкнутых ансамблей протяженность — аддитивная функция.

З а м е ч а н и е. Если множество замкнутых ансамблей бесконечно, то свойство 3 может быть и неверно; это выражают словами: протяженность для замкнутых ансамблей — функция аддитивная, но не вполне.

4. Протяженность данного ансамбля та же, что и протяженность каждого из производных ансамблей:

$$l_e A = l_e A' = l_e A'' = \ldots = l_e A^{(n)},$$

где n любое конечное или трансфинитное число.

С л е д с т в и е 1. Протяженность приводимого ансамбля $= 0$. (Приводимый ансамбль A — такой, для которого $A^{(n)} = 0$, начиная с некоторого числа n, 1-го или 2-го класса).

Следствие 2. Если ансамбль A везде густой в интервале (a, b), то $l_e A = b - a$.

5. Если A — ансамбль замкнутый, а B — ансамбль отрезков дополнительных к A в (a, b), сумма длин которых $= k$, то: $l_e A = b - a - k$.

6. Всякий ограниченный линейный ансамбль A имеет внешнюю длину, вполне определенную свойствами 1, 4 и 5.

§ 2. Совершенно аналогично внешней длине определяется и внутренняя длина или вместимость ограниченного ансамбля (линейного).

И здесь мы накладываем сеть на интервал (a, b), в котором содержится данный ансамбль A. Пусть $n^я$ решетка этой сети имеет m_n петель; выбираем из этих петель те, которые целиком состоят из точек ансамбля A (кроме, может быть, своих концов, которые могут и не принадлежать к A); пусть сумма длин этих петель есть S_n. Можно, как и в случае первой длины, доказать, что:

с увеличением n, S_n не уменьшается; существует $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$; этот предел один и тот же для всевозможных сетей, накладываемых на интервал (a, b) и является верхней границей всех сумм S_n для всевозможных сетей, накладываемых на интервал (a, b).

Этот предел S и есть внутренняя длина или вместимость ансамбля A; обозначим его $S = l_i A$.

Вместимость обладает следующими свойствами:

1. Если ансамбль A состоит из всех точек (замкнутого или незамкнутого) интервала (a, b) то $l_i A =$ длине этого интервала.

2. Для конгруэнтных ансамблей и вместимость одна и та же.

3. Для открытых ансамблей вместимость — вполне аддитивная функция т.-е., если $A_1, A_2, A_3, \ldots$ конечное или исчислимое множество открытых ансамблей попарно без общих точек, то:

$$l_i(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots) = l_i A_1 + l_i A_2 + l_i A_3 + \ldots$$

Открытым (ouvert) называется ансамбль, состоящий только из внутренних точек. Можно доказать, что такой ансамбль есть сумма конечного или исчислимого множества открытых (незамкнутых) интервалов попарно без общих точек. Сумма конечного или исчислимого множества открытых ансамблей — тоже открытый ансамбль, т.-е., тоже состоит из открытых интервалов.

Доказательство свойства 3. Пусть все наши ансамбли заключены в интервале (a, b).

Для конечного множества открытых ансамблей попарно без общих точек теорема очевидна. Т.-е.:

$$l_i(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = l_i A_1 + l_i A_2 + \ldots + l_i A_n.$$

При $n \to \infty$ сумма правой части возрастает, но остается всегда $< b - a$, т.-е. ряд:

$$l_i A_1 + l_i A_2 + l_i A_3 + \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

сходящийся; т.-е., при достаточно большом m, $l_i A_{m+1} + l_i A_{m+2} \ldots\ldots$ может быть сделано как угодно мало.

Наложим сеть на интервал (a, b). Возьмем одну решетку сети и выделим в ней те части (петли), которые целиком состоят из точек хоть одного из ансамблей $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$ При достаточно большом p, ни одна из этих петель не будет содержать точек из A_p, ибо при достаточно большом p, $l_i A_p$ очень мало.

Пусть взятые петли содержат только точки из $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$; если петли решетки, взятой нами, достоточно малы, т.-е. решетка имеет достаточно большой номер, то n может быть как угодно большим; для решеток с дальнейшими номерами, n увеличивается. Сумму длин взятых петель, состоящих из точек ансамблей $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$, обозначим чрез s. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное число. Возьмем m таким большим, чтобы было:

$$l_i A_{m+1} + l_i A_{m+2} + \ldots\ldots < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Возьмем теперь $n > m$ (это мы можем сделать, беря решетки с достаточно большим номером).

Пусть $s = s' + s''$ где s' сумма тех частей, которые целиком состоят из точек ансамблей $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ а s'' — сумма петель, состоящих из точек ансамблей $A_{m+1}, \ldots\ldots A_n$; очевидно, что:

$$s'' < l_i A_{m+1} + l_i A_{m+2} + \ldots\ldots,$$

т.-е. и подавно $s'' < \frac{\varepsilon}{3}$. С другой стороны, если мы продолжим деления интервала (a, b) достаточно далеко (т.-е. возьмем решетку с достаточно большим номером), то:

$$l_i A_1 + l_i A_2 + \ldots\ldots + l_i A_m - s' < \frac{\varepsilon}{3},$$

а также, как мы уже видели:

$$l_i A_{m+1} + l_i A_{m+2} + \ldots\ldots \text{in inf.} < \frac{\varepsilon}{3};$$

это нам дает:

$$A_1 + l_i A_2 + \ldots\ldots \text{in inf.} - s \leqq | l_i A_1 + \ldots\ldots + l_i A_m - s' | + | s'' | + | l_i A_{m+1} +$$

$$+ l_i A_{m+2} + \ldots\ldots \text{in inf.} | < \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon,$$

$$\text{т.-е. } \lim s = l_i A_1 + l_i A_2 + \ldots\ldots \text{in inf.};$$

но $\lim s$ и есть $l_i (A_1 + A_2 + \ldots\ldots)$; т.-е. теорема доказана.

Замечание 1. Если ансамбль не имеет внутренних точек, то его вместимость, очевидно, $= 0$.

Такой ансамбль не может быть открытым, и для таких ансамблей свойство 3 неверно. Напр., ансамбль всех чисел в интервале $(0,1)$ имеет вместимость $= 1$ и является суммой двух ансамблей: всех рациональных чисел в интервале $(0,1)$ и всех иррациональных чисел в том же интервале; для каждого из этих ансамблей вместимость равна нулю.

Замечание 2. Вместимость всякого исчислимого ансамбля равна нулю, ибо исчислимый ансамбль не имеет внутренних точек,

4) Совокупность внутренних точек всякого ансамбля A образует открытый ансамбль A_1 — „внутреннюю часть" ансамбля A.

Если A не имеет внутренних точек, то можно считать $A = 0$.

Доказательство. Ясно, что все точки, лежащие вблизи внутренней точки из A, тоже суть внутренние точки из A; след., A — открытый ансамбль.

Ясно также, что при определении вместимости A принимаются во внимание только точки из A_1.

Пусть $A = A_1 + B$, где B не содержит ни одной внутренней точки из A; т.-е. ансамбль B и сам не имеет внутренних точек, т.-е. $l_i B = 0$.

5) Очевидно, что всякая внутренняя точка для A является в то же время и предельной точкой для A; сл.: $A_1 < (A')$, след. $l_i A \leqq l_i A'$.

Если A — замкнутый ансамбль, то $A > A'_1$ след. $A_1 > (A')_1$, т.-е. в этом случае $l_i A = l_i A'$.

Так как все производные ансамбли замкнуты, то $l_i A' = l_i A'' = \ldots\ldots = l_i A^{(n)}$ для всякого конечного n.

Далее, т. к. $(A')_1 = (A'')_1 = \ldots\ldots$ то эта же внутренняя часть $(A')_1$, общая всем $A^{(n)}$, входит и в $A^{(\omega)}$, т.-е. $(A')_1 < (A^{(\omega)})_1$; с другой стороны, очевидно $(A')_1 > (A^{(\omega)})_1$; след. $(A')_1 = (A^{(\omega)})_1$; $l_i A' = l_i A^{(\omega)}$. Итак:

Теорема: Вместимость ансамбля $A \leqq$ вместимости ансамбля A'; все производные для данного ансамбля — конечного и трансфинитного порядков — имеют одну и ту же вместимость. Если A — замкнутый ансамбль, то $l_i A = l_i A'$.

Следствие. Вместимость приводимого ансамбля равна нулю.

6) Вместимость открытого ансамбля A равна сумме длин тех открытых интервалов, из которых A состоит. Это — следствие из 3-м свойства.

7) Всякий ограниченный линейный ансамбль имеет внутреннюю длину, вполне определенную свойствами 1, 5 и 6.

§ 3. Из определения протяженности и вместимости следует, что для данного ансамбля A, всегда:

$$l_e A \geqq l_i A.$$

Через CA будем обозначать ансамбль дополнительный к A относительно (a, b).

Теорема. $l_e\, CA = b - a - l_i A$; $l_i CA = b - a - l_e A$.

Доказательство. Наложим сеть на интервал (a, b); в каждой решетке выделим, напр., те петли, где находится, по крайней мере, одна точка из A; сумму длин этих петель назовем s_1; остальные петли целиком состоят из точек принадлежащих CA. Сумму длин обозначим через s_2; $s_1 + s_2 = b - a$; но $\lim s_2 = l_e A$; $\lim s_2 = l_i(CA)$; сл. $l_e A + l_i(CA) = b - a$; и т. п.

§ 4. Если $l_e A = l_i A$, то говорят, что ансамбль A измерим в смысле Jordan, или измерим (J).

Обозначим в этом случае: $l_e A = l_i A = lA$; это количество есть мера (J), или длина ансамбля A.

Из этого определения вытекают след. свойства:

Если ансамбль A измерим (J), то и CA тоже, и $l(CA) = b - a - lA$; это следует из теоремы § 3.

Ансамбль без внутренних точек измерим (J) тогда и только тогда, если его протяженность $= 0$; в этом случае и его мера (J) $= 0$. Эго следует из того, что вместимость такого ансамбля $= 0$.

Свойства меры (J):

1. Ансамбль состоящий из всех точек (замкнутого или открытого) интервала (a, b), измерим (J); его мера (J) равна его длине.

2. Если один из этих конгруэнтных ансамблей измерим (J), то и другой — тоже, и их меры (J) равны.

3. Мера (J) — аддитивная функция от ансамбля, но не вполне. Иначе: если ансамбли $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ — попарно без общих точек, и каждый из них измерим (J), то сумма их измерима (J), и:

$$l(A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n) = lA_1 + lA_2 + \ldots\ldots + lA_n.$$

Лемма 1. Если $B_1, B_2 \ldots\ldots B_n$ замкнутые ансамбли, содержащиеся в интервале (a, b), то:

$$l_e M(B_1, B_2, \ldots\ldots B_n) \leqq l_e B_1 + l_e B_2 + \ldots\ldots + l_e B_n.$$

(M — знак общего наименьшего кратного).

Доказательство. Заметим, что общее наименьшее кратное замкнутых ансамблей — тоже замкнутый ансамбль.

Докажем сначала нашу лемму для случая, когда $n = 2$. Ансамбль B_1 получается исключением из (a, b) конечного или исчислимого множества открытых интервалов, сумма длин которых $= k_1$; подобно же для ансамбля B_2 сумма длин дополнительных интервалов $= k_2$; тогда для ансамбля $M(B_1, B_2)$ сумму длин дополнительных интервалов обозначим через $D(k_1, k_2)$, (ансамбль этих дополнительных интерваллов есть общий наибольший делитель ансамблей CB_1 и CB_2); если чрез $M(k_1, k_2)$ обозначим сумму длин интервалов ансамбля $M(CB_1, CB_2)$, то имеем:

$$k_1 + k_2 = M(k_1, k_2) + D(k_1, k_2).$$

Теперь имеем:

$$l_e B_1 + b - a - k_3;\ l_e B_2 = b - a - k_2;\ l_e M(B_1, B_2) = b - a - D(k_1, k_2).$$

Мы должны показать, что: $l_e B_1 + l_e B_2 \geqq l_e M(B_1, B_2)$; или: $2(b - a) - (k_1 + k_2) \geqq b - a - D(k_1, k_2)$;

это равносильно следующему: $b - a \geqq k_1 + k_2 - D(k_1, k_2)$,

или: $b - a \geqq M\ (k_1, k_2)$; это неравенство верно; след. верны и предыдущие, и лемма для $n = 2$ доказана.

Применим метод полной индукции: пусть наша лемма верна, если число ансамблей $< n$. Обозначения оставим те же, имеем:

$$l_e B_k = b - a - k_k \quad (k = 1, 2, \ldots\ldots n);$$

$$l_e M(B_1, B_2, \ldots\ldots B_n) = b - a - D(k_1, k_2, \ldots\ldots k_n);$$

но

$$D(k_1, k_2, \ldots . k_n) = D[D(k_1, k_2, \ldots . k_{n-1}), k_n];$$

$$\sum_{k=1}^{n} l_e B_k = n(b-a) - (k_1 + k_2 + \ldots . + k_n);$$

мы должны доказать, что:

$$n(b-a) - (k_1 + k_2 + \ldots . + k_n) \geqq b - a - D(k_1, k_2, \ldots . k_n);$$

мы считаем доказанным, что:

$$(n-1)(b-a) - (k_1 + k_2 \ldots . + k_{n-1}) \geqq b - a - D(k_1, k_2, \ldots . k_{n-1});$$

след., наша лемма будет доказана, если мы выведем, что:

$$2(b-a) - D(k_1, k_2, \ldots . k_{n-1}) - k_n \geqq b - a - D(k_1, k_2, \ldots . k_n);$$

но это неравенство верно, ибо оно выражает нашу лемму для двух ансамблей: $M(B_1, B_2, \ldots . B_{n-1})$ и B_n, а для двух ансамблей наша лемма доказана. Сл., лемма доказана вполне.

Лемма 2. Протяженность суммы $\geqq$ суммы протяженностей слагаемых (это верно только для конечного числа слагаемых).

Док. Так как $l_e A = l_e A'$, то для определения протяженности достаточно принять во внимание только предельные точки для A. Но, как известно:

$$(A_1 + A_2 + \ldots . A_n)' = M(A_1', A_2', \ldots . A_n'),$$

а для замкнутых ансамблей $A_1', A_2', \ldots . A_n'$ по лемме I:

$$l_e M(A_1', A_2', \ldots . A_n') \geqq l_e A_1' + l_e A_2' + \ldots . + l_e A_n'.$$

Замечание. Для исчислимого множества слагаемых эта теорема не верна. Напр., ансамбль всех рациональных чисел в интервале (0,1) имеет протяженность $= 1$ и может быть рассматриваем, как сумма исчислимого множества ансамблей, каждый из которых состоит из одной точки, т.—е. имеет протяженность равную нулю.

Лемма 3. Вместимость суммы $\geqq$ суммы вместимостей слагаемых. (Это верно и для исчислимого множества слагаемых).

Док. Это следует из того, что внутренняя часть суммы заключает в себе внутренние части каждого из слагаемых, из которых никакая пара не имеет общей внутренней части.

Доказ. свойства 3. Оно непосредственно следует из лемм 1 и 2 и из того, что $l_e A \geqq l_i A$.

Дополнение. Мера (J)—аддитивная ф-ция, но не вполне; т.-е. свойство 3 может быть и неверно для исчислимого множества слагаемых; т. - е. в этом случае сумма может быть и неизмерима (J), несмотря на то, что каждое слагаемое измеримо (J).

Но если каждое из исчислимого множества слагаемых $A_1, A_2, A_3, \ldots .$

измеримо (J) и сумма $A_1 + A_2 + A_3 \ldots\ldots$ тоже измерима (J), то в этом случае верна формула:

$$l(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots) = l A_1 + l A_2 + l A_3 + \ldots\ldots$$

(конечно, предполагается, что $A_1 . A_2, A_3, \ldots\ldots$ попарно без общих точек).

Именно ансамбли, измеримые (J), измеримы и в смысле Lebesgue'а или меры (J) те же, что и меры (L); а для меры (L) приведенная формула верна

4) Если ансамбль A измерим (J), то его внутренняя часть A_1 тоже измерима (J) и $l A = l A_1$.

Док.: $l A = l_e A \geqq l_e A_1$; $l A = l_i A = l_i A_1$;

След.: $l_e A_1 \leqq l_i A_1$ т.-е. $l_e A_1 = l_i A_1 = l A_1 = l A$.

Замечание. Но может случиться, что A_1 измерим (J), а A нет.

5) Если ансамбль A измерим (J), то и его производный ансамбль A' измерим и (J) и $l A = l A_1$;

Доказ. $l A = l_e A = l_e A'$; $l_e A \geqq l_e A_1$; $l A = l_i A \leqq l_i A'$.

След: $l_e A' \leqq l_i A'$ т.-е.: $l_e A' = l_i A' = l A' = l A$.

Замечание. Но может случиться, что A' измерим (J), а A — нет.

6). Ансамбль A в интервале (a, b) тогда и только тогда измерим (J), если: $l_e A + l_e CA = b - a$; это непосредственное следует из теоремы § 3.

§ 5. Теорема 1. Если ансамбль $A = B + B_1$, причем A и B измеримы (J), то и B_1 измерим (J), и $l B_1 = l A - l B$.

Доказ. $C B_1 = C (A - B) = C A + B$ измерим (по свойству 3 § 4)

$$l(C B_1) = l(C A) + l B = b - a - l A + l B_1$$

сл. и B_1 измерим (J) (см. начало § 4), и:

$$l B_1 = b - a - l(CB_1) = l A - l B.$$

Теорема 2. Если ансамбль A и B измеримы (J) — то и ансамбль: $D = D(A, B)$ тоже измерим (J) (D — знак общего наибольшего делителя).

Доказ. Пусть A и B лежат в интервале (a, b).

Наложим сеть на (а, в). В каждой решетке выделим петли, содержащие точки из D; сумму их обозначим чрез k. Из этих петель возьмем петли, целиком состоящие из точек D; их сумму обозначим через k_1. Остальные взятые петли, кроме точек из D, заключают и другие точки — из A, из B и из $P = C[M(A, B,)]$; выделим из этих петель те, которые содержат только точки из A (но не из B) и из D; их сумму обозначим через k_2; сумму длин петель, содержающих точки из B (но не из A) и из D обозначим через k_3; наконец, сумму остальных петель, входящих в k, обозначим через k_4.

Тогда: $k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$. Имеем: $\lim k = l_e D$; $\lim k_1 = l_i D$; $\lim k_4 = 0$, ибо ансамбли A и B измеримы.

Пусть $\lim k_2 > 0$; $\lim k_2$ есть часть $l_i A$, но также и часть $l_e B$, не входящая в $l_i B$; это невозможно, т. к. ансамбль B измерим; след. $\lim k_2 = 0$; подобно же, $\lim k_3 = 0$, т.-е. $\lim k = \lim k_1$, или $l_e D = l_i D$ и D измерим (J).

Следствие 1. Доказанная теорема верна вообще для конечного числа ансамблей: если $A_1, A_2, \ldots A_n$ измеримы (J), то и $D(A_1, A_2, \ldots A_n)$ тоже. Это следует из того, что, напр.,

$$D(A_1, A_2, A_3) = D(D(A_1, A_2), A_3); \text{ и т. д.}$$

Следствие 2. Ансамбли $A - D(A, B)$ и $B - D(A, B)$ тоже измеримы (J).

Следствие 3. Если $A_1, A_2, \ldots A_n$ измеримы (J), то и $M(A_1, A_2, \ldots A_n)$ тоже. Это следует из того, что:

$$M(A_1, A_2, \ldots A_n) = C\,D(C A_1, C A_2, \ldots C A_n).$$

Следствие 4. Если ансамбль A находится в интервале (a, b) и измерим (J), и (c, d) — интервал, целиком заключающийся в (a, b), то часть ансамбля A, лежащая в (c, d), тоже измерима (J), ибо эта часть есть $D[A, (c, d)]$.

§ 6. Какое же строение ансамбля A, измеримого (J)? Мы знаем, что $A = A_i + B$, где A_i внутренняя часть A, а $l_i B = 0$.

Но если A измерим (J), то (см. § 4, 4) и A_1 измерим (J), и $l A = l A_1$.

По § 5, теореме 1 отсюда следует, что и ансамбль B измерим (J), и $l B = l A - l A_1 = 0$.

Обратно: если A_1 открытый ансамбль измеримый (J), а B измеримый (J) ансамбль с длиной $= 0$, и A_1 и B не имеют общих точек, то $A = A_1 + B$ тоже измерим (J).

Т.-е. это есть общий вид всякого ансамбля, измеримого (J). След. дело сводится к рассмотрению ансамблей A_1 и B.

Открытый ансамбль A_1 в (a, b) измерим (J) тогда и только тогда, если $l_i A_1 + l_i (C A_1)_1 = b - a$, т. е. другими словами сумма длин интервалов из A_1 и из CA_1, должна быть равна длине всего интервалла (a, b). В частности, если A везде густой в (a, b), то сумма длин интервалов из A должна быть равна $a - b$.

Рассмотрим теперь ансамбль B, измеримый (J), с длиной $= 0$. Имеем $lB = lB' = 0$, но B' замкнутый; если $lB' = 0$, то B' нигде не густой в (a, b), и, кроме того, $l_i(CB') = b - a$, т.-е. сумма длин дополнительных к B интервалов должна быть $b - a$. Это условие необходимое и достаточное для того, чтобы B' был измерен (J) с мерой $= 0$. Но если $lB' = 0$, то и ансамбль B измерим с длиной $= 0$, ибо:

$$l_e B = l_e B' = l B' = 0 \text{ (см. начало § 4).}$$

$B = D(B, B') + P$, где P ансамбль изолированных точек.

§ 7. Измеримые функции.

Пусть $f(x)$ данная ограниченная реальная ф-ция реального переменного x; x изменяется в (замкнутом) интервалле (a, b); для ф-ции имеем нижнюю и верхнюю границы α и β, т.-е. ансамбль значений ф-ции лежит в интервале (α, β). Назовем нашу функцию измеримой (J) в интервале (a, b), если:

1) Измерим ансамбль значений x в (a, b), для которых $f(x) = \alpha$ (обозначим этот ансамбль $E(f = \alpha)$;

2) Измерим ансамбль $E(f = \beta)$ (то же обозначение);

3) Если $\alpha \leqq \alpha_1 < \beta_1 \leqq \beta$, то измерим ансамбль значений x, для которых $\alpha_1 \leqq f(x) \leqq \beta_1$ [обозначим этот ансамбль так: $E(\alpha_1 \leqq f \leqq \beta_1)$].

Примечание. Если, наприм., наша ф-ция f совсем не принимает значений, лежащих между α_1 и β_1 (со включением α_1 и β_1), то мы считаем, что: $E(\alpha_1 \leqq f \leqq \beta_1) = 0$ и $lE(\alpha_1 \leqq f \leqq \beta_1) = 0$.

Из определения измеримых (J) ф-ций следует:

1) При $\alpha < \xi < \beta$ измерим (J) ансамбль $E(f = \xi)$, ибо: $E(f = \xi) = D[E(\alpha \leqq f \leqq \xi), E(\xi \leqq f \leqq \beta)]$ (см. § 5, теорема 2).

2) При $\alpha < \xi < \beta$ измеримы (J) ансамбли $E(f \geqq \xi)$, $E(f \leqq \xi)$, ибо это только иное обозначение для ансамблей $E(\xi \leqq f \leqq \beta)$, $E(\alpha \leqq f \leqq \xi)$.

3) При $\alpha < \xi < \beta$ измеримы (J) ансамбли $E(f > \xi)$, $E(f < \xi)$, ибо $E(f > \xi) = CE(f \leqq \xi)$, $E(f < \xi) = CE(f \geqq \xi)$.

4) При $\alpha \leqq \alpha_1 < \beta_1 \leqq \beta$ измеримы ансамбли: $E(\alpha_1 < f < \beta_1)$, $E(\alpha_1 \leqq f < \beta_1)$ $E(\alpha_1 < f \leqq \beta_1)$, ибо $E(\alpha_1 < f < \beta_1) = (a, b) - E(f \leqq \alpha_1) - E(f \geqq \beta_1)$; и т. д.

Теорема. Если ф-ция $f(x)$ измерима (J) в интервале (a, b), то она измерима (J) и во всякой части (a_1, b_1) интервала (a, b).

Док. Ансамбль значений x в (a, b), для которых $\alpha_1 \leqq f \leqq \beta_1$, есть общий наибольший делитель ансамбля таких же значений x во всем интервале (a, b) и всех значений x в интервале (a_1, b_1) (см. § 5, теорему 2).

§ 8. Теорема. Всякая ограниченная измеримая (J) ф-ция — точечно-прерывна.

Док. Интервал (α, β) для ф-ции разделим на конечное число частей; по крайней мере для одной из таких частей (α_1, β_1), будем иметь: $lE(\alpha_1 < f < \beta_1) > 0$.

Возьмем такую часть (α_1, β_1), которую можно выбрать всегда так, чтобы $\beta_1 - \alpha_1$ было как угодно мало. Итак, пусть $A_1 = E(\alpha_1 < f < \beta_1)$. Так как $lA_1 > 0$, то A_1 имеет внутренние точки; если x—одна из них, то можно взять интервал (a_1, b_1), внутри которого лежит x и который целиком, включая и его границы, состоит из внутренних точек A_1. При этом можно еще взять: $a_1 > a$, $b_1 < b$. Берем теперь (a_1, b_1) вместо (a, b). Соответствующий интервал для функции (α_1, β_1); делим его на части и берем одну из них (α_2, β_2) такую, чтобы ансамбль $A_2 = E(\alpha_2 < f < \beta_2)$ точек x, лежащих в интервале (a_1, b_1) имел бы длину > 0. С A_2 мы поступаем так же: берем интервал, состоящий целиком (вместе в границами) из точек ансамбля A_2; и т. д. Получаем ряд интервалов (α_n, β_n), из которых каждый последующий ложится в предыдущем; от нас зависит выбрать их так, чтобы было: $\lim(\beta_n - \alpha_n) = 0$, т.-е. $\lim \alpha_n = \lim \beta_n$; этот общий предел обозначим через y_0. Интервалам (α_n, β_n) соответствуют интервалы (a_n, b_n) для x, из которых каждый последующий лежит целиком внутри предыдущего. Интервалы (a_n, b_n) определят „предельный" интервал (a_ω, b_ω), лежащий целиком внутри всех предыдущих. Конечно, может случиться, что будет $a_\omega = b_\omega$. Возьмем одну из точек x_0 интервала (a_ω, b_ω); докажем, что $f(x_0) = y_0$. Пусть $f(x_0) = y_0 + k$; пусть n так велико, что $|\beta_n - \alpha_n| < |k|$: в интервале (a_n, b_n) функция $f \geqq \alpha_n$ и $\leqq \beta_n$; x_0 лежит в интервале (a_n, b_n), след. $\alpha_n \leqq f(x_0) \leqq \beta_n$, т.-е. $\alpha_n \leqq y_0 + k \leqq \beta_n$, но также и $\alpha_n \leqq y_0 \leqq \beta_n$, что невозможно, если $|\beta_n - \alpha_n| < |k|$. Итак, $k = 0$ и $f(x_0) = y_0$.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ произвольно мало. При достаточно большом n, интервал (α_n, β_n) лежит целиком внутри $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$; интервалу (α_n, β_n) соответствует интервал (a_n, b_n) для x, внутри которого лежит x_0, так что при

$a_n < x < b_n$ будет $\alpha_n < f(x) < \beta_n$; пусть δ наименьшее из чисел $x_0 - a_n$, $b_n - x_0$, тогда при $|x - x_0| < \delta$ будет $\alpha_n < f(x) < \beta_n$, т.-е. и подавно $y_0 - \varepsilon < f(x) < y_0 + \varepsilon$, т.-е. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, т.-е. при $x = x_0$ $f(x)$ непрерывна.

Вместо всего интервала (a, b) мы можем с самого начала взять любую, как угодно малую, его часть; след., $f(x)$ точечно прерывна.

§ 9. Пусть попрежнему $f(x)$ ограничена и измерима (J) в интервале (a, b), и пусть там $\alpha \leqq f(x) \leqq \beta$. Разделим (α, β) на части, каждая из которых длиною $< \frac{\varepsilon}{2}$, где $\varepsilon > 0$ произвольное число; пусть (α_1, β_1) одна из таких частей; $\beta_1 - \alpha_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим ансамбль: $E(\alpha_1 \leqq f \leqq \beta_1)$; он измерим (J); если x_0 его внутренняя точка, то для всякой точки x вблизи x_0: $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

След., если $\alpha_1 \leqq f(\xi) \leqq \beta_1$ и в точке ξ $f(x)$ делает скачек $\geqq \varepsilon$, то ξ не внутренняя точка для $E(\alpha_1 \leqq f \leqq \beta_1)$; если $E(\alpha_1 \leqq f \leqq \beta_1) = A_1 + B$, где A_1 внутренняя часть ансамбля, а $lB = 0$, то $\xi < B$. Это верно для всякой части (α_1, β_1), на которые разделен интервал (α, β); число этих частей конечно.

След., все точки x, где $f(x)$ делает скачок $\geqq \varepsilon$, принадлежат к конечному множеству ансамблей с мерой $(J) = 0$; сумма этих ансамблей тоже имеет меру $(J) = 0$.

Итак:

Теорема. Если $f(x)$ измерима (J) в интервале (a, b) и ограничена, то те точки x, где ф-я $f(x)$ делает скачек $\geqq \varepsilon$, при любом $\varepsilon > 0$, образуют ансамбль с протяженностью $= 0$.

Но это свойство необходимо и достаточно для существования интеграла в смысле Riemann'a.

Следствие. Всякая ограниченная и измеримая (J) ф-я интегрируема (R).

§ 10. Теорема. Если $f(x)$ ограничена и измерима (J), и $C = \text{Const.}$, то и $Cf(x)$ и $f(x) + C$ измеримы (J); в частности, и $f(x)$ измерима (J).

Доказ. Имеем:

$$E(\alpha_1 \leqq Cf(x) \leqq \beta_1) = E\left(\frac{\alpha}{C} \leqq f(x) \leqq \frac{\beta_1}{C}\right)$$

(при $C = 0$; при $C = 0$ дело совсем просто);

$$E(\alpha_1 \leqq f + C \leqq \beta_1) = E(\alpha_1 - C \leqq f \leqq \beta_1 - C) \text{ и т. д.}$$

Теорема. Монотонная функция измерима (J).

Доказ. Пусть, напр., $f(x)$ не убывающая; всякому интервалу $\alpha_1 \leqq f \leqq \beta_1$ соответствует интервал (или точка) для x: $a_1 \leqslant x \leqslant b_1$, который измерим.

Следствие 1. Частично-монотонная ф-ция измерима (J).

Следствие 2. Всякая аналитическая ф-ция измерима (J) во всяком интервале для x, где она регулярна и реальна, ибо она там и частично-монотонна.

В частности, все функции, рассматриваемые в элементарном анализе, как то: рациональные, целые и дробные, алгебраические, показательные, логарифмические, тригонометрические, измеримы (J).

Примечание. Но нельзя доказать, что сумма двух или нескольких измеримых (J) функций также измерима (J); это здесь неверно.

Функция ограниченной вариации тоже может и не быть измеримой (J). Наконец, не всякая непрерывная функция измерима (J). Ниже мы дадим этому пример.

§ 11. Пусть $f(x)$ ограниченная измеримая (J) функция в замкнутом интервале (a, b). Пусть в (a, b) $\alpha \leqq f(x) \leqq \beta$. Разделим интервал (α, β) на n частей точками $\alpha_0 = \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n = \beta$; обозначим:

$$E(\alpha_{k-1} \leqq f \leqq \alpha_k) = A_k$$

и возьмем суммы:

$$s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k-1}\, lA_k\,; \quad S = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, lA_k\,.$$

При $k = n$, мы обозначаем $A_n = E(a_{n-1} \leqq f \leqq \beta)$.

Будем увеличивать число точек деления интервала (α, β), уменьшая до нуля длину каждой части; $(\alpha_{k-1}\, \alpha_k)$; от этого, как легко видеть, s увеличивается, а S уменьшается. Но так как $s < S$, то существуют: $\lim s \leqq \lim S$.

Пусть длины всех интервалов $(\alpha_{k-1}, \alpha_k) < \varepsilon$; имеем

$$S - s = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \alpha_{k-1})\, lA_k < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} lA_k = \varepsilon\,(b - a);$$

это показывает, что $\lim(S - s) = 0$, т.-е. $\lim S = \lim s$.

Назовем этот общий предел интегралом (J) функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначим:

$$\lim s = \lim S = \int_{a(J)}^{b} f(x)\, dx.$$

Докажем, что значение этого интеграла не зависит от способа деления интервала (a, b), лишь бы длина каждой части деления стремилась к нулю. Пусть мы делим двумя способами интервал (α, β). Первому способу соответствуют суммы s, S и предел $\lim s = \lim S = J$. Второму способу соответствуют суммы s', S' и предел $\lim s' = \lim S' = J'$. „Наложим“ эти два деления друг на друга, т.-е. возьмем третье смешанное деление, производимое точками как первого, так и второго деления; этому делению соответствуют суммы s'', S''. Пусть первое и второе деления продолжены так далеко, что:

$$S - s < \frac{\varepsilon}{2}; \quad S' - s' < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\varepsilon > 0$ произвольное число. Имеем всегда: $S > S'' > s'' > s$; $S > S' > s' > s$; тогда, след, $|S'' - J| < \frac{\varepsilon}{2}$; $|S'' - J'| < \frac{\varepsilon}{2}$, т.-е. $|J - J'| < \varepsilon$, а так как ε произвольное число, то $J = J'$, что и требовалось доказать.

§ 12. **Свойства интеграла** (J)

1) Из определения интеграла (J) следует:

$$\alpha(b-a) \leq \int_{a(J)}^{b} f(x)\,dx \leq \beta(b-a), \quad \text{т.-е.} \quad \int_{a(J)}^{b} f(x)\,dx = \gamma(b-a),$$

где γ некоторое среднее значение между α и β. (Теорема о среднем значении).

В частности, если $f(x)$ непрерывна, то:

$$\int_{a(J)}^{b} f(x)\,dx = f(x_1)(b-a), \quad \text{где } x_1 \text{ некоторое значение } x \text{ в интервале } (a,b).$$

2) Если $C = \text{const.}$, то из определения же следует:

$$\int_{a(J)}^{b} C\,dx = C(b-a);$$

в частности:

$$\int_{a(J)}^{b} dx = b-a.$$

3) Если $C = \text{Const.}$, то:

$$\int_{a(J)}^{b} C f(x)\,dx = C\int_{a(J)}^{b} f(x)\,dx; \quad \int_{a(J)}^{b} [f(x)+C]\,dx = \int_{a(J)}^{b} f(x)\,dx + C(b-a);$$

в частности:

$$\int_{a(J)}^{b} [-f(x)]\,dx = -\int_{a(J)}^{b} f(x)\,dx.$$

Это все непосредственно следует из определения.

4) Если $a < c < b$, то:

$$\int_{a(J)}^{b} f(x)\,dx = \int_{a(J)}^{c} f(x)\,dx + \int_{c(J)}^{b} f(x)\,dx;$$

эта формула непосредственно обобщается на конечное число слагаемых.

Можно определить:

$$\int_{b(J)}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a(J)}^{b} f(x)\,dx.$$

Но теорема об интеграле суммы здесь неверна.

Из § 9, следствия, следует, что, если для ф-ции $f(x)$ существует интеграл (J), то существует и интеграл (R); докажем, что эти интегралы равны. Разделим (a, b) на части точками $x_0 = a$, $x_1, x_2, \ldots x_n = b$; пусть l_k и λ_k верхняя и нижняя границы ф-ции $f(x)$ в интеграле (x_{k-1}, x_k). Применяя свойства (1) и (4), найдем:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\lambda_k \leq \int_{a(J)}^{b} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, l_k\,;$$

но крайние части этого двойного неравенства стремятся к одному и тому ж пределу — интегралу (R) от $f(x)$; это и доказывает наше предложение.

§ 13. Пример непрерывной функции, не измеримой (J).

Возьмем совершонный, нигде не густой, ансамбль в интервале (0,1) с положительной мерой в смысле Lebesgue'а. Этот ансамбль B получается исключением из отрезка (0,1) исчислимого множества открытых интервалов, которых сумма длин $l < 1$. Точки всех этих интервалов образуют открытый ансамбль A дополнительный к B. Ансамбль A не измерим (J) ибо $l_e A = 1$; но $l_i A = l < 1$, сл., и ансамбль B не измерим (J). Определим теперь функцию $f(x)$ следующим образом: во всех точках ансамбля B $f(x) = 0$; если (α, β) — один из интервалов ансамбля A, то в нем пусть:

$$f(x) = \frac{2(x-\alpha)(x-\beta)}{\alpha-\beta}$$

(т.-е. кривая, представляющая ф-цию $f(x)$ в (α, β), есть парабола с вершиной:

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad y = \frac{\beta-\alpha}{2}).$$

Во всех точках ансамбля A $f(x) > 0$; во всем интервалле (0,1) $f(x)$ непрерывна. Но ансамбли $E(f > 0)$ и $E(f = 0)$ не измеримы (J), т.-е. ф-ция $f(x)$ не измерима (J).

Заметим, что определенная здесь функция $f(x)$ — ограниченной вариации в интервале (0,1); ее положительная вариация равна отрицательной вариации $= \frac{1}{2}$.

Этюды по теории плоских кривых

Д. Синцов

I. Несколько замечаний по поводу книги G. Loria „Spezielle algebraische u. transscendente ebene Kurven“

1. Теория плоских кривых всегда привлекала с глубокой древности и до наших дней внимание исследователей. Чрезвычайное обилие и разнообразие уже открытых и изученных кривых делает в настоящее время желательным не столько установление новых и новых индивидуальных кривых, сколько более полную систематизацию уже изученного материала.

И в этом отношении нет недостатка как в более старых, так и в более новых сочинениях. Мы имеем обширную работу F. G. Teixeira „Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches“, увенчанную в свое время Мадридской академией, появившуюся вторым изданием в 1908—1909 г. в 2-х томах, как 5-й и 6-й томы Собрания сочинений почтенного автора *). Gino Loria написал около того же времени свое упомянутое в заголовке сочинение, которое появилось в 1902 г. на немецком языке, и в 1910 г. появилось 2-ое издание 1-й части, пересмотренное и дополненное. Последнее обстоятельство доказывает вызванный им интерес равно как и интерес такой монографии, вызвавший также появление около того же времени двух книжек H. Wieleitner'a: „Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung“ 1905 (Samml. Schubert № 43) u „Spezielle ebene Kurven“ 1908 (Ib. № 56).

Поэтому я считаю уместным остановиться на работе G. Loria и сделать несколько замечаний, подтверждающих высказанное в начале положение. Это тем более уместно, что места, на которых я собираюсь указать, остались без изменения и во втором издании и, стало быть, не были в свое время отмечены.

2. Остановлюсь прежде всего на двух кривых 3 порядка, о которых G. Lovia говорит в п° 17 стр. 24 своей книги (1-е изд. и тоже 2-е изд.), а именно рассмотренную Korneck'ом (Progr. Oels, 1868) кубическую гиперболу

$$\prod_{1}^{3}{}_{i}(x\,\mathrm{Cos}\alpha + y\,\mathrm{Sin}\,\alpha_i - p_i) = a^3 \qquad (1),$$

*) В последнее время появился еще 3-й дополнительный том, но мне не удалось еще с ним ознакомиться.

геометрическое место точек, опущенные из которых на 3 данные прямые $x \cos\alpha_i + y \sin\alpha_i - p = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ (a) перпендикуляры дают постоянное произведение $(= a^3)$. В том же самом параграфе приводится кривая, рассмотренная J. Alvera (Diss. Rostock, 1879): $xy\ (x + y) = a^3$ (2).

Обе кривые, как отмечает G. Loria, имеют 3 вещественные точки перегиба на бесконечности, и естественно ожидать тесной между ними связи, на что, однако, у G. Loria указаний нет. Нетрудно, однако, эту связь установить: кривая (2) есть предельный случай одного частного вида кривой (I). Действительно, если две из трех прямых (a) взаимно перпендикулярны, и мы примем их за оси координат, то (I) приводится к виду:

$$xy\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1\right) = a'^3 \qquad (1')$$

Если при том 3-я прямая делает на новых осях равные отрезки $(p = q)$, то (I′) примет вид

$$xy\ (x + y - p) = a''^3 \qquad (1'')$$

Перейдем теперь к пределу $p = 0$. Уравнение (1″) переходит в (2), — результат, который получается сразу, если обратить внимание, что (2) соответствует тому частному случаю (1), когда все три прямые (a) проходят через одну точку, две из них взаимно-перпендикулярны и третья делает с ними равные углы.

3. Другой пример представляет кубическая дупликатриса (Cubique duplicatrice) $x^3 = l\,(x^2 + y^2)$ Gohiere de Longchamps *), которой вместе с параболическим листом G. Loria посвящает особую главу (отд II, гл. 13, с. 89 в 1-ом издании и гл. 14 с. 93 во втором). В примечании G. Loria указывает, что кривая встречается уже у Uhlhorn'а в его „Entdeckungen in d. höheren Geometrie", 1809 под именем Toxoïde. Если оставить в стороне построение, действительно весьма простое, но впрочем сразу ясное, если перейти к полярным координатам (и разделить на ρ^2) $\rho = l\cos^{-3}\theta$ (3′) то нетрудно усмотреть, что кривая имеет гораздо большую давность. Действительно, если уравнение(3) переписать под видом $ly^2 = x_2\,(x - l)$, то ясно, что это одна из расходящихся парабол Ньютона, именно его parabola punctata.

Интересно, что и другая разбираемая в той же главе кривая

$$x^3 = a\ (x^2 - y^2) \qquad (4)$$

прямой параболический лист того же G. de Longchamps (там же n° 121, с. 120 Loria, n° 51 с. 90 изд; и тот же n°, с. 93 2-го издания) оказывается также одною из расходящихся парабол Ньютона. Перепишем, действительно, (4) немного иначе:

$$-ay^2 = x^2\ (x - a) \qquad (4')$$

*) Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre. P. 1890.

и изменим положительное направление оси x-ов на противоположное (замена x на $-x$) уравнение примет вид:

$$ay^2 = x^2\ (x + a), \tag{4''}$$

т.-е. кривая не что иное, как Ньютонова parabola nodata.

Заметим, что и косой параболический лист G. de Longchamps (n^0) 22 с. 121, G. Loria, n° 51, с. 90—1-е изд. 94-5—2-е изд.), определяемый уравнением

$$x^3 = a\ (x^2 - y^2) + bxy \tag{5}$$

также оказывается очень близким к расходящимся параболам.

Действ., (5) м. б. приведено к виду:

$$a\ (y - \frac{b}{2a}x)^2 = -x^2\ (x - c), \tag{5'}$$

где для краткости положено $c = a + \frac{b^2}{4a}$, и след., подстановкою $x' = -x$, $y' = = \frac{ay - bx}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, т.-е. поворотом оси y-ов на некоторый угол и обменом положительного и отрицательного направления оси x-ов приводится к тожественному с (4″) виду:

$$a'y'^2 = x'^2\ (x' + c), \tag{5''}$$

но только в косоугольных координатах.

4. Небольшое замечание по поводу 1-ой кривой Krimphoff'а, (Loria, 1-е изд. с. 249, отд. IV, гл. 6n°114, 2-е изд. тот же отд., гл. 7,n°114, с. 296) уравнение которой в обоих изданиях Loria одинаково напечатано:

$$(2x + y)\ (x^2 + y^2)^4 + 2y\ (5y^4 + 10x^2y - 3y^4) - 2x + y = 0 \tag{6}$$

Средний член напечатан неверно,—он должен быть.

$$+ 2y\ (5x^4 + 10x^2y^2 - 3y^4).$$

Правильность такой замены бросается в глаза. Но было бы вряд ли уместно приводить необходимые для проверки довольно продолжительные вычисления.

5. Мое последнее замечание касается кривой, которую в указателе чертежей (табл. VI, n° 43) и в 1-ом и во 2-ом издании Loria называет Doppel-Herz-Kurve, в тексте же самой книги для кривой фиг. 43 совершенно правильно дается уравнение

$$2y = \sqrt{x\ (2a - x)} + \sqrt{x\ (4a - x)}$$

(у G. Cramer, а в его Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, Gén. 1750, стр. 435 — 6, фиг. 134. табл. XVIII) или в рациональном виде по Cramer'у:

$$y^4 + y^2x^2 - 6ay^2x + a^2x^2 = 0$$

(у Cramer'а под 1-ым корнем стоит $x(8a - x)$, т.-е. у G. Loria (с. 180—1-е изд. 190—2-е изд.) заменено 2a через a.

Вышеупомянутое название (Doppel-Herz-K.) Loria придает в тексте (стр. 180, resp. 194) другой кривой, также построенной Cramer'ом (там же, стр. 436—438, табл. XVIII, n° 135), основываясь на словах Cramer'а, не совсем точно переданных у Loria: On voit par là, et on verrait encore plus clairement par un détail, mais un peu long, que la courbe a la figure de deux coeurs qui se pénètrent l'un l'autre par la pointe, et se croisent en B et en b qui sont les deux points doubles que nous a donné le calcul. Ее уравнение:

$$y^4 + x^4 - 2a^2y^2 - 2b^2x^2 + b^4 = 0$$

При $a = b$ кривая распадается, как замечает Cramer, на два эллипса:

$$x^2 + y^2 - a^2 \pm xy\sqrt{2} = 0$$

и имеет 4 двойные точки.

6. В заключение укажу еще на несколько опечаток, не исправленных во 2-ом изд. с. 95—1-е изд. (99 — 2-е изд.) вм. $I^3 - 6I^2 = 0$ д. б. $I^3 - 6J^2 = 0$. Наконец в уравнении Muschellinie A. Dürer'а (228 с., ур. 13—во 2-ом изд., 212 с в 1-ом) вм. $(a^2 - y^2)$ должен стоять множитель $(b^2 - y^2)$.

Отсюда страницы по 1 изданию:

Стран.	Строка	Напечатано	Должно быть
49	3 св.	$b - ctg\ \omega$	$a - c\ .\ tg\ \omega$
49	8 „	$b\ .\ \sin\omega$	$a\ .\ \sin\omega$
49	10 „	$= y(bx - cy)$	$= y(ax - cy)$
49	15 „	$y^2 = 2cx$ и $(0, \frac{a}{2}$	$y^2 = 4cx$ и $(0,a)$
81	11 сн.	$x + a = 0$	$x - a = 0$
182	17 св.	$a x^2 =$	a^2x^2
212	13 „	Кривая 55a не на табл. VIII, а на табл. VII	
212	21 „	$+\frac{y}{a-1}$	$+\frac{y}{a-z}$
246	13 сн.	$x^2 + y^2 = 1 + \sin^2 2\varphi$	$x^2 + y^2 = r^2(1 + \sin^2 2\varphi)$
310	3 „	в формуле (4) после x^4 должно стоять $= 0$,	
366	14 „	$Y = \varphi(x,y)$	$Y = \psi(x,y)$
481	11 „	в выражении y при R—v пропущен множитель $\sin\varphi$	

II. Об одной любопытной циссоидальной кривой

Предыдущему м. б. несколько противоречит, что следующий за 1-ым этюд я посвящаю одному частному случаю, не вполне м. б. новому, но который привлекает к себе внимание некоторыми своими особенностями и удобством для приложений.

1. Закон образования. Как известно (см., напр., H. Wieleitner „Spez. Kurven", Ab. I) циссоидою или киссоидою называют вообще кривую, построенную при помощи двух данных кривых Г и Г′ и точки О, лежащей или не лежащей на них, по такому условию, что из О проводим секущие до пересечения с Г и Г′ в точках M и M′ и на том же радиусе OMM′ от O откладываем $ON = \overline{MM'}$. Геометрическое место точки N и есть искомая кривая.

Применим это построение к такому случаю: за Г′ возьмем параболу $y^2 = 2px$(a) за Г — ее круг кривизны в вершине (имеющий с кривою прикосновение 3-го порядка и лежащий целиком внутри параболы) $(x-p)^2 + y^2 = p^2$ или $x^2 + y^2 - 2px = 0$(в), а за точку О — общую точку этих кривых.

В полярных координатах уравнение параболы:

$$r = 2p \frac{\cos\Theta}{\sin^2\Theta},$$

круга кривизны в вершине $r = 2p \cos\Theta$.

Таким образом, полярное уравнение искомой кривой

$$r = 2p \frac{\cos^3\Theta}{\sin^2\Theta}$$

или в прямоугольных координатах (О начало).

$$(x^2 + y^2)\, y^2 - 2p\,x^3 = 0 \tag{1}$$

Это кривая 4. порядка, циркулярная и уникурсальная. Ее уравнение в параметрической форме $(x = ty)$:

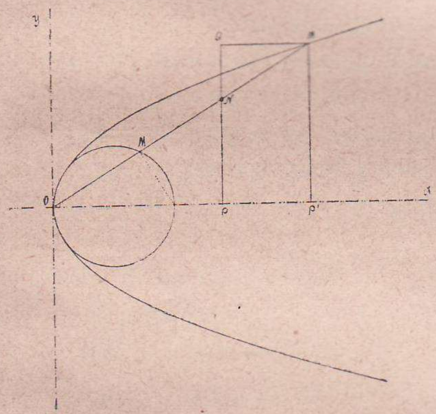
$$x = \frac{2pt^4}{1+t^2}, \qquad y = \frac{2pt^3}{1+t^2} \tag{2}$$

2. Приближенное построение кривой. Написавши уравнение кривой под видом $x^2(y^2 - 2px) + y^4 = 0$, заключаем, что не м. б. точек кривой в той части плоскости, где $y^2 - 2px > 0$, т. е. вне производящей параболы. Написав же под видом $(x^2 + y^2 - 2px)\, y^2 + 2px\ (y^2 - x^2) = 0$, видим, что проведя через начало биссектрису осей $y = \pm x$ выделим еще две области, где нет точек кривой: *вне* круга (в) при $y^2 > x^2$ и внутри его при $y^2 < x^2$.

3. Асимптоты. Касательною на безконечности является безконечно удаленная прямая; две другие асимптоты мнимые и суть изотропные прямые Но интересно, что кривая имеет *криволинейную асимптоту*, которой служит

производящая парабола (Γ'), и притом в этом можно убедиться чисто геометрическими соображениями. Действительно, если из точки M' параболы (а), соотв. углу Θ, опустить перпендикуляр $M'Q$ на продолженную ординату соотв. точки N кривой (1), то $NM' = OM = 2p \operatorname{Cos}\Theta$ и $\angle QM'N = \Theta$, а потому $NQ = p \sin 2\Theta$. Ясно, что $\lim NQ = 0$ при $\Theta \to 0$ и так как лежащая на той же ординате точка параболы (а) лежит между N и Q, *ибо ордината* (1) *менее* ординаты (а), то тем более их расстояние имеет своим пределом 0 для $\Theta \to 0$. Можно было бы, конечно, вычислить непосредственно и самую разность ординат.

Ордината кривой (1):



$$N'P = y = 2p \frac{\operatorname{Cos}^3\Theta}{\operatorname{Sin}\Theta},$$

Ордината параболы (а) соотв. тому же x:

$$N'P = y = 2p \frac{\operatorname{Cos}^2\Theta}{\operatorname{Sin}\Theta}$$

$$PQ : y = 2p \frac{\operatorname{Cos}\Theta}{\operatorname{Sin}\Theta}$$

Поэтому разность $N'N'$, о которой идет речь

$$\overline{NN'} = \frac{p \operatorname{Sin}2\Theta. \operatorname{Cos}\Theta}{1 + \operatorname{Cos}\Theta}$$

N' на чертеже не показано.

Примеры криволинейных асимптот не так обильны и частью несколько искусственны, и с этой стороны рассматриваемая кривая довольно интересна.

4. Тангенциальное уравнение кривой. *1-й прием.* Исключение σ, x, y, z из уравнений: $\sigma u = 2xy^2 - 6px^2z$, $\sigma v = 2x^2y + 4y^3$, $\sigma w = -2px^3$ $ux + vy + wz = 0$ дает в результате (для упрощения вычислений полагаем $\sigma = 2$ и сокращаем)

$$v^2 (27p^2 v^2 - 72 \; puw + w^2) - \frac{2 \; uw}{p} (8 \; pu - w)^2 = 0 \tag{3}$$

уравнение 4-й степени относительно u, v, w.

2-й прием. Из параметрического уравнения кривой находим:

$$u = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(1 + 3t^2)\, t}{2\,(1 + 2t^2)}, \; v = y - x\frac{dy}{dx} = \frac{p}{t\,(1 + 2t^2)}$$

Исключая t, приходим к уравнению

$$[27 p^2 - 72 puv + u^2] - \frac{2uv}{p} (v - 8 \; pu)^2 = 0. \tag{3'}$$

уравнение совпадающее с предыдущим, если между координатами установить связь: переменным u, v, w в (3) соответствуют: $u, -1, v$ в (3′).

Итак наша кривая есть кривая 4-го класса.

5. Особенные точки и касательные. Начало координат (0,0) есть тройная точка, — в уравнении (I) отсутствует не только свободный член, но

и члены 1-го и 2-го измерения в x, y, и потому при $x = 0$, $y = 0$ уничтожаются как сама f так и ее производные 1-го и 2-го порядка; из производных же 3-го порядка $f'''_{x^3} = -12p \neq 0$, и потому уравнение касательных в этой точке

$$-12p. \; X^3 = 0.$$

Все три касательные совпадают, (0,0) есть **точка затупления** (Spitzpunkt). Кривая вся лежит по одну сторону касательной в этой точке.

Других особенных точек кривая не имеет ни конечных, ни в бесконечности. Интересно, что для этой кривой можно проверить справедливость разложения присущей ей особенности высшего порядка на элементарные особенности.

Определим с этою целью сначала **точки перегиба**. Приведя (I) к однородному виду, составляем Гессіену, которая будет:

$$-72p^2x^4(x^2 + 6y^2) = 0. \tag{5}$$

Значению $x = 0$ соответствует особенная точка (0,0), и для точек перегиба остается один множитель $x^2 + 6y^2 = 0$, приводящий к 2 мнимым точкам перегиба.

Тогда по формулам Плюккера $i = 3m(m - 2) - 6d - 8r$ приходим к уравнению:

$$3d + 4r = 11, \tag{6}$$

целочисленные решения которого суть $d = 1$, $r = 2$, как это и дается, напр. у H. Wieleitner'а для точки затупления (Spez. Kurven, 165).

Полученные характеристики особенной точки надо, однако, проверить на выражении для класса кривой $n = m(m - 1) - 2d - 3r$.

Получаем $n = 4$, — как мы действительно и получили, составляя на самом деле тангенциальное уравнение кривой.

Род кривой

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - d - r$$

также получается при этом равным 0, как и д. б, так как наша кривая, как мы уже видели, уникурсальная.

До сих пор ничто не указывает на существование каких-либо еще особенностей нашей кривой. Но если обратимся к двойственным Плюккеровским формулам

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta - \rho$$

$$m = n(n-1) - 2\delta - 3\rho$$

$$\nu = 3n(n-2) - 6\delta - 8\rho$$

где δ — число двойных касательных, и ρ число возвратных касательных (т.-е. точек перегиба), то при подстановке уже найденных m, n, r и ρ, мы приходим к $\rho = 1$ что указывает на присутствие у кривой двойной касательной.

Для определения последней обращаемся к уравнению (3), в котором полагаем $w = 1$. Тогда условия $\phi'_u = 0$; $\phi'_v = 0$ приводят к единственному решению $v = 0$, $8pu - 1 = 0$, т. е. **прямая** $x + 8p = 0$ **есть двойная**

касательная кривой (1). Действительно, подставляя в (1) значение $x = -8p$ получаем для y уравнение

$$(y^2 + 32p^2)^2 = 0, \tag{7}$$

т.-е. прямая $x + 8p = 0$ есть **уединенная касательная** и $(-8p, \pm 4pi\sqrt{2})$ — ее мнимые точки прикосновения.

6. **Радиус кривизны.** Обращаясь к параметрической форме (2), составляем выражение радиуса кривизны $R = \pm p t^2 \frac{(9 + 4t^2)^{3/2}}{6 + t^2}$; (8)

при $t = 0$, $R = 0$: **в точке затупления радиус кривизны обращается в 0.** К тому же результату придем, исходя из полярного уравнения кривой.

7. **Эволюта.** Уравнение эволюты кривой (1) получим, исходя из уравнения (4), в параметрической форме под видом:

$$X = \frac{3pt^2(9 + 2t^2)}{6 + t^2}, \qquad Y = -\frac{8pt^3(3 + t^2)}{6 + t^2} \tag{9}$$

Эволюта проходит через точку затупления. При t безконечно малом кривая ведет себя, как кривая

$$\xi = \frac{3pt^2 9}{6}, \qquad \eta = -\frac{8pt^3 . 3}{6},$$

т.-е. как полукубичная парабола $p\eta^2 = \frac{128}{729}\xi^3$

Она, т. о., имеет в начале координат точку возврата 1-го рода с радиусом кривизны равным нулю.

Исследования из области теории геодезических линий и геодезических кругов

Геодезические круги и геодезически параллельные кривые [1]

Т. Котов (†)

В теории поверхностей термин „геодезический круг“ употребляется различными авторами в различном смысле.

Как известно, круги в плоскости являются ортогональными траэкториями пучка прямых, проходящих через некоторую точку; вместе с тем круги могут быть определены, как кривые постоянной кривизны.

Беря первое свойство кругов за основное, Bianchi называет геодезическими кругами кривые, которые получаем, если отложим на всех геодезических линиях, проходящих через некоторую точку поверхности, длину, называемую им радиусом геодезического круга, и соединим концы; подобно кругам, эти кривые всегда замкнуты и пересекают под прямым углом все геодезические линии однако, в общем случае геодезическая кривизна их непостоянна.

Darboux, исходя из второго свойства кругов, называет геодезическими кругами кривые постоянной геодезической кривизны. В дальнейшем я буду называть геодезическими кругами кривые постоянной геодезической кривизны. В настоящей работе я занимаюсь исследованием некоторых свойств ортогональных траэкторий семейства геодезических линий, причем попутно разбираю случай, когда свойства геодезических кругов Bianchi и Darboux имеют место одновременно.

Рассмотрим геодезически полярную или геодезически параллельную систему геодезических линий и их ортогональных траэкторий. Геодезически параллельные кривые я буду называть параллельными. Примем геодезические линии за координатные линии $v = \text{const.}$, а ортогональные траэктории за $u = \text{const}$. В указанной системе координат линейный элемент поверхности имеет вид

$$ds^2 = du^2 + C^2 dv^2.$$

Геодезическая кривизна $\frac{1}{\rho_u}$ кривых $u = \text{const.}$ для линейного элемента

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$$

---

[1]) Доложено в заседании Харьковского Математического Общества 26 марта 1922 г.

дается формулой [1]) $$\frac{1}{\rho_u} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},$$

которая в нашем случае напишется

$$\frac{1}{\rho_u} = -\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial u}.$$

Для того, чтобы кривые $u = \text{const.}$ были кривыми постоянной геодезической кривизны, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{1}{\rho_u}$ было функцией только от u:

$$\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial u} = \varphi(u)$$

Интегрируя, получим условие, налагаемое на коэффициенты линейного элемента

$$C = U.V,$$

где U — функция только от u, V — функция только от v.

Форма линейного элемента

$$ds^2 = du^2 + U^2.\,dv^2_1$$

где $Vdv = dv_1$, показывает, что поверхность наложима на поверхность вращения и что геодезические линии $v = \text{const.}$ и их ортогональные траэктории образуют изотермическую систему.

Таким образом, необходимым и достаточным условием для того, чтобы ортогональные траэктории геодезических линий были геодезическими кругами, является их изотермичность.

Можно доказать, что условием, необходимым для того, чтобы параллельные кривые были геодезическими кругами, является постоянная кривизна поверхности вдоль каждой параллельной кривой.

В самом деле

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\frac{\partial C}{\partial u}}{C}\right] = \frac{\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}}{C} - \left(\frac{\frac{\partial C}{\partial u}}{C}\right)^2$$

Из условия, что $\frac{\frac{\partial C}{\partial u}}{C}$ есть функция только от u, вытекает, что

$$\frac{\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}}{C}$$

есть функция только от u. Но по формуле Гаусса, кривизна поверхности K выражается формулой:

$$K = \frac{\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}}{C}$$

[1]) Bianchi. Vorlesungen über Differentialgeometrie. 2-e Auflage, 1910 г., стр. 147.

следовательно, K есть функция только от u, т.-е. кривизна поверхности вдоль каждой параллельной кривой — геодезического круга — постоянна.

Обратное заключение, вообще говоря, несправедливо. Параллельные кривые при постоянной кривизне поверхности вдоль каждой из них могут не быть геодезическими кругами.

Однако, можно показать, что если кривизна поверхности вдоль каждой параллельной кривой семейства постоянна, и если хоть одна из них — геодезический круг, то все остальные параллельные кривые этого семейства — также геодезические круги.

Иначе говоря, в семействе параллельных кривых с постоянной кривизной поверхности вдоль каждой кривой или все кривые — геодезические круги или ни одна не является геодезическим кругом.

Гауссово уравнение дает при нашем предположении $K = U$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = -CU \text{ или } \frac{d^2 C}{du^2} = -CU.$$

Выберем два линейно независимых решения этого дифференциального уравнения: $\varphi(u)$ с начальными условиями $\varphi(0)=1$, $\varphi(0)=)$ и $\psi(u)$ с начальными условиями $\psi(0) = 0$, $\psi(0) = 1$.

Общий интеграл дифференциального уравнения имеет вид:

$$C = V\varphi(u) + V_1\psi(u),$$

где V и V_1 — функции только v.

Далее возможны два предположения:

1) Кривая $u = 0$ представляет правильную кривую линию — геодезический круг. По свойствам геодезически параллельной системы координат

$$C(0, v) = 1,$$

так как дуга вдоль кривой $u = 0$ измеряется приращением параметра v.

Подставляя $u = 0$ в выражение общего интеграла, получаем

$$V = 1.$$

Так как кривая $u = 0$ геодезический круг, то

$$\left[\frac{\frac{\partial C}{\partial u}}{C}\right]_{u=0} = \text{const},$$

т.-е.

$$\left[\frac{\varphi(u) + V_1\psi(u)}{\varphi(u) + V_1\psi(u)}\right]_{u=0} = \text{const}$$

при всяком значении v, откуда:

$$V_1 = \text{const}.$$

Но тогда

$$C = \varphi(u) + \text{const}\ \psi(u),$$

т.-е. все линии $u = \text{const}$ геодезические круги.

Линейный элемент показывает, что поверхность в этом случае наложима на поверхность вращения так, что $u = \text{const}$ совпадают с параллелями, $v = \text{const}$ с меридианами поверхности вращения.

2) Предположим, что геодезические линии $v = \text{const}$ проходят все через неподвижную точку P, которая служит полюсом геодезически полярной системы координат и соответствует $u = 0$.

Тогда по свойствам полярной системы

$$C(0, v) = 0 \qquad \left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)_{u=0} = 1$$

т.-е. имеем по первому свойству условие

$$V = 0.$$

Отсюда

$$C = V_1 \psi(u) \qquad \frac{\partial C}{\partial u} = V_1 \psi'(u)$$

и по второму свойству C, принимая во внимание выбранную функцию $\psi(u)$

$$V_1 = 1$$

$$C = \psi(u).$$

Этот вид коэффициента C линейного элемента указывает, что кривые $u = \text{const}$ являются геодезическими кругами; поверхность наложима на поверхность вращения.

В случае геодезически полярной системы координат, полюс можно считать за предельную кривую — геодезический круг, на котором кривизна поверхности постоянна. Таким образом, теорема доказана.

2-ой случай можно выделить особо.

Если через точку P проведем геодезические линии и отложим на них от P постоянные длины *u*, то, если вдоль кривых $u = \text{const}$ кривизна поверхности постоянна, эти кривые являются геодезическими кругами (кривыми постоянной геодезической кривизны).

Мы видим, что высказанное раньше необходимое условие, чтобы параллельные кривые были геодезическими кругами, является достаточным, если хоть одна параллельная кривая есть геодезический круг. Вместе с тем, чтобы на поверхности существовала ортогональная система геодезических линий и параллельных геодезических кругов, необходимо и достаточно, чтобы поверхность была наложима на поверхность вращения.

На поверхности, наложимой на поверхность вращения переменной кривизны, только линии, соответствующие меридианам и параллелям, образуют ортогональную систему геодезических кривых и геодезических кругов.

На поверхности постоянной кривизны, все кривые, геометрическое место точек, равноудаленных геодезически от какой-либо точки, обладают постоянной геодезической кривизной.

Таким образом, на поверхностях постоянной кривизны, и только на них, все геодезические круги Bianchi являются геодезическими кругами Darboux. Однако, не все круги Darboux являются кругами Bianchi (напр., на псевдосфере кривизны $-\frac{1}{R^2}$ кривые геодезической кривизны $<\frac{1}{R}$ не имеют центра.

Рассмотрим на поверхности, наложимой на поверхность вращения, ортогональное семейство геодезических линий $v = \text{const}$ и геодезических кругов $u = \text{const}$. Пусть $K = f(u)$ кривизна поверхности задана. Найдем, какому закону подчинена $\frac{1}{\rho_u}$ геодезическая кривизна кривых $u = \text{const.}$, соответствующих параллелям.

Воспользуемся формулой Liouville'я [1]) из теории поверхностей для ортогональной системы координат:

$$K = \frac{\partial}{\partial s_v}\left(\frac{1}{\rho_u}\right) + \frac{\partial}{\partial s_u}\left(\frac{1}{\rho_v}\right) - \left(\frac{1}{\rho_u}\right)^2 - \left(\frac{1}{\rho_v}\right)^2,$$

где $\frac{\partial}{\partial s_u}$ представляет производную, взятую по дуге параметрической линии $u = \text{const.}$, аналогично $\frac{\partial}{\partial s_v}$ производную, взятую по дуге линии $v = \text{const.}$

Подставляя в правую часть $ds_v = du$, $\frac{1}{\rho_v} = 0$, $\frac{1}{\rho_u} = U$, получим:

$$K = \frac{dU}{du} - U^2, \tag{α}$$

обыкновенное дифференциальное уравнение искомой функции U от независимой переменной u.

Рассмотрим сначала поверхности постоянной кривизны.

1) Пусть $K = \frac{1}{R^2}$ постоянная положительная величина. Уравнение (α) напишется:

$$\frac{dU}{du} = U^2 + \frac{1}{R^2}.$$

[1]) Bianchi, стр. 150.

Интегрируя, получим

$$U=\frac{1}{R}\operatorname{tang}\frac{u-c}{R},$$

где c произвольная постоянная, которая существенного значения не имеет. При $u=c$, имеем $U=0$, т.-е. геодезический круг является геодезической линией. При $u=R.\frac{\pi}{2}+c$ геодезический круг обращается в точку; имеем полярную геодезическую систему, как на шаре.

2) Пусть поверхность постоянной отрицательной кривизны $K=-\frac{1}{R^2}$. Уравнение (α) напишется

$$\frac{dU}{du}=U^2-\frac{1}{R^2}.$$

Интегрируя, получаем

$$U=\frac{1}{R}\frac{1+C\,e^{\frac{2u}{R}}}{1-C\,e^{\frac{2u}{R}}}$$

откуда при $C>0$, можем написать, полагая $C=e^{-\frac{2}{R}c}$

$$\text{(1-й тип)}\qquad U=\frac{1}{R}\frac{1+e^{\frac{2}{R}(u-c)}}{1-e^{\frac{2}{R}(u-c)}}=-\frac{1}{R}\operatorname{cotgh}\frac{u-c}{R};$$

при $C<0$, перепишем U в виде:

$$\text{(2-й тип)}\qquad U=\frac{1}{R}\frac{1-e^{\frac{2}{R}(u-c)}}{1+e^{\frac{2}{R}(u-c)}}=-\frac{1}{R}\operatorname{tangh}\frac{u-c}{R}.$$

При $C=0$ и $C=\infty$, имеем

$$\text{(3-й тип)}\qquad U=\frac{1}{R}\quad,\quad U=-\frac{1}{R}.$$

Произвольная постоянная c существенного значения не имеет: она фиксирует начало счета для u.

Так как

$$\operatorname{ctgh}0=\infty,\ \operatorname{ctgh}\infty=1,\ \operatorname{ctgh}(-x)=-\operatorname{ctgh}x,$$

то первая форма U соответствует геодезически полярной системе с полюсом в $u=c$. При $u=\infty$ получаем предельный геодезический круг с $U=-\frac{1}{R}$.

Вторая форма U соответствует геодезически параллельной системе с геодезической линией $u=c$; при $u=\infty$ имеем предельный геодезический круг $U=-\frac{1}{R}$ (как известно $\operatorname{tgh} 0=0$, $\operatorname{tgh} \infty=1$, $\operatorname{tgh}(-x)=-\operatorname{tgh} x$).

Третий тип соответствует геодезическим кругам постоянного радиуса $\pm\frac{}{R}$

Пример первого типа геодезических кругов дают параллели поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны эллиптического типа с конической точкой. Второй тип дают параллели поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны гиперболического типа. На псевдосфере параболического типа параллели имеют постоянную геодезическую кривизну $\frac{1}{R}$ третьего типа.

Края поверхности, состоящие из особенных линий, обрывают систему геодезических кругов. Таким образом, на поверхности существует вообще только часть рассмотренных нами систем геодезических кругов до пересечения с краями поверхности.

3) На развертывающихся поверхностях

$$\frac{dU}{du}=U^2,$$

откуда

$$-\frac{1}{U}=u-c \text{ или } U=\frac{1}{c-u},$$

решение, соответствующее пучку концентрических окружностей плоскости.

Кроме того, имеем решение

$$U=0,$$

соответствующее двум ортогональным семействам геодезических линий, которые по теории Liouville'a существуют только на развертывающихся поверхностях.

В общем случае поверхности, наложимой на поверхность вращения переменной кривизны, дифференциальное уравнение (α) дает геодезическую кривизну системы параллельных геодезических кругов с постоянной кривизной поверхности вдоль каждого круга.

Уравнение (α) типа Riccati. При заданном K, оно определяет геодезическую кривизну семейства параллельных геодезических кругов ∞^1 различных поверхностей вращения, неналожимых друг на друга.

Если известно U на одной из этих поверхностей, то для всех остальных мы найдем U при помощи квадратур.

Sur les courbes parallèles et les cercles géodésiques

par T. Kotoff (Kharkoff).

Résumé.

L'auteur examine les propriétés des courbes parallèles de la surface. Il démontre que si une famille de courbes parallèles à courbure de surface constante le long de chaque courbe contient un cercle géodésique, toutes ses courbes sont des cercles géodésiques (au sens de M. Darboux).

L'auteur examine la relation entre la courbure géodésique des parallèles et la courbure de la surface de revolution

$$\frac{dU}{du} = U^2 + K$$

et s'arrête principalement sur les surfaces à courbure constante.

Геометрический метод определения и исследования деформации линейчатой поверхности

А. С. Вайнфельд

Определение линейчатой поверхности и исследование ее деформации я совершаю на основании трех теорем, для ясности формулировки которых я остановлю внимание читателя на нижеследующем.

Условимся называть классом данной линейчатой поверхности весь ансамбль линейчатых поверхностей, на нее наложимых. Всякую же совокупность линейчатых поверхностей, обладающих одним и тем же, всем им общим, геометрическим свойством,—абсолютным или относительным, безразлично,—и совершенно различных по другим своим геометрическим свойствам, условимся называть семейством поверхностей.

Уравнение всякой линейчатой поверхности можно писать в виде

$$x = y(u) + ve(u)$$

где $y(u)$ определяет директрису, а $e(u)$ орт, фиксирующий направление образующей.

Назовем функции $y(u)$ и $e(u)$, посредством которых это уравнение составлено,—непосредственно-определяющими поверхность функциями.

Другими словами, мы называем директрису и сферическую индикатрису образующих геометрическими элементами поверхности, ее непосредственно определяющими, при установленном помощью того же уравнения соответствии между точками рассматриваемых кривых.

Всякую функцию параметра директрисы, составленную из непосредственно-определяющих поверхность функций и их производных, назовем геометрической функцией поверхности, или ее геометрическим элементом — функцией, если приравнявши такую функцию постоянной, мы тем самым получим критерий особого класса или семейства линейчатых поверхностей. При этом мы всегда предполагаем поверхность отнесенной к ее геодезическим параметрам в системе, состоящей из образующих и их ортогональнных траекторий.

Согласно данному определению, функция

$$k(u) = \left| \left| ee'y' \right| \right| \tag{1}$$

где мы не принимаем в расчет знака тривектора, а лишь его абсолют, является геометрической функцией поверхности: приравнявши ее нулю, получим критерий всех поверхностей наложимых на плоскость (класса плоскости). Назовем этот элемент линейчатой поверхности ее дискриминантом.

Рассматривая только действительные линейчатые поверхности с действительными образующими и исключая совершенно из рассмотрения поверхность цилиндрическую, — тот случай, когда нет сферической индикатрисы образующих, как кривой,— мы всегда можем выбрать в качестве параметра, определяющего точки директрисы, соответствующую дугу индикатрисы, отсчитанную от некоторой на ней точки. При таком положении, $e'^2 = 1$, и для параметра распределения касательных плоскостей γ, входящего, как фактор, снабженный определенным знаком, в формулу Шаля, имеем $\gamma = -\,|ee'y'|$. (1')

Я отделяю эти два элемента, параметр распределения, являющийся по численному значению своему алгебраическим количеством от дискриминанта поверхности, элемента существенно положительного. Когда две поверхности различаются друг от друга только лишь знаком при функции, определяющей их параметры распределения (симметричные поверхности *), то они, имея различные параметры распределения, в то же время имеют один и тот же дискриминант и являются тождественными, с точки зрения абсолютной геометрии, будучи наложимы друг на друга. Для абсолютного определения поверхности нет надобности знать ее параметр распределения, но необходимо знать ее дискриминант.

Перейдем теперь к рассмотрению функции $d(u)$, выражающей расстояние между соответствующими, по образующей, точками произвольно взятой директрисы поверхности и ее стрикционной линии. Эта функция, при принятом нами положении $e'^2 = 1$, определяется формулой: $d(u) = -\,y' . e'$ (2)

В статье моей „Стрикционные линии“ я подробно рассмотрел особое семейство линейчатых поверхностей, имеющее своих членов как среди развертывающихся, так и косых поверхностей, критерием которого в упомянутой геодезической системе координат является соотношение $d = \text{const.}$ (в)

Вся группа косых поверхностей этого семейства реализуется всеми поверхностями бинормалей всевозможных кривых двоякой кривизны, включая в число таковых и прямую линию. Вся группа развертывающихся поверхностей семейства реализуется всеми поверхностями коническими и плоскостью. Геометрически все поверхности семейства характеризуются тем, что у них стрикционная линия является ортогональной траекторией образующих. Вследствие возможности для всех поверхностей семейства совмещать директрису—ортогональную траекторию образующих со стрикционной линией, критерий (в) может всегда быть заменен равносильным ему критерием $d = 0$, и, наоборот (чего никак нельзя сказать относительно критерия $\kappa = 0$).

Согласно определению, функция $d(u)$, определяемая формулой (2), есть геометрическая функция поверхности. Назовем этот элемент поверхности ее параметром удаления (директрисы от стрикционной).

---

*) Удерживаем для таких двух, всегда существующих (Beltrami, An. di Mat., VII, p. 105) поверхностей название симметричных, предложенное Bour'ом (J. E. P., c. 39, p. 45).

Обозначая функцию y'^2 через $c(u)$, мы, при нашем положении $e'^2 = 1$, имеем:

$$E(u, v) = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|^2 = v^2 - 2dv + c \tag{3}$$

особенность, характеризующую, при условии действительности прямолинейных образующих и выбора их параметрическими линиями (u), всякую линейчатую поверхность совместно со всяким возможным ее изгибанием, и состоящую в том, что для всякой такой поверхности основная величина первого порядка E всегда представляется многочленом второй степени относительно v, если исключить из рассмотрения, как было сказано, цилиндрическую поверхность и ее частный случай по способу образования — плоскость. *)

Так как в принятой нами геодезической системе координат вектор y' и два орта e' и $|ee'|$, одновременно перпендикулярные к орту e, представляют систему трех компланарных векторов, то на основании формул (1') и (2), имеем для касательного вектора директрисы — ортогональной траектории образующих

$$y' = -de' - \gamma\,|ee'| \tag{4}$$

Обозначая s дугу ортогональной траектории образующих, отсчитанную от некоторой на ней точки в том направлении, куда она возрастает вместе с параметром u, мы имеем $\frac{ds}{du} = \operatorname{mod} y'(u)$, и из (4) получим

$$c = \left(\frac{ds}{du}\right)^2 = d^2 + k^2 \tag{5}$$

Чтобы получить выражение для модуля касательного вектора общей кривой $y(u)$, пересекающей все образующие под углом χ, когда ее параметром примем дугу сферической индикатрисы поверхности, достаточно заметить, что при $e'^2 = 1$, $e.y' = c^{1/2}cs\chi$, $e'.y' = -d$, имеем $k^2 = csn^2\chi - d^2$, откуда

$$c = \frac{k^2 + d^2}{sn^2\chi} \tag{5'}$$

соотношение, принимающее для ортогональной траектории образующих вид формулы (5).

В силу (3) и (5), линейный элемент линейчатой поверхности, отнесенной к нашей геодезической системе, определяется формулой $d\sigma^2 = dv^2 + \{(v-d)^2 + k^2\}\,du$ (f), где v — геодезическое расстояние какой нибудь точки A поверхности от соответствующей, по образующей, точки директрисы — ортогональной траектории $v = 0$, и, следовательно, $v - d(u)$ — расстояние точки A от центральной точки образующей, на которой A лежит.

Исходя из известной формулы для Гауссовой кривизны C линейчатой поверхности, заключаем, что дискриминант ее, определяемый сохраняющейся при изгибании функцией

$$\varkappa = |E\sqrt{-C}| \tag{$\times$}$$

является ее инвариантом при всяком изгибании. С целью точно установить, в чем

*) Из конвексных поверхностей 2-го порядка на эллиптическом параболоиде указанная особенность не выполняется (Bour, J. Ec. Pol., cah. 39, p. 77).

состоит определяемое дискриминантом абсолютное свойство линейчатой поверхности, сохраняющееся для всего ее класса, примем во внимание 1) что ориентация бивектора $|ee'|$ определяет ориентацию асимптотической плоскости линейчатой поверхности, или, что то же самое, ориентацию касательной плоскости ее направляющего конуса и 2) что, при принятом нами положении считать параметром директрисы дугу сферической индикатрисы образующих, вектор $\|ee'|$, определяя направление нормали направляющего конуса поверхности, является ортом. Поэтому, при изгибании поверхности, остающейся постоянно линейчатой, дискриминант ее определяет неизменяющуюся при этом длину проекции касательного вектора директрисы поверхности на нормаль ее направляющего конуса. Когда дискриминант равен нулю, то для всех точек одной и той же образующей обе касательные плоскости, как поверхности так и ее направляющего конуса, совпадают, векторы e, e', y' везде по всей поверхности компланарны, что и сохраняется при ее изгибании. На основании же ($\times$) мы, пользуясь известной теоремой Эннепера, получим, что дискриминант линейчатой поверхности выражает неизменяемую при всяком изгибании длину радиуса кручения асимптотических на стрикционной линии, в то время как параметр распределения выражает радиус кручения кривых асимптотических на стрикционной линии,— неизменяемый при непрерывной деформации поверхности *) и знаком своим классифицирует косые поверхности, разбивая их на два типа, правых и левых. В случае стрикционной линии — ортогональной троектории образующих, имеем,— как следствие из той же теоремы и известного положения о кручениях геодезической и ее геодезических нормалей,— что кручение кривых асимптоматических на такой стрикционной определяется той же функцией места, как кручение самой стрикционной, а потому в этом случае параметр распределения выражает радиус кручения указанной линии, сохраняющийся при непрерывной деформации поверхности.

Рассматривая поверхность переменной Гауссовой кривизны, на которой линии постоянной кривизны являются геодезически - параллельными, назовем для краткости ту из этих линий, на которой Гауссова кривизна переходит через абсолютный maximum по абсолюту, экватором поверхности. Все такие поверхности, имеющие экватор, представляют собою ансамбль гораздо более общего характера, чем ансамбль поверхностей вращения и их изгибаний, содержа последний как частный случай, потому что экватор и его параллели,— в том общем определении их, которое нами дано, — будучи линиями постоянной Гауссовой кривизны, могут и не быть, на основании формулы Liouville'я (Bianchi, Vorl. 10, s. 150) линиями постоянной геодезической кривизны. Когда две поверхности, имеющие экваторы, развертываются одна на другой, эти линии необходимо являются соответственными при наложении. Чтобы найти критерий существования экватора на косой поверхности, достаточно лишь: 1) заметить, что, на основании формул (f) и (x), линией на этой поверхности, где Гауссова кривизна достигает maximum'a по абсолюту $\frac{1}{k^2}$ является ее стрикционная

*) Cesàro, Natürl. Geom., s. 225; Knoblauch, Krum. Fl., s. 257.

$v - d = 0$ и 2) рассмотреть особенное свойство на косых поверхностях системы линий $v - d(u) = \text{const}$. В силу тех же формул (f) и (x) и известного критерия параллельности линий какой-нибудь системы на всякой поверхности, заключаем, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы упомянутая система состояла из линий постоянной кривизны, одновременно между собой геодезически-параллельных, является выполнение $k = \text{const} \neq 0$. На этом основании, экватор реализуется на косой поверхности ее стрикционной, когда последняя является линией постоянной Гауссовой кривизны, или, еще иначе, когда геодезические нормали стрикционной представляют собою на поверхности ее линии наибольшего изменения Гауссовой кривизны. Искомым критерием существования экватора на косой поверхности является, поэтому, условие $k = \text{const} \neq 0$, или, одновременно с последним существующее, $\gamma = \text{const} \neq 0$, и мы приходим к следующему результату:

Критерий $\gamma = \text{const} \neq 0$ выделяет семейство косых поверхностей (косой геликоид, однополый гиперболоид вращения, все линейчатые геликоиды, кроме развертывающегося, и др.), на которых стрикционная является линией постоянной Гауссовой кривизны, максимальной по абсолюту (тем самим, экватором поверхности, в смысле данного нами общего определения последнего понятия). Необходимым условием наложимости линейчатой поверхности R на какую-нибудь поверхность S, имеющую экватор, является принадлежность R к семейству $\gamma = \text{const} \neq 0$, причем экватору поверхности S необходимо соответствует при наложении стракционная линия повесхности R (A).

Исходя из рассмотрения известного уравнения стрикционной линии любого семейства кривых на какой-угодно поверхности (Kommerell, Raumk. und Flächen 21, Bd. 2, s. 177), получим, что стрикционная линия семейства параметрических линий $u = \text{const}$ на любой поверхности, при каком угодно семействе $v = \text{const}$, определится уравнением

$$\left(\frac{G}{EG - F^2}\right)_v = 0 \qquad (\times)$$

где E, F, G основные величины I порядка рассматриваемой поверхности и где поэтому в левой части находится сохраняющаяся при изгибании функция. Применяя $(\times)$ к определению уравнения стрикционной линии линейчатой поверхности, пользуясь для этого (f), легко получим для таковогo:

$$v - d(u) = 0 \qquad (\times\times)$$

откуда заключаем об инвариантности при всяком изгибании линейчатой поверхности функции $d(u)$, как необходимом и достаточном условии инвариантности функции, стоящей в левой части $(\times\times)$. Принимая, дальше, во внимание, что в правой части формулы $(5')$ имеем функцию только от элементов инвариантных при всяком изгибании линейчатой поверхности, и условившись принимать на изгибании директрисы за начало дуг точку, соответственную при изгибании началу дуг на самой директрисе, заключаем, что соотношение $(5')$ сохраняется при всяком изгибании линейчатой поверхности, определяя параметр изгибания директрисы в той функции его дуги, в какой функции дуги директрисы определена дуга сферической индикатрисы образующих. На этом основании приходим к следующему результату: на всяком возможном изгибании линейчатой поверхности 1) ее стрикционной линии соответствует стрикционная линия изгибаний прямолинейных образующих и 2) отрезки кривых последнего семейства, между их стрикционной линией и изгибанием произвольной линии, пересекающей все образующие, вычисляются той же самой функцией d от определенного соотношением (5′) параметра изгибания упомянутой линии, какой функцией от дуги сферической индикатрисы образующих исчислялись на линейчатой поверхности расстояния между соответствующими, по образующей, точками ее стрикционной и упомянутой линии — ее директрисы (B).

Пользуясь уравнением стрикционной (××), мы из (f) легко найдем элемент ее дуги и следовательно для модуля ее касательного вектора

$$\frac{ds}{du} = +\sqrt{d'^2 + k^2} \tag{r}$$

Принимая стрикционную директрисой поверхности $x = y(u) + (v - d)\,e(u)$ и отождествляя составленное таким путем выражение для ее линейного элемента с (1), мы после легкой выкладки ($y'.e' = o$ и в силу (r) $y'^2 = d'^2 + k^2$), найдем

$$y'.e = d'(u) \tag{s}$$

Так как векторы y', e, $\|ee'\|$, лежа постоянно вдоль стрикционной в центральной плоскости образующей, компланарны, то, на основании (s) и (l′), получим для касательного вектора стрикционной линейчатой поверхности:

$$y' = d'e - \gamma\,\|ee'\| \tag{C}$$

Найденными результатами (A) (B) и (C) мы в дальнейшем воспользуемся.

Параметр удаления и дискриминант поверхности, — единственные инварианты, входящие в состав выражения ее линейного элемента, когда отнесем ее к указанным параметрам, — назовем простейшими дифференциальными инвариантами линейчатой поверхности.

В дальнейшем условимся называть определение поверхности, связанное с определенной ее формой так, что одинаковое определение имеют только конгруентные поверхности, ее индивидуальным определением, и отличать таковое от абсолютного определения линейчатой поверхности, для расмотрения которого перейдем к формулировке теоремы 1-ой.

Теорема 1-ая. Класс всякой линейчатой поверхности вполне и взаимно-однозначно определяется заданием двух функций для ее простейших дифференциальных инвариантов, и только в случае плоскости класс ее характеризуется одним только заданием для дискриминанта $k = 0$, при произвольном задании функции, определяющей параметр удаления.

Для доказательства нам достаточно показать, что длина линейного элемента поверхности, с одной стороны, и функции, выражающие простейшие дифференциальные инварианты — с другой, определяя друг друга, находятся во взаимно-однозначном соответствии. Когда заданы определенными функциями элементы d и k, то, на основании формулы пятой получится определенная функция для элемента c (u), и тем самым, на основании формулы (3), основная величина E (u, v) запишется определенным полиномом 2-ой степени относительно v; следовательно, однозначно определится и длина линейного элемента. На основании же доказанной инвариантности, при изгибании поверхности, функций определяющих ее дискриминант и параметр удаления,— данной длине линейного элемента, характеризующей весь ансамбль изгибаний и в частности класс поверхности, соответствует только одна пара порознь определенных функций для элементов d и k. Таким образом, геометрические функции поверхности, ее дискриминант и параметр удаления, представляют собою те элементы, которыми линейчатая поверхность в абсолютной геометрии характеризуется.

Для доказательства второй части теоремы, достаточно показать, чем существенно отличается плоскость, рассматриваемая как поверхность линейчатая от всех остальных линейчатых, и разыскать класс этой поверхности.

Изучая линейчатую поверхность вообще, мы отнесли ее к ортогональной системе параметрических линий, состоящей из прямолинейных образующих и их ортогональных траекторий. Плоскость отличается от всех остальных линейчатых тем, что она покрыта бесчисленным множеством таких систем, причем каждой такой системе соответствует один вполне определенный способ рассмотрения ее, как линейчатой поверхности. Все эти способы сводятся только к двум основным типам: плоскость можно рассматривать 1) как поверхность, образованную нормалями какой-нибудь на ней лежащей кривой — ее директрисы и 2) как образованную прямыми, исходящими из какой-нибудь ее точки. Как при том, так и при другом способе рассмотрения, сферической индикатрисой e (u) образующих плоскости является окружность, на ней лежащая, векторы e, e', y' постоянно компланарны, и дискриминант плоскости

$$\pm \left| e e' y' \right| = 0 \tag{g}$$

Так как, в случае плоскости, сферическая индикатриса образующих совпадает со сферической индикатрисой касательных к директрисе, то на основании формул (5) и (g) имеем $d(u) = \rho(u)$ (h), где ρ есть радиус кривизны директрисы.

Следовательно, стрикционной линией плоскости, при каждом способе рассмотрения, является эволюта взятой директрисы, которая будет действительной кривой при способе 1-го типа, и точкой при способе 2-го типа.

Возьмем определенный способ рассмотрения 1-го типа, т.-е. рассмотрим данную кривую A плоскости, как ее директрису, а эволюту последней B, как ее определенную стрикционную линию. Из рассмотрения линейного элемента плоскости, отнесенной к геодезической системе этого типа, непосредственно заключаем о наложимости на нее группы поверхностей касательных любой кривой двоякой кривизны, изгибанием которой на плоскости служит кривая B. Для всей этой группы поверхностей, наложимых на плоскость, если директрисой ее рассматривать кривую A,— параметр удаления, на основании найденного мною результата (B), определяется одной и той же функцией по формуле (h).

Легко показать, что вся эта группа характеризуется заданием кривой B, как стрикционной линии плоскости; при таком задании, функция, аналитически характеризующая группу, выражающая параметр удаления всех поверхностей группы, определится формулой

$$d(u) = \int \rho_1(u)\,du \quad (k),$$

где ρ_1 радиус кривизны кривой B, эволюты кривой A, выраженный в функции параметра u эвольвенты. Варьируя кривую B, т.-е. выбирая стрикционными линиями плоскости различные кривые на ней лежащие, мы получим различные группы наложимых на плоскость поверхностей, так называемых развертывающихся, каждая из которых аналитически характеризуется функцией, определяемой по формуле (k), а геометрически характеризуется задаваемой кривой, как стрикционной линией плоскости.

При 2-ом способе рассмотрения плоскости, как линейчатой поверхности, мы из соответствующей формулы для линейного элемента непосредственно обнаружим наложимость на нее всякой конической поверхности. Если мы, в качестве стрикционной линии, обращающейся при этом способе рассмотрения в точку, возьмем какую-нибудь точку бесконечно-удаленной прямой плоскости, то обнаружим наложимость на нее всякой цилиндрической поверхности. В случае конических $d = \text{const}$, в случае цилиндрических $d = \infty$. Таким образом, функция, определяющая параметр удаления, характеризуя каждую отдельную группу поверхностей, наложимых на плоскость, не характеризует ее класса, вполне и единственно определяемого, согласно формуле (g), заданием для дискриминанта $k = 0$.

Рассмотрим функцию, определяемую формулой

$$p(u) = -\,|\,ee'e''\,| \tag{6}$$

выражающую геодезическую кривизну сферической индикатрисы образующих. Так как равенство $p = \text{const}$ является критерием семейства поверхностей,— при $p = 0$, поверхностей с направляющей плоскостью (гиперболический параболоид, плоскость, косой геликоид), либо при $p = \text{const} \neq 0$ семейства таких, у которых направляющий конус есть конус вращения (линейчатые геликоиды, однополые гиперболоиды вращения),— то функция, определяемая формулой (6), есть геометрическая функция поверхности. Покажем, что заданием функции для одного этого элемента поверхности по форме своей однозначно определяется сферическая индикатриса образующих, если только задаваемая функция однозначна, непрерывна и имеет производную также однозначную и непрерывную. Обозначивши φ, ρ_1, ρ_2, соответственно угол между главной нормалью индикатрисы и нормалью сферы, радиусы первой и второй кривизны индикатрисы, мы из равенств $\varphi = \operatorname{arctg} p$; $\rho_1 = \operatorname{cs}\varphi$; $\dfrac{1}{\rho_2} = \dfrac{d\varphi}{du}$ получим для определения ее первой и второй кривизны: $\dfrac{1}{\rho_1} = \sqrt{1 + p^2}$; $\dfrac{1}{\rho_2} = \dfrac{p'}{1 + p^2}$ формулы, которыми индикатриса, как своими двумя натуральными уравнениями, по форме своей однозначно определится.

Дискриминант поверхности, элемент пригодный и необходимый для абсолютного ее определения, не может фигурировать при ее индивидуальном определении. Две симметричные линейчатые поверхности, являясь тождественными в абсолютной геометрии поверхности, в то же время не конгруентны, не могут получаться одна из другой помощью непрерывной деформации какой-либо одной из них только оттого, что различаются знаком параметра распределения, неизменного при такой деформации, и представляют собою, поэтому, две отдельные поверхности, индивидуально характеризующиеся знаком параметра распределения. На этом основании, при индивидуальном определении поверхности, дискриминант ее должен быть заменен ее параметром распределения касательных плоскостей.

Назовем элемент поверхности p, определяющий сферическую индикатрису образующих, а следовательно и направляющий конус поверхности, ее направляющим параметром, а три элемента поверхности,— направляющий параметр p, параметр удаления d и параметр распределения γ,— основными ее параметрами. Всякую функцию, составленную из основных параметров и их производных, представляющую собою геометрическую функцию поверхности, назовем ее параметром связи. Согласно определению, таким элементом линейчатой поврхности является функция, определяемая формулой:

$$q = e.\left\{ \| y'' e' | + \| e'' y' | \right\} \tag{7}$$

В самом деле, в силу равенств $\| e e'' | = p e'$, $| y' e e'' | = -pd$ и результата дифференцирования ($1'$), мы, из формулы (7) имеем соотношение, выполняющееся при всякой директрисе поверхности:

$$q(u) = \gamma' - 2dp \tag{8}$$

Дифференцируя по p равенство $\gamma' - 2dp = 0$ найдем необходимые и достаточные условия обращения в нуль функции $q(u)$, при неизменении функций — элементов $d(u)$, $\gamma(u)$, инвариантных при изгибании поверхности: $\gamma = \mathrm{const}$; $d = 0$ ($\times$).

Так как соотношениями ($\times$), при $\gamma = \mathrm{const} \neq 0$, в принятой нами геодезической системе, характеризуется весь ансамбль поверхностей наложимых на косой геликоид, то приходим к заключению: 1) что критерием $q = 0$ выделяется семейство поверхностей, к которому принадлежит весь класс косого геликоида, и, кроме того, отдельно, плоскость и группа на нее наложимых поверхностей конических ($\gamma = 0$; $d = 0$) и 2), что функция $q(u)$ (7), удовлетворяя вполне данному определению, есть параметр связи линейчатой поверхности.

Обозначая 1) e_α, e_β, e орты, фиксирующие соответственно направления касательной, главной нормали любой директрисы $y(u)$ и нормали к поверхности, 2) s, ρ, χ и ψ соотвественно дугу директрисы, радиус ее первой кривизны, угол между нею и образующей, и угол между главной ее нормалью и нормалью к поверхности, мы, в силу равенств

$$y'' = \frac{d^2 s}{du^2} e_\alpha + \left(\frac{ds}{du}\right)^2 \frac{1}{\rho} e_\beta; \quad e_n = \frac{1}{\mathrm{sn}\chi \, \mathrm{mod} y'} \| y' e |; \quad y''. e_n = \left(\frac{ds}{du}\right)^2 \frac{\mathrm{cs}\psi}{\rho}$$

получим для нормальной кривизны любой директрисы поверхности:

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{|\, y'' y' e \,|}{\operatorname{sn}\chi \; c^{3/2}} \tag{9}$$

где c есть квадрат модуля касательного к директрисе вектора. Функция, определяемая формулой

$$r(u) = |\, y'' y' e \,| \tag{10}$$

является вторым параметром связи линейчатой поверхности.

Помимо данной мною формулы для нормальной кривизны общей кривой на линейчатой поверхности (9), формулы весьма простой по своему составу,— известна для той же величины следующая (Darboux, Surfaces, t. III, p. 308):

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{d\varphi}{ds} + p \frac{du}{ds} \right) \operatorname{sn}\chi + \operatorname{cs}\varphi \operatorname{cs}\chi \frac{du}{ds} \tag{9'}$$

где φ есть угол, определяемый по формуле Шаля.

Из двух формул (9) и (9′), написанных для случая директрисы-ортогональной траектории образующих, на основании соотношений

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\gamma d' - d\gamma'}{c^{3/2}}; \quad \frac{du}{ds} = \frac{1}{c^{1/2}}$$

получим

$$r(u) = cp + \gamma d' - d\gamma' \tag{11}$$

формулу, устанавливающую, что r(u) (10) есть определенная функция от трех основных параметров поверхности.

Так как условие $r = 0$ в нашей геодезической системе означает, что асимптотические линии поверхности составляют на ней ортогональную сеть,— явление, возможное только на косом геликоиде и на плоскости,— то критерием $r = 0$ выделяется семейство, к которому принадлежат только плоскость и косой геликоид. Функция r(u), будучи геометрической функцией — элементом поверхности согласно определению есть ее параметр связи.

Назовем три элемента линейчатой поверхности, направляющий параметр p и два параметра связи q и r ее индивидуальными параметрами.

Теорема 2-я. Всякая линейчатая поверхность получает свое индивидуальное определение заданием ее параметров удаления и распределения и одного из трех ее индивидуальных параметров.

За исключением поверхности цилиндрической, индивидуально характеризующейся неопределенностью своего направляющего параметра, этот элемент определен на всех поверхностях; кроме того, на тех поверхностях, где $d = 0$, всегда возможно получить, выбравши для этого директрисой ортогональную траекторию образующих, не совпадающую с ее стрикционною линией,— $d = \text{const} \neq 0$, а потому при задании, совместно с параметрами удаления и распределения, одного из двух индивидуальных параметров q либо r, направляющий параметр поверхности всегда определится на основании формул (8) и (11).

Следовательно, для доказательства теоремы нам надлежит лишь показать, что поверхность вполне и единственным образом определяется заданием трех основных ее параметров γ, d и p.

Исходя из общих формул для геодезической кривизны и геодезического кручения координатных линий (v) любой поверхности, отнесенной к любой ортогональной системе координат, и замечая, что для линейчатой поверхности, отнесенной к ее гедезическим параметрам в принятой нами системе, основная величина второго порядка D_1 определяется формулой

$$D_1 = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \cdot e_n = \frac{|e e' y'|}{\sqrt{E}},$$

получим для геодезической кривизны $\frac{1}{\rho_g}$ и кручения $\frac{1}{\tau_g}$ директрисы — ортогональной траектории образующих

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{d}{d^2 + \gamma^2}; \qquad \frac{1}{\tau_g} = \frac{\gamma}{d^2 + \gamma^2} \tag{12}$$

а из общей формулы (9), на основании соотношения (11), для нормальной кривизны этой линии

$$\frac{1}{\varsigma_n} = \frac{cp + \gamma d' - d\gamma'}{c^{3/2}}, \text{ где } c = d^2 + \gamma^2 \tag{13}$$

Формулами (12) и (13) директриса поверхности по форме своей вполне и однозначно определяется. Так как задание функции для направляющего параметра p, само по себе, вполне и однозначно определяет форму сферической индикатрисы образующих, то элементы, непосредственно определяющие поверхность, ее директриса и сферическая индикатриса образующих, оказываются оба вполне и однозначно определенными по форме заданием функций для трех основных параметров поверхности.

Так как при задании функций — элементов линейчатой поверхности p, γ, d — мы можем написать уравнение ее асимптотических линий 2-го семейства — не прямолинейных образующих:

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{2\gamma}(pv^2 + qv + r) \tag{$\times$}$$

где q и r имеют указанное (8) и (11) значение, то, предположивши две поверхности, определенные этими заданиями, мы, на основании теоремы I-й должны заключить, что они наложимы друг на друга, и при том, на основании ($\times$), с соответствием при наложении асимптомических 2-го семейства, т.-е. что эти две поверхности (Bianchi, Vorl. 10, s. 217; Darboux, Surfaces, t. III, p. 287) либо конгруентны, либо симметричны. Но последнее предположение отпадает на том основании, что у обеих поверхностей один и тот же параметр распределения γ. Принимая, наконец, во внимание, что способ образования линейчатой поверхности вполне определен, когда даны по форме своей ее директриса и сферическая индикатриса при установленном формулой (5) соответствии между точками этих кривых, приходим к заключению, что трем заданным функциям — элементам p, γ, d соответствует единственная вполне индивидуально-определенная линейчатая поверхность.

Чтобы составить себе определенное понятие о природе изгибания поверхности, остающейся или не остающейся линейчатой, о том, что происходит при этом с различными кривыми, по ней проведенными,— перейдем к рассмотрению теоремы 3-й.

Если мы условимся называть типом линии двоякой кривизны или косой поверхности присущее каждой из этих фигур свойство быть правой либо левой, а родом косой поверхности — присущее ей абсолютное определение, совместно рассматриваемое с ее типом, то эту теорему можно формулировать следующим образом:

Теорема 3. Необходимыми и достаточными условиями непрерывной деформации косой поверхности, остающейся линейчатой как до изгибания, так и после него, является сохранение ее рода при непрерывном вариировании какого-либо одного из трех ее индивидуальных параметров. Класс косой поверхности состоит из двух групп поверхностей противоположного типа, одинакового для всех поверхностей каждой группы, причем переход, непрерывной деформацией одной поверхности класса, от нее к другой возможен только в случае принадлежности их к одной и той же группе, а каждые две поверхности различных групп всегда возможно, достаточным непрерывным изгибанием одной из них, превратить в поверхности симметричные. Непрерывный переход от косой поверхности S к наложимой на нее нелинейчатой поверхности T реализуется либо одним, либо двумя непрерывными рядами поверхностей, исходящими из косой поверхности U, образованной касательными к геодезическим G на T, соответственным образующим S, вдоль какой-нибудь асимптотической A на T того же типа, что и асимптотические 2-й системы на S.

Сохраняя все прежние обозначения, имеем $y' . e = c^{1/2} cs\chi$, а потому, на основании $(1')$ и (2), для касательного вектора любой директрисы $y(u)$ косой поверхности получим:

$$y' = c^{1/2} \, cs\chi e - de' - \gamma \, \| ee' \,| \tag{4'}$$

Фиксируя направления прямых пересечения центральной плоскости и касательной плоскости в какой-нибудь точке образующей с нормальной плоскостью последней соответственно ортами $\| ee' \,|$ и e_γ так, чтобы угол $\alpha = (\| ee' \,| , e_\gamma)$, отсчитанный от первого орта, выражал по величине отклонение касательной плоскости от центральной плоскости, определяемое по формуле Шаля, определяя sens орта e' условием конгруентности обоих триедров $(e, e', \| ee' \,|)$, (e, e_n, e_γ) с триедром координатных осей, — мы всегда при этом будем иметь $e_n . e' = cs\,\alpha$, $e_n . \| ee' \,| = sn\,\alpha$, а потому, дифференцируя по u $(4')$ и геометрически умножая результат на вектор $\| y' e \,| = c^{1/2} sn\chi e_n$, легко получим выражение для параметра связи $r = |\, y'' \, y' \, e \,|$ в самом общем его виде:

$$r = cp \, sn^2\chi + \gamma d' - d\gamma - \gamma \, c^{1/2} cs\chi \tag{11'}$$

На основании ($11'$), определивши дальше помощью формулы двойного векториального произведения орт $e_\delta = \| e_n \, e_\alpha \|$, фиксирующий направление, лежащей в касательной плоскости, нормали директрисы, легко получим для ее геодезического кручения:

$$\frac{I}{\tau_g} = \frac{de_n}{ds} \cdot e_\delta = \frac{\gamma}{\gamma^2 + d^2} + \frac{r\,cs\chi}{(d^2+\gamma^2)c^{1/2}} \tag{15}$$

На основании найденого нами результата (B), функция, определяющая модуль касательного вектора любой директрисы косой поверхности

$$c^{1/2} = \left| \frac{\sqrt{k^2 + d^2}}{sn\chi} \right| \tag{16}$$

является ее инвариантом при всяком изгибании, а потому, принимая во внимание, что геодезическая кривизна любой директрисы поверхности не изменяется от всякой ее деформации, и что такими же инвариантами являются ее элементы d и χ, мы из непосредственного рассмотрения формул (9), ($11'$) и (15) заключаем, что непрерывное изменение как нормальной кривизны, так и геодезического кручения любой директрисы косой поверхности, — являющееся необходимым и достаточным условием ее непрерывной деформации, — зависит, при сохранении γ, исключительно от непрерывного варьирования функции — элемента поверхности p. Следовательно, непрерывно варьируя этот элемент, при сохранении рода поверхности, мы произведем непрерывную ее деформацию. На основании же формул (8) и ($11'$), мы заключаем, что непрерывно варьируя какой-нибудь из двух параметров связи косой поверхности, при сохранении ее рода, мы тем самым непрерывно варьируем тот же элемент p, и результат, поэтому, получается тот же самый. Геометрическое значение такого варьирования элемента p выразится только лишь в производстве соответствующего непрерывного ряда направляющих конусов, — следовательно, образующие деформируемой поверхности, от такого варьирования p, никогда, сколько бы мы его ни продолжали, не искривятся, и всякое получаемое изгибание является, поэтому, поверхностью линейчатой. Интерпретируя формулу (16), предварительно представивши ее в виде:

$$du = \left| \frac{sn\chi}{\sqrt{\kappa^2 + d^2}} \right| ds$$

найдем, что угол смежности образующей сохраняется при всяком изгибании поверхности, остающейся линейчатой как до изгибания, так и после него Применяя данную нами интерпретацию формулы (16) к только что раньше сказанному, мы придем к заключению: непрерывно варьируя элемент p индивидуально определенной поверхности S (p, d, γ), мы производим ее непрерывную деформацию, при которой она остается постоянно линейчатой; в полученном непрерывном ряде индивидуально определенных косых поверхностей все члены его имеют тот же род, а потому и тип, что поверхность S; образующие каждого члена ряда являются линиями, соответственными при наложении образующим S.

Полагая в формуле (15) $r = 0$ и принимая то определение линий нулевой нормальной кривизны, которое дает Scheffers (Th. der Flächen, 13, S. 552), заключаем, что знак параметра распределения определяет знак кручения любой директрисы — асимптотической линии, который должен сохраняться при непрерывной деформации поверхности (Bianchi, Vorl. 10, S. 222). Следовательно, параметр распределения должен сохраняться при требуемом условии непрерывной деформации поверхности. Поэтому, изложенный нами способ непрерывной деформации косой поверхности, — при указанном условии, когда она после изгибания остается линейчатой, — является для нее единственно-возможным, и первая часть теоремы доказана.

Так как класс всякой косой поверхности, на основании 1-й теоремы, вполне и единственным образом определяется заданием ее параметра удаления и дискриминанта, представляющего абсолют параметра распределения, то он содержит в себе поверхности двух, и только двух, родов: поверхности рода (γ, d) и поверхности рода $(-\gamma, d)$. Непрерывно варьируя направляющий параметр p_1 какой-нибудь поверхноси $T(p_1, d, -\gamma)$, принадлежащей к классу поверхности $S(p, d, \gamma)$, мы, на основании вышеизложенного, получим вторую непрерывную группу косых поверхностей типа, противоположного типу поверхностей 1-й группы. Если мы условимся называть кривую правой, когда ее кручение отрицательно, а косую поверхность правой, когда ее асимптотические 2 семейства, — не образующие поверхности, — являются левыми кривыми, то правые либо левые поверхности будут определяться по своему типу соответственно положительным или отрицательным знаком своего параметра распределения. Предположивши у всех наших поверхностей, происшедших от непрерывного изгибания S, $\gamma < 0$, имеем в 1-й группе левые косые поверхности, тогда как во второй все поверхности являются правыми. Ясно, на основании 1-й теоремы, что обе группы составляют весь класс любой поверхности любой из двух групп. — Когда направляющие параметры двух каких-нибудь поверхностей S_3 и S_4 из этих двух групп определяются соответственно функциями $\varphi_1(u)$ и $\varphi_2(u)$, то непрерывно варьируя направляющий параметр поверхности S_3, определяя его функциями из ряда:

$$\varphi_1(u) + \varepsilon \left\{ \varphi_2(u) - \varphi_1(u) \right\},$$

где ε непрерывно изменяется в закрытом интервале $[0,1]$, — мы получим, на основании вышеизложенного, при значении $\varepsilon = 1$, поверхность S_5, — непрерывное изгибание поверхности S_3, — которая либо совпадает, на основании 2-й теоремы, с поверхностью S_4, когда последняя принадлежит к той же группе, что и S_3, — либо, в противном случае, находясь в другой группе и имея с поверхностью S_4 одно и то же абсолютное определение и один и тот же направляющий параметр, отличается от нее только по своему типу, знаком своего параметра распределения, т.-е. поверхности S_5 и S_4 в этом случае симметричны.

Когда указанная в последней части теоремы поверхность S представляет собою единственно-возможное непрерывное изгибание T при неискривлении ее асимптотической A и ректификации ее геодезических G, то S конгруентна U, обладающей, по теореме Chieffi (Giornale di Matem., v. 43, p. 9 — 13) тем же свойством, и непрерывный переход, поэтому, от T к S в этом случае устанавливается одним рядом нелинейчатых поверхностей, последним членом которого является рассматриваемая косая поверхность S. В противном случае, когда S не конгруентна U, эти две поверхности, будучи, первая — по условию, другая — по указанной теореме, наложимы на T, имеют одинаковое абсолютное определение и, кроме того, согласно самому способу построения U, принадлежат к одной и той же группе косых поверхностей. Поэтому поверхность U, представляя собою непрерывное изгибание T, в этом случае, на основании предыдущего, является также непрерывным изгибанием S, — и, следовательно, при указанном условии, непрерывный переход от S к T реализуется рядом, от S до U включительно, косых поверхностей одного и того же рода и дальнейшим рядом нелинейчатых поверхностей, последним членом которого являются рассматриваемая поверхность T, чем теорема полностью доказана. *)

Прежде чем перейти к следствиям, заметим: 1) что при таком вариировании данной функции $\varphi_1(u)$ можно от нее непрерывно перейти к произвольно заданной функции $\varphi_2(u)$, котороя вместе с функциями $d(u)$ и $\gamma(u)$, на основании 2-й теоремы, определит индивидуально косую поверхность, и 2) что направление нормали направляющего конуса рассматриваемой поверхности является образующей другой косой поверхности, имеющей с рассматриваемой общую стрикционную линию и названной P. Serret (Th. n. géométrique, p. 144) сопряженной поверхностью. Угол смежности $d\beta$ орта, фиксирующего это направление, определится из $d\beta = \mathrm{mod}\ d \,\|\, ee' \,| = |\, e'\ ee'' \,|\, du = p\, du$. Поэтому в дальнейшем мы можем интерпретировать $p\,du$ либо как угол смежности нормали направляющего конуса рассматриваемой поверхности, либо как угол смежности образующей сопряженной поверхности.

Следствия: I. Переписавши формулу (9′) в виде

$$\frac{ds}{\rho_n} = d(\alpha + \beta)\, sn\chi + cs\alpha\, cs\chi du \qquad (\times)$$

замечая, что угол α, точно определяемый на директрисе формулой $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{d}{\gamma}$ (Lilienthal, Vorl 13, Bd 2, S. 95), в правой части которой находится функция, инвариантная при непрерывной деформации, является инвариантом при изгибании поверхности, остающейся постоянно линейчатой, — а также инвариантен в точно указанных при интерпретации ф. (16) случаях угол смежности образующей du, и интерпретируя $(\times)$, придем к заключению:

При изгибании поверхности, остающейся постоянно линейчатой, угол смежности всех нормальных сечений поверхности и геодезических ее линий, проведенных под углом χ вдоль одной и той же образующей, изменяется на величину,

*) Указанный переход от S к T, всегда возможный, не является едиственным. Когда S — минимальная поверхность, а T — к ней присоединенная, то непрерывный переход реализуется союзными поверхностями; переход от косого геликоида к катеноиду минимальными винтовыми поверхностями является непосредственным, в отличие от перехода через поверхность U.

равную изменению угла смежности соответствующей нормали к направляющему конусу, помноженному на $\operatorname{sn} \chi$.

Положивши $\chi = \frac{\pi}{2}$, получим:

II. Угол смежности всех сечений поверхности, перпендикулярных к одной и той же образующей, изменяется, при изгибании, на величину, равную изменению угла смежности соответствующей нормали к направляющему конусу.

III. Интерпретируя формулу (15), предварительно помножив обе части ее на элемент дуги ds директрисы, мы, на основании ф. (5′) и равенств $ds = c^{1/2} du$, $p du = d\beta$, легко придем к следующему результату:

При изгибании поверхности, остающейся постоянно линейчатой, угол кручения всех геодезических, проведенных под углом χ вдоль одной и той же образующей, изменяется на величину, численно равную изменению угла смежности образующей сопряженной поверхности, помноженному на $\operatorname{cs} \chi$.

IV. Направляющий конус поверхности, определяемый исключительно элементом p, может быть,—на основании существования только двух соотношений (8) и (11′) между тремя индивидуальными параметрами p, q, r,— совершенно произвольным для поверхности, наложимой на данную абсолютно-определенную поверхность, т.-е. всегда возможно индивидуально определить, и притом, на основании 2-ой и 1-й теоремы, двояким образом, линейчатую поверхность, одновременно удовлетворяющую двум требованиям: 1) быть наложимой на какую-нибудь данную линейчатую поверхность и 2) иметь данный произвольно-выбранный направляющий конус.

V. Следовательно, всегда возможно произвести двумя способами такое изгибание данной косой поверхности, при котором образующие станут параллельными образующим наперед заданного конуса.

VI. Положивши для рассматриваемой косой поверхности и для ее симметричной $p = 0$, получим две индивидуально определенных поверхности $S_1(0, \gamma, d)$ и $S_2(0, -\gamma, d)$, образующие которых параллельны некоторой, одной и той же для обеих поверхностей, плоскости. Следовательно, всегда возможны две поверхности, наложимые на данную косую, образующие которых параллельны некоторой, единственной для данной косой поверхности, плоскости.

VII. На данной косой поверхности S_1, индивидуально-определенной тремя функциями, заданными для ее основных параметров γ, d и p, назовем какую-нибудь ортогональную траекторию образующих-кривой A. Не изменяя функций, определяющих параметры γ и d, и непрерывно варьируя функцию, определяющую направляющий параметр p поверхности S_1, составим для этого элемента линейчатой поверхности новую функцию

$$p_1(u) = \frac{\gamma' d - \gamma d'}{c} \tag{$\times$}$$

вполне определенную, так как во всяком случае, даже когда кривая A есть стрикционная линия поверхности S_1, на ней, как на косой,

$$c = \gamma^2 + d^2 \neq 0.$$

Исходя из соображений, изложенных после доказательства 3-й теоремы, мы можем утверждать, что существует определенная линейчатая поверхность $S_2(\gamma, d, p_1)$,—непрерывное изгибание поверхности $S_1(\gamma, d, p)$, на которой кривая B,—изгибание кривой A, — есть ортогональная траектория ее образующих. Вычисляя ее нормальную кривизну по формуле (13), находим, на основании (×), что B является асимптотической линией поверхности S_2. Обозначая e_α, e_β, e орты, фиксирующие соответственно направления касательной, главной нормали кривой, B и образающей поверхности S_2, и принимая во внимание ориентацию соприкасающейся плоскости кривой B, определяемую бивектором $| e_\alpha e_\beta |$ и ориентацию касательной плоскости к поверхности S_2 вдоль кривой B, определяемую бивектором $| e_\alpha e |$, мы, из совпадения этих плоскостей и равенств $e_\alpha . e_\beta = 0$, $e_\alpha . e = 0$, заключаем $e = e_\beta$ т.-е. образующая поверхности S_2, вдоль всей кривой B, совпадает с ее главной нормалью.

Следовательно, всегда существует такое изгибание косой поверхности при котором она деформируется в поверхность главных нормалей какой-нибудь одной, произвольно на ней выбранной, ортогональной траектории ее образующих.

VIII. Определение и изгибание минимальной линейчатой поверхности. Средняя кривизна линейчатой поверхности, в нашей системе положений и обозначений, дается формулой

$$C_m = -\frac{pv^2 + qv + r}{2\ E^{3/2}},$$

откуда найдем необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяют элементы поверхности p, q и r, в случае поверхности с нулевой средней кривизной

$$p = 0;\ q = 0;\ r = 0 \qquad (\times)$$

Из (×), на основании формул (8) и (11), получим

$$\gamma = \mathrm{const};\ \gamma d' = 0,$$

что и определит две поверхности с нулевой средней кривизной:

1] $\gamma = \mathrm{const} \neq 0$; $d = \mathrm{const}$; $p = 0$ косой геликоид,

2] $\gamma = 0$; $d(u)$ — произвольная функция; $p = 0$ плоскость.

Стрикционная линия косого геликоида, являясь $(r = 0)$ асимптотической линией поверхности, в то же время есть $[d = \mathrm{const}]$ ортогональная траектория ее образующих, а следовательно и ее геодезическая. Косой геликоид, поэтому, есть коноид, образующие которого ортогонально пересекают его ось. Весь ансамбль линейчатых поверхностей, на геликоид наложимых, определяется формулами

$$\gamma = \mathrm{const} \neq 0;\ d = \mathrm{const} \qquad (\times\times)$$

из которых усматривается, на основании раньше изложенного, что клас его реализуется всеми поверхностями бинормалей любой кривой с постоянным кручением, равным $\frac{1}{\gamma}$.

IX. Разыщем, не прибегая к обычным способам, среди поверхностей вращения поверхность, наложимую на данный косой геликоид с параметром γ.

На всякой поверхности вращения ее параллели суть линии постоянной геодезической кривизны. Поэтому, если какая-нибудь поверхность S_1 наложима на какую-нибудь поверхность вращения S_2, то геодезические линии поверхности S_1, соответственные меридианам поверхности S_2, необходимо имеют своими ортогональными траекториям линии с постоянной геодезической кривизной, соответственные параллелям поверхности S_2. При равенстве радиусов геодезической кривизны этих последних соответственных линий, упомянутое необходимое условие становится и достаточным для наложения рассматриваемых поверхностей.

Из рассмотрения формулы для Гауссовой кривизны линейчатой поверхности

$$C_t = -\frac{\gamma^2}{\{(v-d)^2+\gamma^2\}^2} \qquad (\times\times\times)$$

и из существования на линейчатой поверхности стрикционной линии, как места центральной точки образующей, где Гауссова кривизна в своем изменении на последней линии переходит через maximum по абсолюту, вытекает, что всякая, с действительными образующими, неразвертывающаяся линейчатая поверхность есть поверхность*) переменной, вообще говоря, повсюду отрицательной Гауссовой кривизны, и наложима только на поверхность вращения, имеющую горловую параллель. Согласно той же формуле ($\times\times\times$), стрикционная линия $v = d(u)$ линейчатой поверхности является на ней местом точек, где Гауссова кровизна приобретает максимум по абсолютному значению $\frac{1}{\gamma^2}$. Следовательно, стрикционная линия косого геликоида, где $\gamma = \text{const} \neq 0$, и горловая параллель наложимой поверхности, как линии с одинаковой — для всех точек каждой в отдельностей — максимальной Гауссовой кривизной, на основании нашего результата (A), должны соответствовать при наложении.

Изгибая, поэтому, данный геликоид с параметром γ так, чтобы его стрикционная линия, ортогональная траектория образующих, совпала с горловой параллелью, а образующие, следовательно, с меридианами какой-нибудь поверхности вращения указанного типа, мы, принимая во внимание, что указанное выше необходимое условие наложимости для геликоида выполняется,—так как на нем существует требуемая система, состоящая из образующих и их ортогональных траекторий — гелисов, являющихся, на основании формул (12) и ($\times\times$), линиями с постоянной геодезической кривизной, — приходим к заключению, что необходимым и достаточным условием наложения является равенство радиусов геодезической кривизны любого гелиса и соответственной ему параллели, удаленных от экватора своей поверхности, каждая линия в отдельности, на одинаковое геодезическое расстояние d.

Обозначая t величину отрезка касательной к искомому меридиану, заключающегося между точкой касания и точкой встречи с осью вращения, и выражая

*) G. Scheffers. „Th. der Fläshen", 13, s. 151, 278, 287.

критерий помощью формулы (12), получим $t = d + \frac{\gamma^2}{d}$ соотношение, характеризующее, при указанном значении d и γ, исключительно цепную линию, вершина которой отстоит от ее направляющей на расстоянии γ, а потому искомой поверхностью вращения, наложимой на данный косой геликоид, яляется катеноид с параметром γ.

X. В заключение определим все косые поверхности с действительными образующими, наложимые на поверхности вращения.

Было уже сказано, что косая поверхность наложима только на поверхность вращения имеющую горловую параллель. Существование этой последней, как места точек на поверхности вращения, где Гауссова кривизна достигает по абсолюту своего максимума, для всех их одинакового, влечет за собою необходимость существования таковой же линии на поверхности наложимой. Принимая во внимание найденный нами результат (A), заключаем, что горловой параллели должна соответствовать только стрикционная линия наложимой линейчатой поверхности, принадлежащей к семейству $\gamma = \text{const} \neq 0$, при необходимом условии для стрикционной быть геодезической линией линейчатой поверхности, т.-е. траекторией ее образующих, так как горловая параллель является геодезической линией поверхности вращения.

Согласно найденному выражению для касательного вектора стрикционной линии y (u)

$$y' = d'e - \gamma\ \| e\, e' |,$$

поверхности со стрикционными линиями—траекториями образующих характеризуются соотношением

$$\operatorname{tg} \varkappa = \frac{\gamma}{d'} = \text{const} \neq 0 \text{ или } \infty \qquad (\times)$$

где $\varkappa$ угол между образующей и стрикционной.

Следовательно, для искомого ансамбля линейчатых поверхностей имеем два необходимых условия:

$$\gamma = \text{const} \neq 0; \quad d'(u) = \text{const} \qquad (17)$$

которыми поверхности этого ансамбля вполне, согласно теореме 1-й, абсолютно определяются.

Чтобы убедиться в достаточности условий (17) для абсолютного определения поверхностей искомого ансамбля, следует лишь принять во внимание 1), что параметр удаления d вполне определяется заданиями $d' = 0$ либо $d' = \text{const} \neq 0$, так как произвольную постоянную интегрирования всегда можно принять равной нулю, в виду произвольности выбора той либо иной ортогональной траектории образующих в качестве директрисы поверхности и 2) что дискриминант поверхности, которым достаточно ограничиться при рассмотрении вопроса о простой наложимости какой-нибудь линейчатой поверхности на всякую другую, определяется абсолютным значением ее параметра распределения.

Так как, согласно $(\times)$, d' может принимать значение любого определенного числа, равное нулю и конечному числу, то формулой (17) определяются два, и только два, класса линейчатой поверхности:

класс ($\gamma = \text{const} \neq 0$, $d' = 0$) и класс ($\gamma = \text{const} \neq 0$, $d' = \text{const} \neq 0$).

Среди поверхностей этого ансамбля, как частные определенные члены его, находятся геликоиды с направляющей плоскостью ($\gamma = \text{const} \neq 0$, $d' = 0$, $p = 0$), наложимые на соответствующие катеноиды, и линейчатые геликоиды ($\gamma = \text{const} \neq 0$, $d' = \text{const} \neq 0$, $p = \text{const} \neq 0$), наложимые на однополые гиперболоиды вращения. Считая косые геликоиды частным случаем линейчатых и исключая из счета развертывающийся геликоид, приходим к заключению, что весь искомый ансамбль реализуется, на основании (17), всевозможными линейчатыми геликоидами и всеми линейчатыми поверхностями, на них наложимыми.

О гильбертовых аксиомах связи

И. С. Чернушенко

I.

1. Аксиомы связи (Axiome der Verknüpfung) составляют у Гильберта (D. Hilbert. „Die Grundlagen d. Geometrie“. Первое издание 1899 г. Пятое издание 1922 г. Я цитирую по русскому переводу: Д. Гильберт. „Основания геометрии“. Пер. под ред. засл. проф. А. В. Васильева. Петроград, 1923 г.*) первую группу аксиом и устанавливают связь между понятиями „точка“, „прямая“, „плоскость“ и „определяет“ или понятиями синонимическими последнему, напр., „лежит на“, „проходит через“ и др. Указанные понятия являются у Гильберта основными; с ними не связывается не только никаких наглядных представлений, но и вообще никаких представлений. Мы мыслим просто три различных системы вещей: точек, прямых и плоскостей, находящихся между собою в известных отношениях, обозначаемых словом „определяет“. Все, что о них нужно и можно знать, заключается в следующих аксиомах:

I 1. Две различных точки A и B всегда определяют прямую a.

I 2. Любые две различных точки прямой определяют эту прямую.

I 3. На прямой всегда существует по меньшей мере две точки, в каждой плоскости существуют всегда по меньшей мере три точки—не лежащие на одной прямой.

---

*) Пользуюсь случаем, чтобы отметить две небольшие неточности, вкравшиеся в этот в общем очень тщательно сделанный перевод: на стр. 64, стр. 17 св. (гл. V, § 23) говорится о „двойном“ касании, в оригинале же сказано: „vierpunktige Berührung“, т.-е. прикасание третьего порядка, — тем более, что 5-ю строками ниже тот же термин „двойное касание“ верно передает термин „doppelte Berührung“ оригинала. В приложенном в конце отзыве Пуанкаре (стр. 136, строки 8—9 св.) указано на доказательство Гильберта, что, кроме сферы, нет других замкнутых поверхностей такого рода (в оригинале у Пуанкаре говорится о поверхностях „de cette sorte“). Следовало бы указать, что Гильберт в мем. „Uber Flächen konstanter Gaussischer Krümmung“, перепечатываемом в последних изданиях Grundlagen d. Geometrie, как Anhang V, доказывает, что шар есть единственная замкнутая поверхность постоянной положительной кривизны, *не имеющая особенностей*. Последнее свойство очень существенно, и это следовало бы отметить, хотя бы в примечании, тем более что в русском переводе этого мемуара нет.

I 4. Три не лежащие на одной и той же прямой точки А, В, С, всегда определяют плоскость α.

I 5. Любые три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, определяют эту плоскость.

I 6. Если две точки А и В прямой а лежат в плоскости α, то и всякая точка прямой а лежит в плоскости α.

В этом случае мы говорим: прямая а „лежит" в плоскости α.

I 7. Если две плоскости α и β имеют общую точку А, то они имеют по меньшей мере еще одну общую точку В.

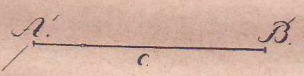
I 8. Существует по меньшей мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

Прежде всего заметим, что в приведенном перечне не 8, а 9 аксиом, т. к. I 3 состоит из двух частей, которые я, чтобы не изменять установившейся нумерации, буду обозначать I 3а и I 3b. Т. к. в дальнейшем речь будет итти только об аксиомах связи, то я буду опускать при номере аксиомы цифру I.

Гильберт называет аксиомы 1—3 плоскостными, а 4—8 пространственными Это так, если брать акс. 3 в целом. Если же разделить ее на две части то 3а—линейная аксиома.

2. Как уже было замечено, сначала мы мыслим точки, прямые и плоскости независимо друг от друга. Гильберт ничего не говорит о числе вещей в трех системах. Судя по § 1, можно думать, что их сколько угодно, но аксиомы 3 и 8 и аксиома II 2 как будто указывают на то, что Гильберт стремился обойтись наименьшим количеством вещей. Можно поэтому поставить вопрос о *наименьшем числе вещей, достаточном для осуществления системы* аксиом 1—8.

Аксиома 1 устанавливает, что точки не существуют отдельно. Каждая точка лежит на прямой, определяемой этой точкой и какой-либо другой, причем не известно, лежат ли все точки на одной прямой или на других, если они есть. Эта аксиома привязывает точки к одной или нескольким прямым, но не обратно: прямые могут существовать независимо от точек. Акс. 1 требует существования по крайней мере двух точек А и В и одной прямой с (фиг. 1). Назовем эту систему № 1.



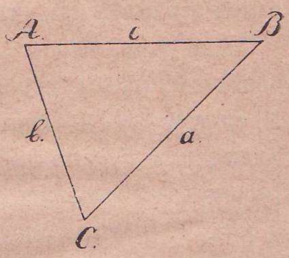
фиг. 1.

Аксиома 3а устанавливает обратную связь: она привязывает каждую прямую по крайней мере к двум точкам. Если прямая только одна, именно та, которая определяется 2 точками, постулируемыми акс. 1, то акс. 3а не имеет смысла, т. к. только повторяет акс. 1. Следовательно, акс. 3а требует по крайней мере еще одной прямой b, на которой могут быть те же точки А и В.

Аксиома 2 говорит о том, что прямая определяется любой парой своих точек. Мне кажется, что естественнее было бы поставить акс. 3а сейчас же после 1 и уже после нее 2. Ведь, бесполезно говорить о том, что любые две точки прямой определяют ее, если еще не установлено, есть ли на прямой хотя одна точка.

Аксиома 2 прежде всего требует, чтобы прямая b не проходила сразу через обе точки А и В, т. к. в противном случае А и В определяли бы две прямые с и q.

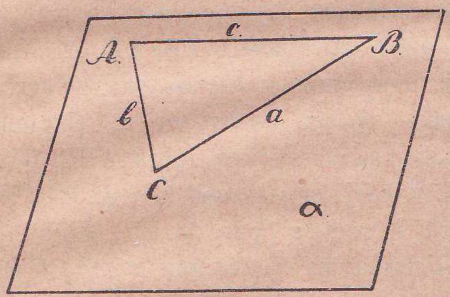
Оставляя точку A на прямой b, мы по 3a должны допустить на b еще одну точку C, не лежащую на c (акс. 2). В таком случае B не лежит на b (акс. 2), и, след., точки B и C определяют прямую a, отличную от b и c (акс. 1 и 2). Таким образом, акс. 1, 3a и 2 требуют 3 точек, не лежащих на одной прямой и трех прямых (фиг. 2). Эту систему обозначим № 2.



Фиг. 2.

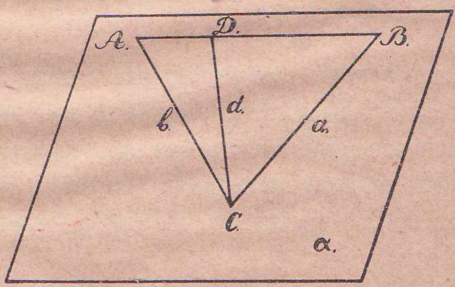
3. Аксиома 4 привязывает точки к плоскости, но не обратно. Те 3 точки, о которых идет речь в этой аксиоме, имеются уже в системе № 2. Теперь к этой системе присоединяется еще плоскость α. Вновь полученную систему обозначим № 3 (фиг. 3).

Аксиома 4 требует по крайней мере одной плоскости. Есть ли еще плоскости или нет, это неизвестно. Если есть, то они могут не иметь ни одной точки. Аксима 4 может быть поставлена сразу после 1, но не может быть поставлена перед 1, т. к. аксиома 4 говорит о прямой. При этом остается неизвестным, лежат ли прямые a, b, c в плоскости α или нет. Следует обратит внимание также и на то, что первые три аксиомы связывают только три основных понятия, между тем как аксиома 4 связывает уже четыре понятия.



Фиг. 3.

Можно было бы ожидать, что после акс. 4 должны следовать 3b и 5 совершенно аналогично первым трем, но это не так; такой порядок был бы уместен, если бы в указанных аксиомах не упоминалось о прямой. Упоминание о прямой заставляет точнее выяснить отношение прямой и плоскости. Тогда естественнее после акс. 4 поставить 6. Аксиома 6 предполагает, что хоть на одной прямой есть 3 точки. Пусть на прямой c, кроме A и B, есть еще точка D. Акс. 6 утверждает, что точка D прямой c лежит в плоскости α определяемой точками A, B и C. По акс. 2, пары A и D, B и D определяют ту же прямую c, но C и D определяют новую прямую d. Эту систему одной плоскости, 4 прямых и 4 точек, обозначим № 4 (фиг. 4).



Фиг. 4.

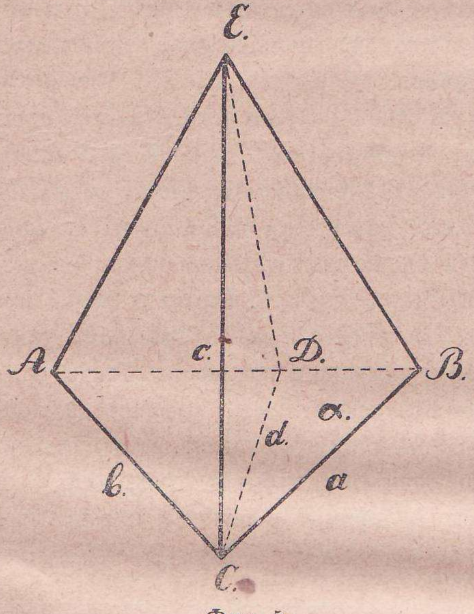
К сказанному можно добавить, что акс. 6 придает слову „прямая" как будто иной смысл, чем акс. 1, 3a и 2. Здесь прямая понимается, повидимому, как класс точек, тогда как раньше она мыслилась независимо от точек. Такому пониманию способствует и сделанное после акс. 6 пояснение к ней. Впрочем, намек на понимание прямой, как класса точек, можно видеть уже в акс. 2.

Все же мне кажется, что Гильберт в основе понимал прямую, не как класс точек, и что двойственное впечатление создается только вследствие не совсем точной редакции аксиом 2 и 6. Теперь уже можно плоскость связать с точками. Акс. 3b привязывает каждую плоскость к 3 точкам, не лежащим на одной прямой, так что уже невозможно существование плоскости без точек.

Для того, чтобы акс. 3b давала что-нибудь новое сравнительно с акс. 4, необходимо постулировать либо еще одну плоскость, либо новую тройку точек. В системе № 4, кроме тройки точек A, B и C, определяющих плоскость α, имеются и другие тройки точек, не лежащих на одной прямой, след. нового расширения системы № 4 не требуется. Также удовлетворяется системой № 4 и акс. 5, которая требует, чтобы любая тройка точек ADC, BDC определяла ту же плоскость α.

4. Приведенные аксиомы требуют существования хотя бы одной плоскости; поэтому возможно, что все существующие точки, а след. и все существующие прямые, лежат в одной плоскости α.

Акс. 8 утверждает, что существует по меньшей мере 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Следовательно, требуется новое расширение системы. Пусть точка E не лежит в плоскости α системы № 4. В таком случае она не лежит ни на одной из прямых AB, BC, AC, CD, т. к. в противном случае она, по акс. 6, лежала бы в плоскости α. Следовательно, каждая тройка точек ABE, BCE, ACE и CDE определяет по акс. 4 плоскости β, γ, δ, ε (фиг. 5).



Фиг. 5.

Каждая из последних плоскостей имеет с плоскостью α и между собою по 2 общих точки, чем и удовлетворена акс. 7. Аксиому 8 естественно поставить перед 7, т. к., пока существует только одна плоскость, бесполезно говорить об отношении 2 плоскостей. Полученную систему 5 плоскостей, 8 прямых и 5 точек обозначим № 5. Это и есть наименьшее число вещей, требуемых аксиомами 1—8.

В предыдущем изложении мне приходилось говорить о более естественном расположении аксиом, но это касалось только поставленной задачи. Гильберт имел в виду построить систему независимых аксиом, для которой порядок конечно, безразличен. К этому вопросу я теперь и перехожу.

II

5. В § 10 „Grundlagen der Geometrie“ Гильберт говорит, что легко доказать независимость аксиом одной и той же группы между собою, но этих доказательств не приводит. В первом издании 1899 г. в этом месте Гильберт

сослался на свои литографированные лекции по евклидовой геометрии (зимний семестр 1898—1899 г.), изданные Шапером, но эта ссылка уже не повторилась ни в одном из следующих изданий. В своих же литографированных лекциях, которые я имел в руках в рукописной копии проф. Д. М. Синцова, по вопросу о независимости аксиом 1 — 8 Гильберт ограничился тремя примерами. Он доказывает независимость 2 от 1 и независимость 6 и 7 (в лит. лекц. 5 и 6) от всех остальных аксиом I группы.

Назовем „точками" целые положительные числа p_1, p_2, „прямыми" — целые отрицательные числа вида $-E\left(\frac{p_1, \; p_2,}{2}\right)$, где E означает „наибольшее целое число". Тогда 1 удовлетворена, а 2 нет. Пусть $p_1 = 1$, $p_2, = 2$, $p_3 = 3$. Тогда „точки" 1 и 2 определяют „прямую" — 1, 1 и 3 — тоже, а 2 и 3 — „прямую" 3.

Этот же пример показывает, что 2 независима и от 3а. В самом деле, любая прямая — $g = -E\frac{p_1, p_2}{2}$. Всегда можно положить $p_1 = 1$ и тогда $p_2 = 2g$ или $2g + 1$. Во избежание неясности, добавим, что нуль в эти примеры не входит.

Легко также показать, что 1 не зависит от 2 и 3а. Назовем „точками" прямые евклидовой плоскости, а „прямыми" — точки. Тогда каждая точка определяется любыми двумя прямыми, через нее проходящими, след. 2 удовлетворяется, и через каждую точку проходит по крайней мере две прямых, след., 3а удовлетворена. Но 1 не удовлетворена, т. к. две прямых не всегда определяют точку.

6. Для доказательства независимости акс. 6 от остальных I группы, Гильберт строит особую систему вещей. Подразумевая под „точкой" тройку вещественных чисел, под „окружностями" и „плоскостями" соответствующие системы пропорциональных чисел и выражая связь между ними обычными уравнениями декартовой геометрии, Гильберт называет „точками" обычные точки, кроме одной точки 0, которая исключается, „плоскостями" — обычные плоскости и „прямыми" — окружности, проходящие через точку 0, и говорит, что в этой геометрии, очевидно, удовлетворяются все аксиомы группы I, кроме 6.

Это утверждение неверно, как оказывается при подробной проверке аксиом в отдельности.

Аксиома 1 удовлетворяется. В том случае, когда 2 точки лежат на обычной прямой, проходящей через 0, они и определяют эту прямую, т. к. коэффициент при квадратах обращается в нуль. Есть разница с обычной геометрической точки зрения, — кажется, что в этом случае прямая определяется одной точкой, но с аналитической точки зрения все в порядке, т. к. именно вторая точка и дает равенство нулю коэффициентов при квадратах переменных.

Аксиомы 2, 3а и 3b, очевидно, удовлетворяются.

Аксиома 4 не удовлетворяется. Возьмем 3 точки на обычной прямой, не проходящей через 0. Эти три точки не лежат на одной „прямой" в новом смысле и в то же время не определяют плоскости. В то же время 3 точки, лежащие на одной „прямой", т.-е. окружности, определяют плоскость, за исключением случая, когда окружность обращается в прямую, проходящую через 0.

Аксиома 5 также не удовлетворяется, т. к. на всякой плоскости можно выбрать прямую в обычном смысле, не проходящую через O, и на ней 3 точки. Эти точки плоскости не определяют.

Аксиома 6 не удовлетворяется, т. к. окружность, если не лежит в плоскости, имеет с нею не более двух общих точек. Аксиомы 7 и 8, очевидно, удовлетворяются.

Вероятно, Гильберт и сам заметил несовершенство своего примера и поэтому не поместил его в печатном издании, а, начиная со 2-го издания, уничтожил и ссылку на свои литографированные лекции.

Для доказательства независимости 7 от остальных Гильберт берет обыкновенное евклидово пространство, за исключением в нем одной прямой a и всех ее точек, кроме только одной точки O.

Действительно, все аксиомы удовлетворены, кроме 7, т. к. плоскости, пересекающиеся по исключенной прямой a, имея общую точку O, других общих точек не имеют.

7. E. H. Moore в своей статье „О проективных аксиомах геометрии" (Trans. of the Amer. Math. Soc. 1902 г.) дает доказательство независимости 4 и 6 от остальных I группы. Он говорит, что „геометрия для случая (1) обыкновенная трехмерная евклидова геометрия с опущением одной плоскости; для случая (2) служит обыкновенная евклидова двухмерная геометрия с тем видоизменением, что обыкновенная плоскость ABC—совокупность точек прямых AO, BO, CO, за исключением точки O, где точка O центр круга, вписанного в трехугольник ABC".

Ясно, что во (2) примере Мур ошибается. Ни одна прямая, кроме AO, BO и CO, не имеет у него более двух точек,— следовательно, самое условие аксиомы 6 не выполнено. Не удовлетворяется 3a, т. к. прямые, проходящие через O, за исключением AO, BO и CO, совсем не имеют точек; не удовлетворяется 7, т. к. плоскость одна, и 8, т. к. вне плоскости ABC нет точек.

Повидимому, Мур не придавал особого значения своим примерам, т. к. поместил их в подстрочном примечании на странице 145.

Для доказательства независимости 1, 3a, 3в и 4 от остальных достаточно взять обычное евклидовское пространство, с опущением в нем некоторых вещей.

Назовем точками тройки вещественных чисел (x, y, z), плоскостями — четверки пропорциональных чисел $(A:B:C:D)$ при условии, что A, B, C не нули одновременно. Пусть существование уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$ выражает, что точка (x, y, z) лежит в плоскости $(A:B:C:D)$. Назовем, наконец, прямыми совокупности точек, лежащих одновременно в двух плоскостях с различными $(A:B:C)$, т.-е. пары четверок пропорциональных чисел $(A:B:C:D,\ A':B':C':D')$. Как известно, эта пара четверок может быть заменена любой парой из трех следующих: $(a:b:o:d)$, $(a':o:c':d')$ и $(o:b'':c'':d'')$. Если две точки имеют не более одной равной координаты, то совершенно безразлично, какую из трех пар четверок выбрать для определения прямой; если же две координаты равны, напр. x и y, то одну четверку, в данном случае первую придется исключить, т. к. $(a:b:d)$ не определяется. Теперь перейдем к доказательству независимости.

Независимость 1. Присоединим условие, что исключается прямая ось z-ов, т.-е. $(0:1:0:0,\ 1:0:0:0)$, и тогда удовлетворены все аксиомы, кроме 1, потому что, напр., точки (0,0,0) и (0,0,k) никакой прямой уже не определяют.

Независимость 3а. Если мы оставим все прямые, но исключим, например, все точки вида (0,0,k), то ось z-ов, прямая (1 : 0 : 0 : 0, 0 : 1 : 0 : 0) не имеет ни одной точки, так что удовлетворяются все аксиомы, кроме 3а.

Независимость 3b. Если исключим все точки одной плоскости, напр., плоскости XOY, т.-е. все тройки вида (x, y, 0), то плоскость XOY (0 : 0 : 1 : 0) не будет иметь ни одной точки, т.-е. не имеет места акс. 3b, а все остальные удовлетворяются.

Независимость 4. Исключим из построенной системы вещей одну плоскость, напр. (0 : 0 : 1 : 0), плоскость XOY, и аксиома 4 не имеет места, т. к. тройки вида (x, y, 0) никакой плоскости не определяют, тогда как остальные аксиомы удовлетворяются. Этот пример был дан и Муром.

8. А. Розенталь показал в Math Ann. Bd. 69, что в 3b достаточно постулировать одну точку, если ограничиться остальными аксиомами первой группы; если же присоединить и аксиомы II группы, то и в 3а достаточно постулировать тоже одну точку.

Мне кажется, что аксиома 8 является следствием остальных I группы.

Возьмем три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, и определяемую ими плоскость α (акс. 4). Акс. 7 требует существования по крайней мере еще одной плоскости β, отличной от α. В плоскости β есть три точки D, E, F, не лежащие на одной прямой (акс. 3b), которыми β определяется (акс. 5). Из этих трех точек одна по крайней мере, напр. D, не лежит в плоскости α, иначе плоскости α и β совпадали бы (акс. 5). Следовательно, есть 4 точки A, B, C и D, не лежащие в одной плоскости, что и т. д.

26 декабря 1923 г. Харьков.

К вопросу о математическом выражении движения населения

Я. Диманштейн

1.

Величина населения, как и всякого иного органического единства, подвержена непрерывным изменениям. Можно говорить об изменениях двоякого рода. С одной стороны, в состав населения вступают новые единицы, в результате рождения и иммиграции, и выбывают—вследствие смерти и переселения. О таких изменениях, известных под названием движения населения, можно говорить как об изменениях внешнего порядка. Под изменениями внутреннего порядка нужно понимать изменения, происходящие с течением времени для каждой входящей в состав населения единицы или известной совокупности таких единиц. Сюда относятся все изменения, связанные с изменением возраста, а также и все те обстоятельства, которые определяют течение и его видоизменения человеческой жизни — заболевания, несчастные случаи, заключение брачных союзов и их расторжение, рождение потомства в его значении для брачной пары, осуждение судом, существенное изменение материального положения, перемена профессии, состояние безработицы и пр. В дальнейшем мы имеем в виду лишь движение населения в целом, хотя нужно иметь в виду, что закономерность свойственна и тому, что мы называем внутренними изменениями населения.

Наблюдая сложение человеческих масс (состав населения) в его изменении во времени, легко установить известное, эмпирически наблюдаемое, постоянство определенных признаков в составе населения при всей изменчивости составляющих его индивидуальных элементов. В связи с этим возникает вопрос о возможности суждения о будущем составе населения не столько с точки зрения познания и учета основных факторов движения населения, что составляет содержание материальной теории населения (основоположник—Мальтус), сколько на основании собранных о нем в прошлом статистических данных, что определяет собою содержание того, что мы определяем в качестве формальной теории населения. Попытки построения последней, требующие углубленного теоретического анализа, делались неоднократно, и иногда с очень интересными результатами, равно как и попытки определения величины населения в будущем.

К одной из замечательных попыток последнего рода принадлежит сделанное Elkanah Watson'om в 1816 году предсказание о развитии населения Соединенных Штатов до 1860 г., с помощью метода, исходившего из допущения постоянного коэффициента прироста населения, равного коэффициенту прироста

8*

его за период 1790—1800 г.г. E. Czuber [1]), взяв цифры населения Соединенных Штатов в 1790 и 1820 г.г. и допустив сохранение того же коэффициента прироста, дал следующее определение величины населения Соединенных Штатов, которое мы приводим в сравнении с действительной величиной.

Население Соединенных Штатов в миллионах:

	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860
Величина населения при допущении постоянного коэффициента прироста	3,93	5,30	7,15	9,64	13,00	17,53	23,65	31,89
Действительное население . .	3,93	5,31	7,24	9,64	12,87	17,07	23,19	31,44
Разница . . .	0,00	0,01	0,09	0,00	0,13	0,46	0,46	0,45

Отсюда можно было бы заключить о возможности построения общей теории развития населения, выраженной математически,—ибо все изменения в составе населения имеют численное выражение,—которая устанавливала бы не только вероятные величины населения, разложенного на известные группы, для определенной временной точки, но и давала бы возможность судить о вероятных отклонениях наблюденных опытно величин от устанавливаемых априорно при помощи известной теоретической формулы. Последняя должна была бы, повидимому, представить величину населения в качестве непрерывной функции от первоначального его значения (взятого для определенной временной точки) и времени, а поскольку первая величина может быть условно принята в качестве постоянной,—функции времени. Такое представление основано на допущении, что коэффициент прироста остается все время постоянным, что соответствует действительности лишь в редчайших случаях. Вообще же говоря, и коэффициент прироста населения должен быть рассматриваем в качестве переменной величины и может быть теоретически выражен также в качестве функции времени.

Условия общественного развития становятся все более сложными, и в настоящее время мы уже не можем подходить к определению формулы движения населения с такими упрощенными методами, как это было возможно в эпоху Уатсона. Формула эта должна опираться на исследование всех факторов, определяющих движение и величину населения, и в то же время носить, как и все математические построения, отвлеченный от действительности характер, покоясь на допущениях, замещающих реальное население воображаемым. Помимо того, что изучение интересующей нас проблемы наталкивается на значительные трудности в виде наличия значительного числа типов движения населения даже в пределах территориально-узко ограниченной области, мы вынуждены сделать ряд допущений, не связанных определенно ни с одним из этих типов. Население может возрастать в течение короткого промежутка времени на значительные величины (иммиграция) и точно так же убывать (войны, эпидемии). В действительном развитии населения отсутствует непрерывность. Построение

[1]) E. Czuber. „Mathematische Bevölkerungstheorie". Taubner, Leipzig-Berlin. 1923.

же математической теории населения делает необходимым допущение, что для бесконечно малой частицы времени происходит и бесконечно малое приращение населения. Однако, если брать крупные массы населения и ограниченные промежутки наблюдения, то действительность не будет существенно искажена сделанным нами допущением.

Дальнейшее изложение основано на двух, создающих, по нашему мнению, новую эпоху в рассматриваемой области, работах. Одна из них принадлежит австралийскому статистику G. H. Knibbs'y (The Mathematical Theory of Population, of its Charakter and Fluctuation etc. Melbourne 1917) и представляет теоретическое обобщение результатов австралийской переписи 1911 г., а другая представляет вышецитированную книгу Чубера, сводящуюся к талантливому изложению теоретических основ работы Книббса.

2.

Для отдельных государств было бы правильнее всего сравнивать коэффициент прироста населения с таковым для земного шара. Однако, мы не имеем до сих пор сколько-нибудь точного определения величины населения земного шара для разных временных точек. Ошибка для существующих оценок может составлять десятки миллионов. Сравнительно еще недавно оценочная величина населения Китая была понижена чуть ли не на 100 миллионов. Первая известная нам и явно преувеличенная оценка населения земного шара, принадлежащая Riccioli и относящаяся к 1660 году, дает величину в 1.000 миллионов. Более осторожные и, повидимому, более приближающиеся к действительности оценки дают для начала 19-го столетия около 700 миллионов, а для времени, непосредственно предшествовавшего войне, 1600 — 1650 миллионов. Определенный на основании этих данных коэффициент ежегодного прироста населения земного шара находился бы в пределах между 0,0015 и 0,0121, средняя между коими составляет 0.00846.

Для последнего времени мы имеем относительно очень точные данные о движении населения культурных стран. Годовой коэффициент прироста на 10.000 наличного населения в период 1906 — 1911 г.г. составлял:

СТРАНЫ	Годовой коэффициент прироста	СТРАНЫ	Годовой коэффициент прироста
Ирландия	16	Цейлон	120
Франция	16	Швейцария	121
Ямайка	28	Голландия	122
Шотландия	55	Дания	126
Норвегия	66	Германия	136
Бельгия	69	Финляндия	143
Италия	80	Румыния	148
Швеция	84	Сербия	155
Венгрия	84	Чили	156
Австрия	86	Соединенные Штаты	182
Испания	87	Австралия	203
Англия и Уэльс	104	Новая Зеландия	256
Япония	108	Канада	298

Ежегодная величина населения может быть установлена более или менее точно путем вычета из величины населения предшествующего года числа умерших и эмигрировавших из страны и прибавления числа родившихся и иммигрировавших в страну в течение года. Возможно и приближенное исчисление величины населения для каждой точки (года), лежащей внутри интервала между двумя народными переписями, путем определения кривой движения населения в этом интервале. Если мы обозначим функцию, представляющую величину населения, через $P(t)$, то прожитое населением между временными точками t_1 и t_2 время (графически оно изобразится площадью между осью абсцисс, кривой величины населения и ординатами точек t_1 и t_2) может быть представлено интегралом:

$$\int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt$$

а среднее население в интервале $AP(t_1, t_2)$:

$$AP(t_1, t_2) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt}{\int_{t_1}^{t_2} dt} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt,$$

а если интервал между двумя переписями $(t_2 - t_1)$ принять за единицу, то

$$AP(0,1) = \int_0^1 P(t)\,dt.$$

В вышеприведенной таблице характерно, что наибольший прирост населения замечается раньше всего во всех странах с интенсивной иммиграцией, т.-е. Америке и Австралии. В Европе наибольший прирост приходился на Балканы и Россию. Взвешенная средняя годового прироста населения, при чем в качестве весов принимаются величины наличного населения, для всех перечисленных стран в периоде 1906—11 г.г. составляет 0,01159 или 1,159 % населения.

На основании определенного для каждой страны коэффициента годового прироста населения v, мы можем определить период удвоения величины населения n, путем решения уравнения

$$(1 + v)^n = 2,$$

откуда

$$n = \frac{\log 2}{\log(1+v)} = \frac{\log 2}{v\left(1 - \frac{v}{2} + \frac{v^2}{3} - \dots\right)} \cong \frac{\log 2}{v}\left(1 + \frac{v}{2}\right) \cong$$

$$\cong \frac{0.69315}{v} + 0,34657.$$

Вычисленное таким образом n составляет:

СТРАНЫ	Период удвоения населения (лет)	СТРАНЫ	Период удвоения населения (лет)
Ирландия	—	Швейцария	57,6
Франция	436	Голландия	57,2
Ямайка	248	Дания	55,4
Шотландия	26	Германия	51,3
Норвегия	105	Финляндия	48,8
Бельгия	101	Румыния	47,2
Италия	187	Сербия	45,1
Швеция	82,9	Чили	44,8
Венгрия	882,9	Соедин. Штаты	38,4
Австрия	80,9	Австралия	34,5
Испания	60,0	Новая Зеландия	27,4
Англия и Уэльс	67,0	Канада	23,6
Япония	64,5		
Цейлон	58,1	В среднем	60,1

Совершенно очевидно, что в прошлом средний годовой прирост населения земного шара был значительно меньшей величиной, чем выведенная на основании наблюдений за период 1906—1911 г.г. Если определить современную величину населения земного шара в 1.649 миллионов (по Книббсу) и исходить из коэффициента годового прироста населения в 0,01159, то это население может произойти из одной человеческой пары в течение 1782 лет, по уравнению $1.649.000.000 = 2\ (1{,}01159)^n$, так что наличие на земном шаре одной пары должно было бы быть отнесено к 132 году после Р. Х. Даже если исходить из коэффициента 0,00864, исчисленного по оценкам величины населения земного шара между 1804 и 1914 годами, то для производства всего населения земного шара из одной человеческой пары потребовалось бы всего 2397 лет, или существование этой пары должно было бы быть отнесено к 483 году до Р. Х.

Факт значительно более медленного накопления населения земного шара в прошлом находится в полном соответствии со всем нашим историческим знанием. Средневековье является, напр., в общем, периодом стационарного состояния населения, а для некоторых периодов может быть отмечено и значительное его понижение (реформационные войны). Стабильность населения поддерживалась опустошительными эпидемиями, в еще большей мере—непрерывными войнами, а наиболее яркое свое выражение эта стабильность находила себе в сравнительно очень мало подвижном строе хозяйственных отношений. В настоящее время интенсивный рост населения, несмотря на значительное падение величины рождаемости во всех культурных странах, покоится на значительном сокращении величины смертности и значительном росте средней продолжительности человеческой жизни. Так как для ограничения величины смертности существуют естественные пределы, и в некоторых странах, если отвлечься от периода мировой войны, мы, судя по некоторым признакам, уже довольно близко подошли к этим пределам, то при условии продолжающегося падения величины рождаемости—прототипом в этом отношении является

Франция—мы имеем основания в будущем ожидать и понижения коэффициента годового прироста населения. Возможна и стабильность населения земного шара—переселение, очевидно, не изменяет его общей величины—если величина рождаемости упадет повсеместно до величины смертности, а средняя продолжительность человеческой жизни не будет проявлять тенденции к заметному росту.

Если исходить из сохранения для будущего коэффициента годового прироста населения в 0,01159, то нужно было бы предположить, что и границы производства средств для поддержания человеческой жизни должны были бы быть раздвинуты в совершенно невероятных границах. При периоде удвоения населения земного шара в 60,15 лет, через 10.000 лет величина эта должна составлять $22.184.10^{46}$, так что, если бы люди стали плотно друг к другу, то они заняли бы всю поверхность земного шара. Таким образом, нужно прийти к заключению, что, если развитие на протяжении последнего столетия привело к видимому опровержению учения Мальтуса, то неизбежно все же, и может быть не для слишком далекого будущего, наступление момента, когда оно будет блестяще подтверждено действительностью. Это соображение должно лечь в основу построения схемы роста человеческих масс в будущем.

3.

Как было указано выше, мы должны исходить из воображаемого, а не реального населения, относительно которого можно предположить, что в каждую бесконечно малую частицу времени dt оно изменяется в известном отношении ρ к своей первоначальной величине. Если к моменту t времени население составляло величину B_t, то по прошествии dt, оно составит

$$B_{t+dt} = B_t + \rho B_t dt = B_t (1 + \rho dt) \cong B_t e^{\rho dt} \qquad (1)$$

При положительном ρ происходит возрастание населения, при отрицательном—его убывание.

Относительно коэффициента возрастания населения ρ можно сделать предположение, что на протяжении того или иного периода он сохраняет значение постоянной величины. Однако, вообще, для него должно быть сделано обратное предположение, а именно, что он сам представляется непрерывно изменяющейся во времени величиной, т.-е. является непрерывной функцией времени, в силу чего мы обозначаем его через $\Phi(t)$. Тогда выражение (1) превращается в

$$B_{t+dt} = B_t [1 + \Phi(t) dt].$$

Если коэффициент прироста населения предположить постоянным и обозначить его через v, то из выражения (1) мы можем получить дифференциальное уравнение

$$dB_t = v B_t dt,$$

и при помощи интегрирования

$$B_t = B_0 e^{vt} \qquad (2)$$

где B_0 означает население для времени $t = 0$.

При разложении потенциальной функции B_t в ряд получаем:

$$B_t = B_0\left(1 + vt + \frac{v^2t^2}{2!} + \frac{v^3t^3}{3!} + \cdots\right). \tag{2a}$$

Как было указано выше, в качестве общего правила нужно предположить, что коэффициент прироста населения не остается постоянным, изменяется во времени и представляет функцию последнего. Поэтому величина населения (B_t) есть функция от функции, и для определения движения населения в пределах известного временного интервала, необходимо изучить пробег кривой $\Phi(t)$ в этом интервале. Очевидно, что существует значительная совокупность факторов естественного, экономического и социального порядка, обусловливающая ту или иную величину коэффициента прироста населения и характер его изменения, при чем можно различать факторы органического и пертурбационного характера. Известная территория может быть богата естественными благами, непосредственно употребляемыми для удовлетворения элементарных человеческих потребностей. Это обстоятельство создает объективную возможность для интенсивного прироста населения. Не меньшее, однако, значение (в известных пределах) может иметь характер хозяйственной организации (способ производства). При преимущественном занятии населения охотой небольшое число лиц должно фактически обладать значительной территорией, в силу чего при этом условии прирост населения на ограниченной территории ограничен относительно очень узкими пределами. Кочевой образ жизни также сильно ограничивает размеры населения, могущего найти себе пропитание на известной территории, что привело в свое время к социальному движению, известному под названием великого переселения народов. Переход к оседлому земледелию чрезвычайно расширяет границы возможного прироста, создавая возможность прокормления гораздо большего количества людей на той же территории. И, наконец, широчайшие возможности в смысле прироста населения создаются переходом к индустриальному развитию, так что 19-е столетие является в известном смысле неповторимым в истории человечества. Однако и независимо от сильного и при том продолжающегося усиливаться падения рождаемости, можно предположить, что кульминационная точка этого развития уже позади. Такое явление, как возникновение мировой войны, является подтверждением такого предположения, хотя с другой стороны, несомненно, существуют и широкие еще возможности расширения производства средств пропитания. Когда мы в этом отношении подойдем ближе, чем сейчас, к естественным пределам, то лишь тогда будет полностью оценено великое значение учения Мальтуса. Судя по историческому опыту, можно думать, что установление стационарности населения или даже тенденция к его почижению определится значительно раньше, чем будут достигнуты указанные пределы. Нельзя в этом отношении возлагать и излишних надежд на успехи научного знания, которому априорно не дано преодолеть окончательно естественной ограниченности средств поддержания человеческой жизни, если, конечно, отвлечься от фантазий относительно возможности колонизации других планет. Самое возникновение таких фантазий указывает на то, что в человечестве наростает сознание невозможности сохранения в дальнейшем того коэффициента прироста населения, какой мы наблюдали в течение истекшего столетия.

Если бы было возможно количественно измерять значение каждого фактора, влияющего на рост населения, в том числе и значение такого определяющего фактора, как отношение масс населения к вопросу о возможном количественном пределе продолжения человеческого рода, то коэффициент прироста населения ρ можно было бы представить в качестве функции времени и значительного числа изменяющихся параметров, так что вместо формулы простого вида

$$B_{t+dt} = B_t\,[1 + \Phi(t)\,dt]\,,$$

мы имели бы

$$B_t = B_0 \Phi\,(a, b, c, \ldots\ldots t).$$

Влияние всех этих параметров представляется по большей части несущественным и ограниченным. Во всяком случае их влияние может сказаться лишь в течение очень значительного временного интервала. Зато некоторые из них могут приобрести и для короткого интервала более или менее крупное значение и привести к быстрому изменению в отношении роста населения, хотя бы и территориально ограниченному (землетрясения, эпидемии, неурожаи, войны). Для полного исследования функции роста населения необходимо было бы также исследовать зависимость каждого отдельного параметра от времени. По современному состоянию знания определить все эти изменения представляется в большинстве случаев невозможным. Однако форма функции, выражающей эти влияния, не является всегда неопределимой, если мы только отвлечемся от ряда параметров, влияние которых будет признано априорно несущественным. Естественно, что в самом отборе параметров неизбежны элементы значительного субъективизма.

Ряд факторов, влияющих на величину прироста населения, изменяется таким образом, что относительно них может быть предположена периодичность появления определенных значений, напр., метеорологические условия. Как бы ни было скрыто влияние таких факторов иными, но они должны влечь за собою и периодичность в развитии прироста населения. Давно уже было наблюдено, напр., что скопление зачатий наблюдается, по крайней мере для городского населения, весною и летом, а рождений — весной.

Если обозначить через T_1, T_2, ... продолжительность периодов влияния факторов, через α_1, α_2, ... продолжительность разделяющих эти периоды интервалов, через a_1, a_2, ... амплитуды изменений и через Q — сумму влияний всех прочих факторов, то периодичность в приросте населения выразится формулой, примерно, следующего строения:

$$\frac{\rho_t}{\rho_0} = 1 + \left[a_0 + a_1 \operatorname{Sin}\left(\alpha_1 + \frac{t}{T_1}\right) + a_2 \operatorname{Sin}\left(\alpha_2 + \frac{t}{T_2}\right) + \cdots\right] + Q \qquad (3)$$

Изменения прироста населения под влиянием переселений носят, если отвлечься от периодических переселений, обусловливаемых туризмом, приливом и отливом сезонных рабочих, участием в периодических съездах, ярмарках и т. д., имеют вообще непериодический характер. Наблюдения над иммиграцией приводят к заключению, что под ее влиянием коэффициент прироста населения возрастает до известного максимума, по достижении которого он падает, приближаясь ассимптотически к первоначальной или ближайшей к ней величине. Характерен в этом отношении пример прироста населения в Калифорнии. Указанное обстоятельство делает возможным выражение простейших изменений этого рода в форме потенциальной функции

$$\frac{\rho_t}{\rho_0} = 1 + \eta t^{m - nt} \tag{4}$$

При помощи выбора соответствующих параметров η, m, n можно исчерпать большинство индивидуальных явлений. Положительный знак перед η означает иммиграцию, а отрицательный — эмиграцию.

В соответствии со сделанными выше указаниями важно определить значение максимума этой функции. Для этого мы представляем ее в форме

$$y = \eta e^{(m - nt)\, lt},$$

дифференцируя, получаем

$$\frac{dy}{dt} = \eta t^{m - nt}\left(\frac{m}{t} - n - nlt\right).$$

Если обозначить через t_0 значение t, при котором получается максимум, то для определения его мы имеем уравнение

$$\frac{m}{n} = t_0\left(1 + lt_0\right).$$

4.

Коэффициент прироста населения находится в определенной зависимости от распределения населения по полу и возрасту. Относительно последнего можно заместить возрастное распределение величиною, которую мы уже определяли выше, как среднюю продолжительность человеческой жизни.

В странах со значительной иммиграцией для полового состава населения характерно преобладание мужского населения над женским, что находится в связи с преимущественной эмиграцией холостых мужчин. Для большинства же культурных стран характерно как раз обратное — преобладание женского населения над мужским, с тенденцией к постепенному росту этого преобладания, на почве большей жизнеспособности особей женского пола при, вообще говоря, меньшей квоте их рождаемости по сравнению с мужским полом. Если предположить длительное господство моногамии и сохранение узких пределов для внебрачных рождений, то уже этого обстоятельства достаточно для предположения о неизбежности замедления в темпе прироста населения, так как и средняя продолжительность жизни индивидов женского пола больше.

В отношении средней продолжительности человеческой жизни нужно отметить, что она в общем возрастает, что должно иметь естественным результатом рост коэффициента прироста населения. Для Европы 1900 года средняя продолжительность жизни составляла для мужчин 26,934, для женщин 27,341 и для лиц обоего пола 27,148 лет. О методе определения ее мы должны сказать несколько слов.

Количество лиц, составляющих определенную возрастную группу, может быть, очевидно, представлено функцией их возраста. Если через x обозначить определенный возраст, в смысле числа полностью прожитых человеческой группой лет, а через l_x, число лиц, переживших x-тый день своего рождения, то

$$l_x = f(x).$$

Характер этой функции нашел свое определение в известной, лежащей в основе ряда таблиц смертности[1]), формуле Гомперца-Макгама

$$l^x = c\ k^x g^{rx},$$

где c, k, g, и r обозначают постоянные, которые нужно избрать на основании материала наблюдений таким образом, чтобы они по возможности точно давали характеристику последнего.

При определении средней продолжительности жизни можно исходить из точной формулы, основанной на предположении, что величина населения определенного возраста есть функция этого возраста и, следовательно, распределение населения по возрастам предопределено, если дана его величина хотя бы для одного возраста, либо из приближенной формулы, о которой мы скажем несколько слов ниже. Исходя из вышеопределенной функции, средняя продолжительность человеческой жизни, которую нужно образовать отдельно для обоих полов и которую мы обозначаем через x_m, будет выражаться

$$x_m = \frac{\int_0^\omega x\, l_x\, dx}{\int_0^\omega l_x\, dx}$$

где ω представляет наивысший возможный для данного населения возраст.

Среднюю продолжительность человеческой жизни не следует идентифицировать с ожиданием жизненной продолжительности для возраста 0. В то время как первое есть не что иное, как средняя из продолжительностей жизни известного населения, измеряемая для определенной временной точки, ожидаемая продолжительность жизни есть не что иное, как будущая, т.-е. вероятная, продолжительность жизни всех новорожденных. Для стационарного населения, для которого коэффициент смертности изменяется от возраста к возрасту, но для каждого возраста остается постоянной величиной на длительный период, апостериорно устанавливаемая средняя продолжительность жизни населения может равняться ожиданию будущей продолжительности жизни.

---

[1]) См. об этом A. Loewy. „Versicherungstmahematik“, Sammlung Göschen. 1910. N. Broggi. „Versicherungsmathematik“. Teubner. 1911. Landrè. „Mathematisch-technische Kapitel zur Lebenswersicherung“. 5. Aufl. G. Fischer. 1922.

Если мы ожидание продолжительности жизни для лиц, возраст которых составляет точно x лет, обозначим через e_x^0, а всю совокупную будущую продолжительность их жизни—через T_x, то ожидание составляет частное от деления T_x на число лиц, следовательно,

$$e_x^0 = \frac{T_x}{l_x} = \frac{1}{l_x}\int_x^\omega l_x \; dx,$$

а вся будущая продолжительность жизни всего населения, начиная от новорожденных и кончая предельно возможным возрастом ω, составляет

$$\int_0^\omega e_x^0 \, l_x \, d = \int_0^\omega T_x \, dx,$$

а ожидание средней продолжительности жизни составит

$$\frac{\int_0^\omega T_x \, dx}{\int_0^\omega l_x \, dx},$$

т.-е. совпадет с $\frac{\int_0^\omega x \, l_x \, dx}{\int_0^\omega l_x \, dx}$ или средней продолжительностью жизни.

Ожидание продолжительности жизни для новорожденных также изменяется во времени и, как показал опыт XIX столетия, возрастает.

Приближенной формулой для средней продолжительности жизни населения (средний возраст) является

$$x_m = \frac{1}{2} + \frac{\sum_0^\omega x \, l_x}{\sum_0^\omega l_x}.$$

Для большего приближения к действительности, в предположении, что число рождений распределено более или менее равномерно на протяжении года (что, как мы знаем, далеко не точно) устанавливается, что каждое лицо возраста x прожило в действительности $x + 1/2$ лет. Если исходить из временного интервала, точно совпадающего с календарным годом, то можно прийти к тому же, предположив, в целях упрощения приближенной формулы, что все рождения приходятся на середину года. Если отбросить в нашем выражении $1/2$, то мы получим среднюю продолжительность жизни, для ближайшего к моменту наблюдения—дня рождения, в следующей форме:

$$x_m = \frac{\sum_0^\omega (x+1) \, l_x}{\sum_0^\omega l_x}$$

5.

Рождаемость, как мы видим, падает во всех культурных странах, что находится в несомненной связи с изменением условий социального характера, с одной стороны, с повышением среднего возраста лиц, вступающих в брак, а с другой с повышением материального уровня и самоограничением на этой почве масс населения. Эмпирически установлено, что при низком уровне потребностей и тяжелом материальном положении коэффициент рождаемости относительно высок, а падает он в наибольшей степени для средних, в смысле материальной обеспеченности, слоев населения. Конечно, существует еще целый ряд факторов, влияющих на понижение коэффициента рождаемости, но мы выделили лишь те, кои представляются определяющими.

Нижеследующая таблица освещает этот процесс падения рождаемости в ряде стран на протяжении последнего полувека до войны (1860-1913 г.г.).

На 10.000 наличного населения приходилось новорожденных:

Периоды	Австралия	Англия и Уэльс	Франция	Пруссия	Италия	Швейцария	Норвегия	Швеция	Австрия	Венгрия	Средняя
1860—1864	426	349	266	385	379[2])	—	—	336	387	—	358
1865—1869	404	353	261	381	374	—	—	305	379	415[4])	351
1870—1874	376	354	255	383	366	299	299[3])	302	394	421	345
1875—1879	356	356	256	398	376	319	316	307	393	448	353
1880—1884	351	338	248	372	370	292	307	294	383	440	340
1885—1889	354	320	236	375	381	279	307	291	379	444	337
1890—1894	334	205	224	369	362	273	303	276	369	414	322
1895—1899	243	296	220	367	344	282	304	270	378	395	310
1900—1904	266	284	214	354	327	282	291	264	364	381	303
1905—1909	246	267	201	309	326	264	266	256	340	368	284
1910—1913	277	243	191	296	324	244	257	239	317	357	274
Средняя	354	335	235	366[1])	357[1])	284[1])	296	287	374	411[1])	

Самое понятие рождаемости употребляется в довольно разнообразных смыслах и, вообще говоря, сюда относится все касающееся воспроизведения человечества и вся вытекающая отсюда система сложных отношений. Для нас имеют значение лишь те проблемы рождаемости, которые касаются варьирования коэффициента рождаемости, как определяющего фактора для прироста населения, следовательно, конечный результат воспроизводства населения. При этом нужно однако иметь в виду, что сама величина рождаемости определяется влиянием очень сложной совокупности причин естественного и социального порядка; в частности, частота рождений или общий коэффициент брачности должны рассматриваться в качестве одного из определяющих для рождаемости факторов,

[1]) Только до 1912 г. [2]) Только для 1864 г. [3]) Только 1871 — 1873г. [4]) Только 1866—1869 г.

а величина смертности находится с величиной рождаемости в состоянии несомненной функциональной зависимости, характер которой не представляется еще достаточно выясненным.

Под общим коэффициентом рождаемости мы понимаем дробь, числителем которой является число всех родившихся на протяжении определенного временного интервала, а знаменателем — средняя величина всего населения на протяжении того же интервала. Обе эти величины являются переменными и обе они являются функциями времени. Если прирост родившихся во временном интервале от t до $t+dt$ обозначить через $f(t)$, то одновременный прирост населения — оба прироста представляют отношение к единице населения — можно обозначить через $F(t)$. Пусть число рождений в течение года, которые мы для простоты относим полностью к середине года, будет G_m, а средняя величина населения по прежнему B_m. Тогда средний годовой коэффициент рождаемости относимый к середине года, с какового момента начинается и счет времени, γ_m, будет:

$$\gamma_m = \frac{G_m}{B_m} = \frac{G\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(t)\,dt}{B\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} F(t)\,dt} \tag{5}$$

B—обозначает здесь фактическое наличное население в середине года, а G—соответствующее этому моменту годовое число рождений, т.-е. то число рождений, которое получилось бы, если бы характерная для середины года частота рождений была распространена на весь год. В качестве приближения, и, если дело идет о значительном населении, можно идентифицировать B и B_m.

Взаимозависимость коэффициента рождаемости и коэффициента смертности, в первую очередь грудных младенцев, устанавливается эмпирическим наблюдением в определенном направлении. По общему правилу, высокий коэффициент рождаемости сочетается с высоким же коэффициентом смертности грудных младенцев, но последний сам по себе, повидимому, лишь слабо влияет на величину рождаемости. Так как в то же время выяснилось, что повышение смертности грудных младенцев лишь в слабой степени повышает риск новой беременности, то отсюда нужно сделать тот вывод, что те же социальные условия, которые обусловливают повышенную рождаемость (раньше всего низкий материальный уровень населения), обусловливают и повышение смертности грудных младенцев.

Так как детская смертность в первом году жизни очень велика, то определенный выше коэффициент рождаемости не может дать удовлетворительного выражения для воспроизводительной силы населения, учитывая опустошение, происходящие для каждой генерации в ее первом жизненном году. Книббс и Чубер вводят новое понятие — остаточный коэффициент рождаемости (residuale Geburtenrate), под которым понимают коэффициент рождаемости, корректированный величиной смертности в первом году жизни. Если γ представляет коэффициент рождаемости, γ_r — корректированную вышеуказанным способом ее величину, τ — коэффициент смертности на первом году жизни, взятый в отношении к числу рождений, то

$$\gamma_r = \gamma (1 - \tau)$$

при чем выражение, заключенное в скобки, представляет относительную величину переживших первый год своей жизни. Для населения с постоянной частотой рождений и постоянной величиной смертности для первого года жизни эта величина совпадала бы с вероятностью жизни для возраста $x = 1$, т.-е. величиной, которую мы обозначаем через ${}_0p_1$, так как в этом случае она была бы не чем иным, как отношением $l_1 : l_0$. При этих условиях можно написать,

$$1 - \tau = {}_0p_1 = \frac{l_1}{l_0}, \tag{6}$$

что, повидимому, может быть применено в качестве приближенной формулы и при условии изменяющихся коэффициентов рождаемости и смертности грудных младенцев, если эти изменения держатся в относительно узких границах.

Колебания коэффициента рождаемости находятся в зависимости — в этом убеждают и теоретические соображения и эмпирический опыт — от коэффициента брачности. Периоды понижающейся рождаемости суть в то же время и периоды понижающейся брачности. Последнее, как и первое, характерно для большинства культурных стран, что можно условно рассматривать, как сознательное или бессознательное проникновение в массы начал мальтузианства. Параллельно с понижением рождаемости происходит и понижение величины смертности грудных младенцев, в силу чего совокупный эффект действия обеих тенденций сводится к относительной устойчивости остаточного коэффициента рождаемости, и, во всяком случае, падение этой величины представляется гораздо более ослабленным, а для определения движения населения изменения именно этой величины имеют решающее значение. Кривую падения корректированного коэффициента рождаемости можно было бы назвать Мальтусовской кривой.

В законе, установленном Мальтусом, нужно различать его сущность и внешнюю форму выражения. Что касается первой, то она сводится лишь к установлению того положения, что возрастание населения имеет тенденцию, при условии неограниченного влияния инстинкта размножения, происходит относительно быстрее, чем возрастание средств поддержания человеческой жизни. Опыт всей человеческой истории подтверждает правильность этого закона, а наблюдения последнего времени не опровергают его ни в малейшей степени, так как устанавливают, что после того, как новый способ производства очень существенно раздвинул рамки количественного накопления населения, в процессе развития этого способа производства, массы населения вынуждены приспособлять свое воспроизводство к внешним материальным условиям существования, и свести причины воздержания (падение коэффициента рождаемости и брачности) к влиянию одного лишь фактора—неравномерного распределения материальных благ — очевидно, не представляется никакой возможности.

В гораздо большей мере и с гораздо большим успехом оспаривалась та форма, в которой сам Мальтус выразил свой основной закон народонаселения и которая, в общем, сводится к следующему положению: если в течение известного периода производство средств существования имеет тенденцию возрастать в отношении арифметической прогрессии, то неизбежно наступление момента, когда население обгонит в своем росте производство средств поддержания человеческой жизни, после чего должно начаться вымирание до тех пор, пока между обеими величинами не будет восстановлено необходимого равновесия. Нам нужно установить, в какой мере эта формула находится в соответствии с вышеочерченным процессом изменения коэффициента рождаемости.

Допустим, что, начиная с известного момента ($t = 0$) возможный рост производства средств существования происходит в отношении $1 + qt$ и одновременно население возрастает по закону e^{rt}. Оба выражения исходят из величины I, так как оба они обращаются в единицу при $t = 0$.

Далее, пусть $q = Mr$. Нужно предположить, что величина M значительно больше 1. В таком случае, для достаточно малых значений t величина $1 + qt$ будет больше, чем e^{rt}, т.-е. для небольших временных интервалов возрастание производства средств существования происходит в размерах, превышающих потребности населения, т.-е. существует избыток этих средств. Такое положение прекращается в тот момент, когда оба отношения возрастания становятся равными, т.-е. когда

$$1 + qt = 1 + Mrt = e^{rt}.$$

Разлагая потенциальную функцию в ряд, после чего можно в обеих частях отбросить единицу и произвести сокращение на rt, в результате мы получаем для определения t уравнение:

$$\frac{2\,(M-1)}{r} = t\left(1 + \frac{rt}{3} + \frac{r^2\,t^2}{3.4} + \frac{r^3\,t^3}{3.4.5} + \ldots\right) =$$

$$= t\left\{1 + \frac{rt}{3}\left[1 + \frac{rt}{4}(1 + \ldots)\right]\right\}.$$

Последняя форма может быть использована для определения величины t путем последовательного приближения.

Если принять во внимание, что, согласно наблюдению, r не может превышать 0,03, то написанное выше уравнение приводит нас к замечательному результату. Если представляется возможным повысить производство средств существования в течение ряда следующих друг за другом годов в отношении $1{,}1 + M{,}r$ $1 + 2Mr$, $1 + tMr$, то после сравнительно небольшого количества истекших лет должен наступить момент, когда должно произойти сокращение величины приходящихся на каждого индивидуума средств существования. Необходимый для того период, определяемый значениями M и r, можно назвать Мальтусовским эквивалентным интервалом.

Чтобы создать себе представление о величине последнего, мы можем определить его (t) при нижеследующих значениях M и r.

Мальтусовский эквивалентный интервал при различных коэффициентах возрастания (количество лет)

M	Отношение, в котором возрастает население e^{rt}, возрастание средств существования в отношении $1+Mrt$				
	rt	r=0,01	r=0,015	r=0,02	r=0,03
2	1,2564	125,6	83,8	62,8	41.9
4	2,3370	233,7	155,8	116,8	77,9
8	3,3150	331,5	221,0	165,7	110,5
16	4,2290	422,9	281,9	211,4	141,0

Если M принять равным 1,5, а $r=0{,}015$, то при помощи интерполяции получается $t=53$ годам. При $M=13{,}4$ и том же r, $t=266{,}6$ лет, при $M=29{,}483$ и том же r, $t=333{,}3$ годам. Максимум в нашей таблице для t (422,9 лет) получается тогда, когда мы принимаем r ниже той величины, которая характерна для последнего полувека, в 1%, в то время как мы видели, что период удвоения величины населения на основании наблюдений 1906—1911 г.г. составляет примерно 60 лет. При предположении, что $M=16$, т.-е. возрастание средств существования составляет 16% в год, и их производство увеличится в течение 50 лет в 9 раз, а в течение столетия в 17 раз против исходного предположения, то и при этих условиях потребуется всего лишь 423 года *до наступления критического момента, когда вся сумма потребностей возростего* населения — в предположении, что эти потребности не могут быть урезаны — не сможет быть удовлетворена. Как бы практически ни мало (но непременно положительно) было избрано значение r и как бы велико ни было практически M — оно, конечно, не может принимать размеров, явно немыслимых — все равно интервал t будет сравнительно невелик в сравнении с историческими и еще менее геологическими интервалами. Таким образом, можно и с точки зрения внешней формулировки прийти к выводу о ее правильности у Мальтуса. Как бы ни казалась малой наблюдателям современная величина прироста населения — она должна представляться очень большой, если припомнить, что для человеческой истории характерна стационарность населения в течение ряда столетий — все же в течение сравнительно недалекого будущего должны возникнуть стеснения в пропитании населения, в особенности для стран со значительной плотностью населения, если, конечно, само население не ограничит действия своей воспроизводительной способности до уровня относительной стационарности последнего.

Мы можем обозначить для определенного населения величину коэффициента роста населения при предположении, что воспроизводительная способность ничем не ограничивается через Γ, а наблюдаемый (действительный) коэффициент прироста через $\gamma=m\Gamma$, при чем очевидно, что величина $m<1$ и выражает отношение понижения действительного прироста против физиологически возможного. Величина m может быть названа мальтусовским коэффициентом. Поскольку γ представляется функцией времени, то же относится, очевидно, и к mΓ. Для каждой группы населения кривая мальтусовского коэффициента обладает индивидуальным строением, и в направлении построения этих кривых и их сравнении должна производиться статистическая работа ближайшего будущего.

К вопросу о физических основаниях принципа относительности

А. Железовский

I.

Специальный принцип относительности вырос из двух основных положений, установленных путем достаточно точного эксперимента. Эти положения, как известно, представляют собою утверждения: а) что никаким опытом невозможно установить состояния прямолинейного и равномерного движения системы по отношению к пространству и б) для всякой системы, независимо от состояния ее прямолинейного и равномерного движения, скорость света в пустоте является одной и той же. Результаты измерений, произведенных Миллером, на первый взгляд, подрывают основания специальной теории относительности. Однако, для того, чтобы получить полную достоверность, эти измерения должны быть повторены; кроме того, эти результаты, даже в случае их подтверждения, не могут служить доказательством того, что мы обнаружили движение относительно абсолютно неподвижного пространства. Гораздо более вероятно, что скорость распространения электромагнитных возмущений будет зависеть от характера, величины и относительного перемешения полей, параллельно которым происходит распространение луча.[1])

Поэтому, поскольку мы до настоящего времени не можем вообразить себе такую экспериментальную обстановку, которая, отличаясь принципиально от прежних, давала бы надежду на возможность обнаружить абсолютное движение мы должны принять первое основное положение принципа относительности Энштейна за факт, с которым должно считаться всякое мировоззрение.

Но из невозможности обнаружить абсолютное движение еще не вытекает принцип относительности Энштейна. Только сопоставление этого положения с утверждением, что скорость света в пустоте является величиной постоянной для всякого наблюдателя, независимо от скорости его прямолинейного и равномерного движения, приводит к этому принципу.

Основанием для этого второго утверждения послужил также опыт Майкельсона, показавший, что скорость распространения света вдоль направления

---

[1]) Статья эта написана почти за два года до опубликования работы Миллера. При чтении корректуры введен лишь этот абзац и несколько примечаний в дальнейшем. Мне кажется, что излагаемое толкование принципа относительности вполне примиряет его с результатами Миллера.

движения земли и поперек этого направления одна и та же. Однако, опыт этот установил только, что скорость света не зависит от состояния движения источника света и наблюдателя, если они находятся относительно друг друга в покое. Допущение, что свет увлекается движущимся источником или наблюдателем, вполне удовлетворительно объясняет результат опыта Майкельсона. [1])

W. Ritz [2]) предположил, что скорость света зависит от скорости движения источника. Однако, его теория очень скоро наткнулась на противоречие с экспериментальными данными; в частности, из нее вытекала возможность видеть звезду (принадлежащую к системе двойных звезд) одновременно в двух положениях. Наблюдения показали, что это не так, и гипотеза Ritz'а была оставлена. Точно так же неудовлетворительной оказалась и гипотеза H. Hertz'а [3]), допустившего, что световой луч вместе с эфиром увлекается системой, к которой принадлежит наблюдатель. В противоречии с Герцовскими уравнениями для движущихся тел оказались наблюдения Эйхенвальда, Wilson'а, Физо, а также явления аберрации. Таким образом, на почве старых воззрений на пространство и время нельзя найти удовлетворительного объяснения совокупности наблюдаемых явлений с одной, общей, точки зрения. Выходом явилась идея Энштейна об относительности времени, представляющая собой строго логический результат допущения, что два наблюдателя, движущиеся относительно друг друга, обнаруживают каждый по отношению к себе одну и ту же скорость распространения у о д н о г о и т о г о ж е л у ч а с в е т а.

Ценность гипотезы Энштейна лежит не только в том, что ему удалось привести в согласие противоречивые опытные данные, но и в том, что на почве этой гипотезы мы приобрели новые сведения о свойствах луча и нашли объяснение некоторым особенностям внутриатомных движений. Несмотря на плодотворность новой гипотезы, она среди ряда физиков вызывает возражения, проистекающие из двух источников. С одной стороны, указывается на то, что принцип относительности лишает мир его физической сущности, с другой — что экспериментальные основания его недостаточно широки. Однако, эти возражения не могут поколебать теории, пустившей в самых разнообразных областях столь глубокие корни.

Иначе обстоит дело с картиной мира, которая может быть построена на основании формальных положений теории относительности. Принцип относительности вырос в момент господства идеи о материальном мировом эфире, и всякое иное толкование, чем дал Энштейн, должно было сводиться или к признанию бесконечного числа эфиров, увлекающихся друг относительно друга с различными

---

[1]) Если бы справедливость измерений Миллера подтвердилась, то их толкование, с точки зрения мирового эфира, дало бы доказательство того, что световой луч отчасти увлекается движущимся телом и тем меньше, чем дальше он от движущегося предмета. Однако, в противоречии с этим толкованием стоят все те факты, которые стоят в противоречии с гипотезой Герца.

[2]) W. Ritz. Ann. d. chim. et d. phys. 13, 145. 1908.

[3]) H. Hertz. Über die Grundgleichungen der Electrodynamic für bewegte Körper Wied. Ann. 41. 364. 1890.

скоростями, или к установлению совершенно непонятной связи между размерами тел и скоростью их движения. В настоящее время, когда трудами творцов принципа относительности идея о материальном эфире разрушена, допустимо попытаться построить картину мира без введения какой-либо материальной мировой среды, основываясь на чисто энергетических представлениях.

Совокупность наших сведений о внешнем мире является, строго говоря, совокупностью сведений о разнообразнейших полях, которые мы наблюдаем. Воздействие полей сил, их изменения и свойства покрывают всецело человеческий опыт. Можно сказать, что если мы знаем что-либо о мире, то это свойства и взаимодействия силовых полей. Пространства, лишенного силового поля, мы не наблюдаем, и наблюдение это совершенно невозможно. Если бы мы некоторую часть мира окружили совершенно нетеплопроводной и нетеплопрозрачной оболочкой, температура которой равна абсолютному нулю, то и в этом случае внутри этой оболочки все-таки оказалось бы поле тяготения. Произвести какое-либо измерение в пространстве, лишенном поля, является физически совершенно невыполнимой и невозможной задачей. Геометрическое пространство, несомненно, представляет собою отвлечение, выражение для некоторых из свойств реального физического пространства. То, что мы называем геометрическим пространством, является одним из свойств силового поля. Приписывать ему совершенно самостоятельное, абсолютное, существование нет никакого основания. Вот почему вопрос о движении по отношению к абсолютному пространству является праздным; поэтому же всякий опыт, направленный к обнаружению влияния такого движения, обречен на неудачу.

Что взаимодействие двух тяготеющих или электрических центров не зависит от присутствия других электрических или тяготеющих масс, является основным положением современной науки. Эти массы могут изменить величину результирующей силы, действующей на данное тело, но каждая из слагающих поля зависит исключительно от взаимодействия тяготеющих или электрических центров. Один и тот же заряд на другие заряды, находящиеся по отношению к нему в различных состояниях движения, действует различно, и это различное действие мы мыслим передающимся в пространстве параллельно друг другу. Нет никаких оснований для того, чтобы связывать скорость передачи этих действий с абсолютным пространством, а не с полем того тела, относительно которого только и существует данное действие. С этой точки зрения, полагая незыблемым принцип постоянства скорости света для различных наблюдателей, можно найти физическое основание для этого факта в свойствах полей, представление которых является элементарной основой всякой физической гипотезы, не исключая и принципа относительности.

Основным свойством полей, в котором нам не позволяет сомневаться вся совокупность нашего опыта, является то, что поле связано с системой, его обусловливающей. Когда мы говорим о скорости света на земле, то, в сущности, имеем дело со скоростью света не в пустоте, а в поле сил, окружающих землю; когда мы говорим о скорости света между телами А и В, то, по существу, мы имеем дело с процессом, распространяющимся отнюдь не в пустом пространстве, а в поле сил, обусловленном телами А и В.

Какова сущность тех процессов, которые приводят к образованию полей сил, мы до настоящего времени не знаем. Как бы глубоко мы не продвинулись в изучении свойств внешнего мира, в области наших знаний всегда будут существовать некоторые элементарные понятия, которые лежат на границе нашего познания. К таким элементарным понятиям в настоящее время принадлежит представление о силовом поле. Поэтому, как эфирная теория не объяснила сущность процессов, приводящих к образованию силовых полей, так и всякие другие гипотезы в большей или меньшей степени должны разделить ее участь. Задача сводится лишь к тому, чтобы объяснить, по возможности, свойства различных полей с одной и той же точки зрения. Принцип относительности так же постулирует в каждой точке пространства величины, характеризующие тяготеющее и электромагнитное поле, и на почве этого постулата дает выводы законов, управляющих отдельными явлениями природы.

Другим основным свойством поля является его неуничтожаемость. Всякий элементарный заряд, всякий тяготеющий атом образует вокруг себя поле; на это поле могут налагаться поля других зарядов или материальных масс; благодаря этому наложению, результирующая сила может стать равной нулю, но это отнюдь не указывает на уничтожаемость поля, подобно тому как отсутствие натяжений в материи не указывает на исчезновение сил сцепления. Силы поля каждого отдельного заряда, каждой отдельной материальной частицы проявляются, как отдельные слагаемые, результирующую которых и представляет собою сила суммарного поля. Поле постольку же неуничтожаемо, поскольку справедливы законы сохранения материи и зарядов.

Если система состоит из тел, покоющихся друг относительно друга, то суммарное поле системы остается постоянным.[1]) В системе не происходит никаких физических или химических процессов. Всякое изменение в системе сводится к смещению зарядов или масс, а с ними — и к изменению общего поля системы. Это изменение может быть наблюдаемо, оно-то и дает нам возможность судить об относительном движении тел. Если на данную систему тел падает луч света такой длины волны, для которой все тела системы прозрачны, то никаких изменений в поле системы мы не обнаружим, так как луч этот не вызовет смещения зарядов, из которых состоит система.

Вполне естественно допустить, что для всякого физического процесса играет роль не геометрическое пространство, а физическое, неизменно связанное с полем той системы, в котором процесс распространяется.

Это утверждение было бы неправильным лишь в том случае, если бы нам удалось установить существование такого процесса, который был бы связан не с тем или иным полем, а протекал бы независимо от имеющихся в данной точке полей. Только в этом случае эта точка могла бы для нас приобрести значение точки абсолютного пространства. Вся совокупность современных опытных

[1]) По крайней мере, в первом приближении, какое нам даст обычный физический эксперимент. С этой точки зрения опыт Миллера может дать нам указания на то, что поле тел, принадлежащих к данной системе, подвергается, повидимому, весьма малому изменению, благодаря присутствию других полей, пространственно с ними совпадающих. На это же указывает и смещение луча света в поле тяготения.

данных показывает нам, что такого процесса нет. Мало того, в настоящее время мы не можем указать такого процесса, который давал бы нам надежду на возможность когда-либо обнаружить действие абсолютного пространства.

Принимая невозможность действия на расстоянии, мы должны допустить, что всякое изменение в относительном распределении зарядов и масс вызывает перераспределение сил в общем поле системы, передающееся от точки к точке системы. Скорость этой передачи не зависит, в первом приближении, от относительного смещения полей других систем, но она не зависит также и от относительной скорости тела, вызвавшего это изменение, и тела, на которое это изменение воздействует. Пусть, например, в некоторой точке поля произошло смещение электрических зарядов. В результате этого смещения в поле системы наступает передача от одной точки к соседней изменения состояния поля, характеризующегося изменением распределения скалярного электромагнитного потенциала и электромагнитного векторпотенциала. Скорость передачи этих изменений не зависит от скорости смещения электрических зарядов, подобно тому, как скорость толчка не влияет на скорость распространения изменений, вызванных им в материальной среде. Скорость этой передачи зависит от свойств поля, а не от скорости относительного смещения центров, его обусловливающих.

Это представление о характере передачи изменений в поле вполне совпадает с математическим описанием свойств электромагнитных полей посредством основных уравнений теории Лоренца, если в них абсолютно неподвижную систему отнесения, связанную с покоющимся эфиром, заменить системой отнесения, неизменно связанной с точками поля того тела, для которого ищется значение потенциалов или сил. Вместо абсолютной скорости, в основные уравнения электронной теории войдет тогда относительная скорость взаимодействующих тел. Совершенно безразлично, какое из тел системы мы будем при этом считать неподвижным, какое движущимся; так как в уравнения входит только относительная скорость, то характер их от этого совершенно не изменится. Точно так же и скорость передачи процессов в поле не будет зависеть от выбора того тела системы, которое мы будем считать неподвижным. В качестве примера, возьмем систему из светящейся точки A и наблюдателя B, движущихся относительно друг друга с некоторой скоростью. Допустим сначала, что B неподвижен. Пусть в некоторый момент времени t, когда источник света A находился в точке поля A', он выслал луч света, который прибыл в точку B в момент t'. Скорость света мы найдем, полагая, что в точке A' неподвижного поля B возник сигнал и по этому неподвижному полю, пройдя путь $A'B$, достиг тела B за время $t'-t$. Полагая же, что источник света неподвижен, а тело B движется к нему навстречу, найдем, что в точке A' того же поля возник световой сигнал и к моменту t' достиг точки B. Путь, пройденный сигналом в поле наблюдателя B, будет попрежнему равен $A'B$ и время $t'-t$. Из постоянства скорости распространения электромагнитных возмущений в системе наблюдателя, уравнения Лоренца, написанные в предположении, что физическое значение имеет только относительная скорость движения, вытекает также и явление аберрации света.

Так как общий вид уравнений элекгронной теории, при замене в них скорости по отношению к абсолютному эфиру относительной скоростью электрона и наблюдателя, остается неизменным, то и общий вид функций, производные от которых дают решение этих ур—ий, остается тем же.

Таким образом:

$$\Phi = \int \frac{dv}{r}(\rho)\, t - \frac{r}{c} \qquad (1)$$

$$W = \int \frac{dv}{r}(k)\, t - \frac{r}{c} \qquad (2)$$

будут представлять собою соответственно скалярный электромагнитный потенциал и электромагнитный вектор-потенциал в точке, где находится наблюдатель. Здесь ρ объемная плотность зарядов, $k = \frac{\rho w}{c}$, w в отличие от формул, употребляемых обычно в электронной теории, не абсолютная скорость электрона, а относительная скорость электрона и наблюдателя, c скорость света, r расстояние от заряда до данной точки, t время, для которого ищется значение функций в данной точке. Значение ρ, w, k, r здесь берется не для момента времени t, а для момента $t' = t - \frac{r}{c}$.

Толкование этих формул сводится, как известно, к тому, что мы представляем себе сферу, описанную вокруг точки, для которой определяется значение ф-ий Φ и W, сжимающуюся со скоростью c; соответственные приращения ф-ий Φ и W, которые они получают при прохождении сферы через точки, для которых ρ и k отличны от нуля в момент времени $t' = t - \frac{r}{c}$ и представляют приращение потенциалов в момент времени t в наблюдаемой точке.

Для случая равномерно движущегося заряда эти выражения принимают вид: [1])

$$\Phi = \frac{e}{R\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \Psi}}$$

$$W = \frac{e\,w}{cR\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \Psi}}$$

где R уже—расстояние между электроном и наблюдателем в тот момент, для которого определяются ф-ии Φ и W, Ψ—угол между направлением движения заряда и направлением R, а $\beta = \frac{|w|}{c}$. С точки зрения электронной теории Лоренца, эти ф-ии дают распределение потенциалов вокруг электрона, движущегося со скоростью w в неподвижном эфире; с точки же зрения на физические

---

[1]) M. Abraham. Theorie der Electricität. B. 2, § 12.

процессы, как на результат взаимодействия полей, они дают распределение потенциалов в поле электрона, движущегося относительно окружающего поля со скоростью w. Для поля, покоющегося относительно заряда e, они принимают значения:

$$\Phi = \frac{e}{R}; \quad W = 0,$$

откуда и следует невозможность из наблюдений над электромагнитными процессами обнаружить общее равномерное движение системы. Для поля, движущегося относительно электрона с постоянной скоростью w, эти формулы представляют распределение потенциала вокруг точки, в которой в данный момент находится заряд e. Вводя координатную систему, начало которой совпадает с положением заряда в поле в данный момент, а направление оси X совпадает с направлением движения заряда, найдем:

$$R\sqrt{1-\beta^2 \sin^2 \Psi} = \sqrt{X^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}.$$

Таким образом, изопотенциальные поверхности в поле наблюдателя в каждый данный момент представляют собою эллипсоид вращения, отношение осей которого равно:

$$\sqrt{1-\rho^2} : 1.$$

Величину и направление электромагнитных сил в поле наблюдателя в данный момент найдем, полагая:

$$E = -\,\mathrm{grad.}\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}; \quad H = \mathrm{Curl}\ A,$$

причем производные, входящие в правую часть, относятся к системе координат, связанной с полем наблюдателя. Так как через промежуток времени ∂t значение ф-ии A в данной точке будет равно тому значению этой функции, которое она имеет в данный момент в точке, лежащей в направлении, противоположном направлению движения заряда на расстоянии ∂x, где ∂x есть путь, пройденный зарядом за время ∂t, то

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -(wv)\,A$$

и так как $A_y = A_z = 0$, то

$$\frac{1}{c}\,\frac{\partial A}{\partial t} = -\beta\,\frac{\partial A_x}{\partial x}$$

откуда

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \beta\,\frac{\partial A_x}{\partial x} = -(1-\beta^2)\,\frac{\partial \phi}{\partial x} = (1-\beta^2)\,\frac{ex}{s^3}; \quad H_x = 0$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = (1-\beta^2)\frac{\epsilon y}{s^3}; \qquad H_y = \frac{\partial A_x}{\partial_z} = \beta\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\beta\varepsilon_z$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = (1-\beta^2)\frac{\epsilon z}{s^3}; \qquad H_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y} = -\beta\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \beta\varepsilon_y$$

где

$$s = R\sqrt{x^2 + (1-\beta^2)\quad(y^2+z^2)}.$$

В символах векториального анализа получим:

$$E = (1-\beta^2)\frac{eR}{s^3}; \qquad H = \frac{(1-\beta^2)e}{cs^3}[wR].$$

Таким образом, электрическая и магнитная сила в каждый данный момент обусловливается положением заряда в тот же момент. Электрическая сила совпадает с направлением радиуса-вектора, соединяющего наблюдателя и заряд, магнитная же к нему перпендикулярна. Полученные выражения по своей форме и выводу не отличаются от формул электронной теории [1]), но там они представляют значение электромагнитных сил в системе неизменно связанной с движущимся зарядом, для нас же они представляют значения этих сил в поле тела, обладающего скоростью w относительно электрона. Формулы (1) и (2) для случая неравномерно движущегося электрона переходят в выражения для скалярного и электромагнитного вектор-потенциала, найденные Lienard'ом и Wiechert'ом [2]), с той лишь разницей, что в них войдет не абсолютная скорость движения электрона, а относительная. К такому же результату приводят и вычисления, основанные на формулах преобразования принципа относительности. [3])

В общем случае, когда мы имеем источник света и движущуюся относительно него систему отнесения наблюдателя, вычислениями, подобными тем, какими пользуется электронная теория [4]), заменяя всюду абсолютную скорость движения относительной, найдем значение электрической и магнитной силы, а также и вектора Пойтинга, для движущейся системы наблюдателя:

$$\varepsilon^1 = \varepsilon + \frac{1}{c}[wH]$$

$$H^1 = H - \frac{1}{c}[w\varepsilon]$$

$$S^1 = \frac{c}{4\pi}[\varepsilon_1 H^1],$$

где ε и H — значения электрической и магнитной сил для поля, которое покоится относительно светящегося тела, а ε^1 и H^1 — соотв. значения для поля,

---

[1]) M. Abraham. Theorie der Electricitäte B. II, ст. 89.
[2]) M. Abraham. Theorie der Electricität, B. II, § 11.
[3]) M. von Laue. Die Relativitätstheorie. B. I, ст. 154.
[4]) M. Abraham. Teorie der Flectricität, B. II, ст. 324.

находящегося в относительном движении со скоростью w. Из этих формул для случая плоской прямолинейно-поляризованной волны, для которой

$$H = \frac{1}{c}[c\,\varepsilon]; \qquad \varepsilon = \frac{1}{c}[Hc];$$

найдем

$$S^1 = \frac{c^1}{c^2}(c^1\,S),$$

где S вектор Пойтинга в системе неподвижной относительно излучающего тела, а c^1 определяется векториальным равенством

$$c^2 = c - w \tag{3}$$

Таким образом, вычислениями, аналогичными вычислениям в электронной теории, получаем, что направление луча света для движущейся системы совпадает с направлением, которое наблюдается при аберрации звезд. Последнее легко получить, рассматривая геометрическое векториальное равенство (3).

Что касается результата опыта Майхельсона, то он является совершенно естественным следствием изложенной картины взаимодействия полей.[1])

Результат опыта Эри, наполнившего зрительную трубу водой, является следствием того, что скорость распространения лучистой энергии данной длины волны изменяется соответственно показателю преломления среды. Это одинаково относится, как к радиальной скорости c в выражении (3), так и к переносной W, а следовательно отношение между ними не изменяется. Подобно вычислению угла аберрации, вычисления, дающие эффект Доплера, и результат опыта Физо по внешнему виду ничем не будут отличаться от вычислений, которыми пользуется электронная теория; только во все выражения при этих вычислениях вместо абсолютной скорости по отношению к покоющемуся эфиру придется поставить относительную скорость движущихся тел.

На первый взгляд противоречие возникает лишь в том случае, если мы имеем источник света (A) и двух наблюдателей (B и C), при чем скорость движения наблюдателей по отношению к источнику различна.

Это противоречие проистекает из того, что мы обычно рассматриваем луч света, исходящий от источника, как нечто общее для наблюдателей всех систем. Таким же рассматривает его и принцип относительности Энштейна. Если бы это было действительно так, то единственным выводом из наблюдаемых фактов было бы признание за формулами преобразования принципа относительности реального физического значения; необходимым следствием было бы кинематическое толкование мира.

Однако, можно представить, что смещение электронов в системе A, вызвав пертурбацию в поле системы AB и AC, дает начало двум независимым процессам.

Каждый из них распространяется в своей системе со скоростью, обусловленной свойствами соответственного поля; в полях, мало отличающихся друг от друга, и скорость распространения должна быть приблизительно одинаковой.

---

[1]) Результаты же, полученные Миллером, могут быть приписаны воздействиям тех полей, относительно которых смещается поле земли.

Луч, идущий к системе АВ, представляет собой возмущение в поле этой системы и можеть быть воспринят только телами, принадлежащими к ней; луч же, идущий в системе АС, воспринимается только ее телами. С этой точки зрения движущийся с поездом и стоящий неподвижно у полотна железной дороги, наблюдатели, глядя на огонь семафора, воспринимакт электомагнитные возмущения, возникшие в различных полях и находят одну и ту же скорость света именно потому, что лучи, воспринимаемые ими, имеют по отношению друг к другу некоторую скорость. Если бы мы захотели ввести формулы преобразования, которые давали бы нам одно и то же явление в различных системах отнесения, то мы задались бы задачей отыскания процессов, реально не существующих в природе. Это относится ни только к электромагнитным процессам, но и ко всякому процессу.

Если бы мы воспользовались Галилеевыми формулами преобразования, присоединяя еще к ним

$$c' = c + W,$$

где W относителная скорость системы, а c и c' скорость распространения возмущений, измеренная из одной той же системы отнесения, то процессу, происходящему в одной системе, в другой мы не нашли бы никакого соответствующего реального процесса.

Но если бы мы задались целью, зная характер явления, происходящего в системе А, найти явление, протекающее параллельно ему в системе В, то эту задачу мы смогли бы решить вполне определенно. Для этого необходимо знать формулы, описывающие какое-либо определенное явление, протекающее параллельно в системах A и B в функциях переменных, связанных соответственно с системами A и B, и найти такие формулы преобразования для этих переменных, которые при подстановке в выражение закона явления, происходящего в системе A, давалибы нам закон явления, происходящего в системе B. Решив однажды такую задачу, мы получаем формулы преобразования, годные раз на всегда, так как различие между системами сводится только к некоторой относительной скорости их перемещения .Вот почему, найдя формулы преобразования для переменных x, y, z, t, которые превращают уравнение световой волны

$$\triangle S = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

(где под S следует разуметь каждую из трех слагающих электрической и магнитной силы) в одной системе отнесений в подобное же уравнение для другой системы, мы можем утверждать, что и во всех других случаях найденные формулы дадут нам желаемый результат.

Таким образом, формулы преобразования принципа относительности дают нам средство, зная явление в какой-либо системе отнесения, описать его для любой другой системы, хотя сами по себе они могут и не представлять собой каких-либо реальных физических соотношений между координатами пространства и времени.

С этой точки зрения нет необходимости допускать, что час, протекший, например, на земле, соответствует столетиям в некоторой другой системе отнесения, обладающей соответственной скоростью движения. Достаточно принять гораздо более простое допущение, а именно, что когда наблюдатели на земле и этой и другой системы видят, как они думают, один и тот же луч света, они на самом деле наблюдают два различных, но протекающих параллельно друг другу процесса.

Изложенная картина, перенося центр тяжести физических процессов на взаимодействия полей, оставляет за временем и пространством относительное значение, формулы же преобразования Лоренца являются для нее средством разыскания, по существу различных, но протекающих в двух системах отнесения параллельно, процессов.

DES BASES PHYSIQUES DU PRINCIPE DE LA RELATIVITÉ.

La notion d'un champ de forces est une base fondamentale de n'importe quelle conception scientifique de la nature, c'est pourquoi toute hypothése, le principe de la relativité y compris, conduit à postuler un certain champ et ses proprietés. Les formules de transformations du principe special de la relativité relient les proprietés des champs que l'on observe dans les systemés qui sont en mouvement les uns par rapport au autrus.

Ces formules de transformations sont dépourvus d'un élément d'hypothése, puisque elles présentent des conséquences mathématiques formellement exactes, tirées d'une déscription mathématique des lois de la nature dans les dites sistèmes. Cependent, pour expliquer ces formules on admet que les phénomenes éléktromagnétiques observés dans les systemes, se mouvant l'un par rapport à l'autre, sont les mêmes. Si l'on renoncait à la tendence d'attribuer á l'éspace et au temps un caractair, absolu, il serait tout naturele de les considerer comme une proprieté du champ d'un système donné des corps. A ce point de vue la propagation des phénoménes éléctromagnetiques n'a pas lieu dans le vide, mais bien dans le champ provoqué par l'actions matuelle des corps entre lesquells ces phenomênes se propagent.

A la première approximation, d'accord avec la totalité de nos connaissances contemparaines, nous devons consideres un champ d'un système donné comme independent des champs d'autres systèmes [1]). Ainsi la propagation des perturbations dans un champ donné ne doit pas dependre d'un déplacement relatif d'autres champs. Cet énoncé a pour consequence, que la vitesse de propagatíon d'un rayon lumineux dans le champ de chaque observateur depend des proprietés du champ même.

Chaque observateur voit un rayon, se propageant dans son champ, tandis que les rayons, appartenant aux divers systèmes, presentent des phenomènes parallels.

---

[1]) Au moins à la première aproximation. Il est possible que les recherches de Muller et la déviation du rayon lnmineux dans le champs de gravitation indiquent la possibilité de la variation de perturbation dans le champs d'une systhème sous l'influense d'un autre champs, coïncident avec le premier dans l'espace.

Cette image conduit aux mêmes formules de transformations que le princip special de la relativité, mais les formules mêmes perdent leurs sense physique, en se transforment uniquement en un instrument mathématique pour trouver des expressions pour les phenomènes parallels qui ont lieux dans des systèmes différents.

En même temps les phenoménes physiques acquierent une réalité. A ce point de vue, quoique la marche de deux montres dans deux systèmes, se mouvant l'un par rapport a l'autre, peut etre la mêmes, la formule de transformations pour les variables x, y, z et t pour le passage d'un sistème dans l'autre en admettant

$$c' = c$$

reste la même que dans la theorie d'Einsten.

Cette supposition, tout en présentant une image plus simple de l'univers, fournit en même temps une base pour la recherche des relations entre les forces, qui agissent dans les champs differents et en particulier pour chercher la relation entre un champ de gravitation et un champ éléctromagnetique.

La courbe photographique de RR Lyrae

par B. Gerasimovič

La variable RR Lyrae (BD + 42°3338) appartient au nombre d'Antalgols de courte periode, formant une subdivision de la nombreuse famille des Cepheides. Le changement de son éclat a été decouvert par Miss Fleming encore en 1901. Dès lors cette variable avait été mainte fois l'objet de recherche de plusieurs observateurs de premièr ordre (Wendell, Hertzsprung, Shapley etc). Ces observations, executees avec l'aide de differents instruments et d'après differentes methodes ont prouvé le changement de la periode de la variable. La recherche la plus detaillée, faite en 1914 par M. Shapley, a donné pour l'epoque du maximum heliocentrique la formule:

$$\text{Max} = \text{J. D. } 2414856.451 + 0^{\circ}.566831 \text{ E} - 0^{\circ}.024. \text{ Sin } (0^{\circ}.0340 \text{ E} - 104^{\circ}5).$$

D'autre part on avait trouvé dans la région optique des irregularités indubitables de la hauteur du maximum et aussi des oscillations du temps be l'accroissement de l'éclat. Malheuresement l'insuffisance du material ne permettait pas de (definir la loi des ces oscillations; d'après ce que nous savons d'autres Antalgols (par ex. XX Cygni) cette lois doit être assez compliquée. Une recherche de la variable dans les rayons photographiques a été faite jusqu'a présent seulement par M. Martin [1]), avec le reflecteur de 15 pouces de l'observatoire Dunsink. M. Martin après avoir observé la variable en 1913—1914 ne nous dit rien de l'irregularité des maximums photographiques; il obtient pour la periode une formule lineaire, mais pour l'amplitude photographique une grandeur plus petite, que l'amplitude photometrique de M. Wendell. Pourtant ce dernier résultat parait être très douteux, si nous nous rappelons que l'amplitude photographique des Cepheides est toujours plus grande que l'amplitude photometrique, comme il fallait l'attendre d'après la théorie de pulsation des sphères gazeuses.

Comme l'avait decouvert M. Shapley [2]), la variation du spectre de RR Lyrae se trouve entre B_9 et F_2. En se basant sur les color-indices de M. Pickering [3]) nous trouverons pour la difference d'amplitudes 0^m36. De la sorte, si l'amplitude photometrique est égale à 0^m8 (Wendell), l'amplitude photographique

---

1) M. N., vol. 75
2) Astrop. J., vol. 44.
3) Harv. Annals, vol. 80

doit être approximativement $1^m.1$. C'est pourquoi il est interessant et important de renouveller les recherches de la variable par la voie photographique, ayant pour but de demontrer les irregularités de la courbe, de definir les nouvelles epoques du maximum et enfin l'amplitude photographique. J'ai fait cette recherche en 1916 — 1917.

Les images de la variable étaient obtenues dans le foyer de l'astrographe de l'observatoire de Kharkow (objectif Astro-Petzwal — ouverture 12 cm. distance focale 50 cm). En considerant la vitesse du changement d'éclat dans le lieu le plus interessant de la courbe, auprès du maximum, il était à désirer d'obtenir le plus grand nombre possible des poses sur le meme cliché. En reduisant le temps d'action photographique à 3-4 min, ce qui donnait des images assez bien definies (plaques Imperial de sensibilité superieure), il fut possible d'obtenir sur la même plaque jusqu'à 20 images de la variable. De cette façon en automne 1916 j'ai obtenu 5 clichés avec 39 images et en automne 1917 — 9 clichés aves 129 images. Comme étoiles de comparison, j'avais pris 5 étoiles trés proches de la variable, dont les grandeurs photographiques avait eté soigneusement determinées dar M. Martin en 1913 — 1914. Ç etaient:

BD	Gr. photogr.
+ 42°3325	7.29
+ 42°3352	7.77
+ 42°3340	8.34
+ 42°3331	9.00
+ 42°3336	9.19

Chaque cliché avait été mesurée deux fois en positions contraires (sud en haut et sud en bas). En excluant de cette façon l'erreur systematique du type parallactique, on peût obtenir une erreur accidentalle de mesures, en comparant les mesures de la même image. Elle se trouva assez petite — l'erreur probable de la même image a été differente pour differentes plaques (p. ex. pour les clichés №№ 75, 76, 77 elle était respectivement $\pm 0^m031$, $\pm 0^m022$, $\pm 0^m044$). Ainsi la précision de mesure ne laissait rien à désirer.

Les observations de 1916 — 1917 ont été reduites avec l'aide de periodes correspondantes à la formule de M. Martin; aprés quoi pour chaque année j'avais construit une courbe provisoire, ayant en vue de definir les moments de maximum. De cette manière les moments heliocentriques des maximum ont été definis et comparés avec les moments calculées.

	XI 1, 1916	IX 14, 1917
Observation . . . . . J. D.	2421168.723	2421485.023
Formule Martin	.738	.049
Formule Shapley	.705	4.998

Enfin les observations de deux ans ont été combinées ensemble pour obtenir la courbe moyenne definitive. C'est alors qu'il devient evident, que malgre la precision relativement haute du mesurage, les points auprès le maximum se dispo-

Grandeurs photographiques de RR Lyrae.

Plaque	Image		T-m. Greenw.	J. D.	Phase	Pose	Gr. photogr.
№		1916.		2421			
	1		$5^{h}\ 12^{m}4$	157.217	0.374	10^{m}	$8^{m}44$
	2		„ $30^{m}9$	230	0.387	10^{m}	$8^{m}36$
70	3	X 20	„ $44^{m}9$	240	0.397	10^{m}	$8^{m}45$
	4		$6^{h}\ 20^{m}7$	264	0.421	10^{m}	$8^{m}50$
	5		„ $30^{m}1$	271	0.428	10^{m}	$8^{m}55$
70a	6	X 21	$4^{h}\ 34^{m}3$	158.191	0.214	5^{m}	$8^{m}34$
	7		$5^{h}\ 45^{m}9$	160.240	0.562	5^{m}	$7^{m}76$
	8		„ $53^{m}2$	245	0.000	5^{m}	$7^{m}85$
	9		$6^{h}\ 0^{m}6$	250	0.005	5^{m}	$7^{m}93$
71	10	X 23	„ $14^{m}6$	260	0.015	5^{m}	$8^{m}02$
	11		„ $30^{m}5$	271	0.026	5^{m}	$8^{m}06$
	12		„ $39^{m}1$	277	0.032	5^{m}	$8^{m}03$
	13		„ $47^{m}8$	283	0.038	5^{m}	$8^{m}14$
	14		$4^{h}\ 46^{m}8$	167.199	0.152	5^{m}	$8^{m}29$
	15		„ $53^{m}6$	204	0.157	5^{m}	$8^{m}26$
	16		$5^{h}\ 50^{m}6$	244	0.197	5^{m}	$8^{m}31$
	17		„ $58^{m}9$	249	0.202	5^{m}	$8^{m}37$
	18		$6^{h}\ 5^{m}4$	254	0.207	5^{m}	$8^{m}47$
	19		„ $12^{m}9$	259	0.212	5^{m}	$8^{m}41$
72	20	X 30	„ $20^{m}0$	264	0.215	5^{m}	$8^{m}47$
	21		„ $24^{m}8$	267	0.220	5^{m}	$8^{m}42$
	22		„ $35^{m}0$	274	0.227	5^{m}	$8^{m}50$
	23		„ $40^{m}9$	278	0.231	5^{m}	$8^{m}48$
	24		„ $47^{m}2$	283	0.236	5^{m}	$8^{m}46$
	25		„ $53^{m}8$	287	0.240	5^{m}	$8^{m}50$
	26		$7^{h}\ 0^{m}2$	292	0.245	5^{m}	$8^{m}47$
	27		„ $6^{m}7$	296	0.250	5^{m}	$8^{m}66$
	28		$5^{h}\ 38^{m}7$	169.235	0.487	5^{m}	$8^{m}02$
	29		„ $45^{m}0$	240	0.492	5^{m}	$8^{m}11$
73	30	XI 1	„ $52^{m}1$	245	0.498	5^{m}	$8^{m}01$
	31		„ $59^{m}1$	249	0.501	5^{m}	$7^{m}92$
	32		$6^{h}\ 11^{m}9$	258	0.510	5^{m}	$7^{m}93$
	33		„ $18^{m}4$	263	0.515	5^{m}	$7^{m}88$

Plaque	Image		T-m. Greenw.	J. D.	Phase	Pose	Gr. photogr.
№		1916 г.		2421			
	34		$6^h\ 24^m7$	169.267	0.519	5^m	7^m85
	35		„ 31^m8	272	0.524	5^m	7^m88
	36		„ 39^m4	277	0.529	5^m	7^m88
73	37	XI 1	„ 45^m8	282	0.534	5^m	7^m88
	38		„ 52^m3	286	0.538	5^m	7^m88
	39		„ 59^m1	291	0.543	5^m	7^m84
		1917					
	40		$6^h\ 14^m6$	483.260	0.481	5^m	8^m27
	41		„ 21^m1	265	0·486	5^m	8^m18
	42		„ 31^m3	270	0.491	5^m	8^m13
	43		„ 35^m6	275	0.496	5^m	8^m05
74	44		„ 41^m6	279	0.500	4^m	8^m04
	45		$7^h\ 52^m3$	328	0.549	4^m	7^m74
	46		„ 57^m6	332	0.553	4^m	7^m71
	47		$8^h\ 2^m5$	335	0.556	4^m	7^m74
	48		„ 7^m5	339	0.560	4^m	(7^m91)
	49		„ 16^m5	345	0.566	4^m	7^m70
	50		„ 21^m6	349	0.002	4^m	7^m78
	51		„ 32^m7	356	0.010	4^m	7^m80
	52		„ 37^m8	360	0.014	4^m	7^m84
	53	IX 11	„ 43^m5	364	0.018	4^m	7^m85
	54		„ 50^m1	368	0.022	4^m	7^m92
	55		„ 56^m0	372	0.026	4^m	7^m95
	56		$9^h\ 1^m1$	376	0.030	4^m	7^m95
75	57		„ 6^m4	380	0.034	4^m	7^m94
	58		„ 11^m8	383	0.037	4^m	7^m99
	59		„ 17^m0	387	0.041	4^m	7^m96
	60		„ 22^m5	391	0.045	4^m	7^m99
	61		„ 28^m6	395	0.049	4^m	8^m12
	62		„ 37^m4	401	0.055	4^m	8^m07
	63		„ 43^m4	405	0.059	4^m	8^m10
	64		„ 49^m7	410	0.064	4^m	8^m11
	65		„ 54^m9	413	0.067	4^m	8^m11
	66		$10^h\ 0^m2$	417	0.071	4^m	8^m17

Plaque	Image		T-m. Greenw.	J. D.	Phase	Pose	Gr. photogr.
№		1917 г.					
75	67	IX 11	$10^h\ 8^m0$	483.422	0.076	4^m	8^m13
	68		„ 14^m3	427	0.081	4^m	8^m12
	69		$5^h\ 32^m0$	486.231	0.050	4^m	7^m99
	70		„ 38^m4	235	0.054	4^m	7^m97
	71		„ 44^m5	239	0.058	4^m	8^m04
	72		„ 49^m8	243	0.062	4^m	8^m12
76	73	IX 14	„ 54^m8	247	0.065	4^m	8^m11
	74		$6^h\ 0^m2$	250	0.069	4^m	8^m11
	75		„ 5^m9	254	0.073	4^m	8^m21
	76		„ 11^m5	258	0.077	4^m	8^m21
	77		„ 16^m7	262	0.081	4^m	8^m23
	78		$5^h\ 12^m8$	490.217	0.068	4^m	7^m85
	79		„ 18^m2	221	0.072	4^m	7^m86
	80		„ 23^m0	224	0.075	4^m	7^m80
	81		„ 27^m9	228	0.079	4^m	7^m91
	82		„ 34^m3	232	0.083	4^m	7^m91
	83		„ 40^m3	236	0.087	4^m	7^m92
	84		„ 46^m3	240	0.092	4^m	7^m87
	85		„ 51^m0	244	0.095	4^m	7^m89
	86		„ 55^m9	247	0.098	4^m	7^m87
77	87	IX 18	$6^h\ 1^m6$	251	0.102	4^m	7^m85
	88		„ 6^m8	255	0.106	4^m	7^m80
	89		„ 11^m7	258	0.109	4^m	7^m82
	90		„ 16^m5	262	0.112	4^m	7^m83
	91		„ 22^m0	265	0.116	4^m	7^m91
	92		„ 27^m4	269	0.119	4^m	7^m96
	93		„ 32^m3	272	0.123	4^m	7^m94
	94		„ 37^m8	276	0.127	4^m	7^m90
	95		„ 42^m8	280	0.131	4^m	7^m87
	96		„ 47^m4	283	0.134	4^m	7^m85
	97		$4^h\ 53^m6$	495.204	0.510	3^m	7^m88
	98		„ 57^m7	207	0.523	3^m	7^m71
78	99	IX 23	$5^h\ 1^m4$	209	0.525	3^m	7^m79
	100		„ 6^m2	213	0.529	3^m	7^m87
	101		„ 10^m0	215	0.531	3^m	7^m84

Plaque	Image		T-m Greenw.	J. D.	Phase	Pose	Gr. photogr.
№		1917 г.					
	102		$5^{h}\ 13^{m}7$	495.218	0.534	3^{m}	$7^{m}80$
	103		„ $18^{m}3$	221	0.537	3^{m}	$7^{m}85$
	104		„ $22^{m}1$	224	0.539	3^{m}	$7^{m}78$
	105		„ $26^{m}2$	227	0.543	3^{m}	$7^{m}74$
	106		„ $29^{m}8$	229	0.545	3^{m}	$7^{m}80$
	107		„ $34^{m}2$	232	0.548	3^{m}	$7^{m}83$
	108		„ $37^{m}9$	235	0.551	3^{m}	$7^{m}80$
78	109	IX 23	„ $42^{m}0$	238	0.554	3^{m}	$7^{m}84$
	110		„ $45^{m}9$	240	0.556	3^{m}	$7^{m}89$
	111		„ $49^{m}6$	243	0.559	3^{m}	$7^{m}86$
	112		„ $53^{m}3$	246	0.562	3^{m}	$7^{m}87$
	113		„ $57^{m}6$	248	0.564	3^{m}	$7^{m}89$
	114		$6^{h}\ 1^{m}2$	251	0.000	3^{m}	$7^{m}93$
	115		„ $4^{m}8$	253	0.004	3^{m}	$7^{m}98$
	116		„ $8^{m}8$	256	0.005	3^{m}	$7^{m}97$
	117		$6^{h}\ 34^{m}9$	508.273	0.541	3^{m}	$7^{m}64$
	118		„ $39^{m}7$	278	0.556	3^{m}	$7^{m}65$
	119		„ $46^{m}9$	283	0.561	3^{m}	$7^{m}67$
80	120	X 6	„ $52^{m}6$	287	0.565	3^{m}	$7^{m}69$
	121		„ $56^{m}2$	289	0.000	3^{m}	$7^{m}76$
	122		„ $59^{m}7$	292	0.003	3^{m}	$7^{m}79$
	123		$5^{h}\ 8^{m}8$	512.215	0.391	4^{m}	$8^{m}49$
	124		„ $14^{m}9$	219	0.395	4^{m}	$8^{m}49$
	125		„ $20^{m}3$	222	0.399	4^{m}	$8^{m}47$
	126		„ $25^{m}8$	226	0.402	4^{m}	$8^{m}50$
81	127	X 11	„ $30^{m}8$	230	0.406	4^{m}	$8^{m}52$
	128		„ $36^{m}7$	234	0.410	4^{m}	$8^{m}51$
	129		„ $43^{m}3$	238	0.415	4^{m}	$8^{m}58$
	130		„ $49^{m}9$	243	0.419	4^{m}	$8^{m}57$
	131		$4^{h}\ 11^{m}6$	520.175	0.548	3^{m}	$7^{m}68$
	132		„ $16^{m}3$	178	0.551	3^{m}	$7^{m}66$
	133		„ $20^{m}2$	181	0.554	3^{m}	$7^{m}69$
82	134	X 18	„ $24^{m}1$	184	0.557	3^{m}	$7^{m}70$
	135		„ $28^{m}7$	187	0.560	3^{m}	$7^{m}69$
	136		„ $32^{m}7$	190	0.563	3^{m}	$7^{m}68$

Plaque	Image		T-m. Greenw.	J. D.	Phase	Pose	Gr. photogr.
№							
	137		$4^h\ 36^m8$	520.192	0.565	3^m	7^m72
	138		„ 44^m3	198	0.004	3^m	7^m79
	139		„ 55^m6	205	0.011	3^m	7^m80
	140		„ 59^m3	208	0.014	3^m	7^m81
	141		$5^h\ 3^m4$	211	0.017	3^m	7^m83
82	142		„ 7^m0	213	0.019	3^m	7^m88
	143		„ 11^m1	216	0.022	3^m	7^m90
	144		„ 15^m2	219	0.025	3^m	7^m91
	145		„ 18^m9	222	0.028	3^m	7^m93
	146		„ 23^m7	225	0.013	3^m	7^m92
	147		„ 27^m4	228	0.034	3^m	7^m91
	148		„ 31^m6	230	0.036	3^m	7^m90
	149		„ 45^m3	240	0.046	3^m	7^m95
	150		„ 48^m6	242	0.048	3^m	7^m94
	151		„ 52^m4	245	0.051	3^m	8^m02
	152		„ 57^m0	248	0.054	3^m	7^m99
	153	X 18	$6\ \ 1^m6$	251	0.057	3^m	8^m05
	154		„ 5^m6	254	0.060	3^m	8^m06
	155		„ 9^m4	257	0.063	3^m	8^m11
	156		„ 13^m6	260	0.066	3^m	8^m15
	157		„ 17^m2	262	0.068	3^m	8^m10
	158		„ 22^m0	265	0.071	3^m	8^m11
83	159		„ 25^m1	268	0.074	3^m	8^m14
	160		„ 30^m1	271	0.077	3^m	8^m14
	161		„ 34^m6	274	0.080	3^m	8^m18
	162		„ 39^m1	277	0.083	3^m	8^m15
	163		„ 43^m1	281	0.087	3^m	8^m06
	164		„ 49^m3	284	0.090	3^m	8^m12
	165		„ 53^m3	287	0.093	3^m	8^m05
	166		„ 57^m6	290	0.096	3^m	8^m17
	167		$7^h\ 1^m6$	293	0.099	3^m	8^m21
	168		„ 6^m4	296	0.102	3^m	8^m18
	169		„ 11^m0	299	0.105	3^m	8^m18

saient d'une manière très dispersée en montrant des irregularités indubitables. C'est pour cela que j'ai fait la recherche de differents maxima separement. Il se trouva (voir fig. 1), qu'il y a deux types de maximum — le type brillant et

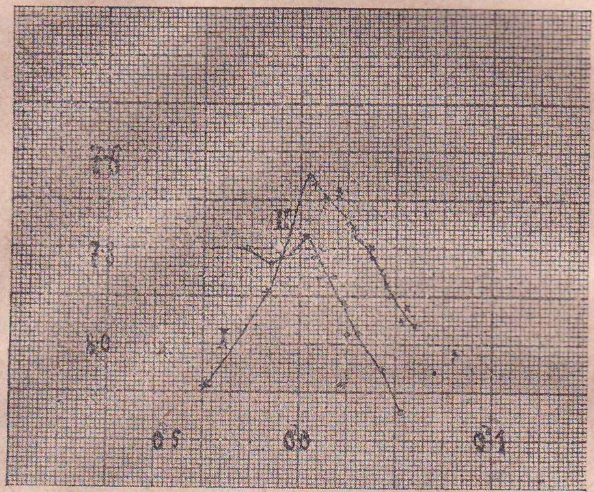


Рис. 1.

le type faible. Le maximum plus brillant est aigu, le plus faible, au contraire, se presente comme relativement obtus. C'est evident d'après le graphique ci joint, ou la courbe I représente le maximum normal du type brillant (c'est la combination de maxima du même type de X 23, 1916 et IX 23, 1917 — les images ont été combinées en paires) et la courbe II — type du maximum „faible“ (combinaison de maxima IX 11, 1917 et X 6, 18 1917). Un phénomène semblamble est aussi carastèristique pour XX Cygni d'après les observations de Shapley [1]).

Non seulement les maxima se demontrent comme irreguliers; à une distance considèrable du maximum (entre $0^d.075$ et $0^d.125$) il se trouva un lien critique qui donna en IX 18, 1917 une irregularité extraordinaire, qui ne pouvait être reconciliée avec la courbe moyenne, comme on peut le voir d'aprés le graphique 2.

Malheuresement il y a trop peu d'observations auprès du minimum pour qu'une determination precise de la grandeur photographique de la variable auprès du minimum soit possible. De la sorte nous ne pouvons pas obtenir l'amplitude photographique; et pourtant nous pouvons nous expliquer la cause de l'àmplitude trop petite de M. Martin. C'est que sa courbe est indeterminée auprès du maximum, et le maximum observé par lui appartient au type „faible“ ci dessus mentioné. En acceptant le maximum „brillant“, comme chez nous, égal à 7.65 gr. st. et le minimum d'après la courbe de M. Martin à 8.68, nous obtiendrons une amplitude photographique entre 1.0 et 1.1 gr. st. c'est à dire surpassant l'amplitude photometrique de 0.2 — 0.3 gr. st. comme il fallait l'attendre.

Les Antalgols sont des variables avec de nombreuses et considerables anomalies s'effectuant comme oscillations d'éclat et comme oscillations de couleurs. Les observations ci dessus mentionnées demontrent, que l'aspect de la courbe pendant

---

1) Astroph. J. Vol. 42.

la durée de deux periodes voisines peut être très differente. Dans ce cas les courbes de l'éclat construites de façon ordinaire, c'est à dire en combinant des l'eclats definis pendant differentes periodes en une seule courbe, nous donneront

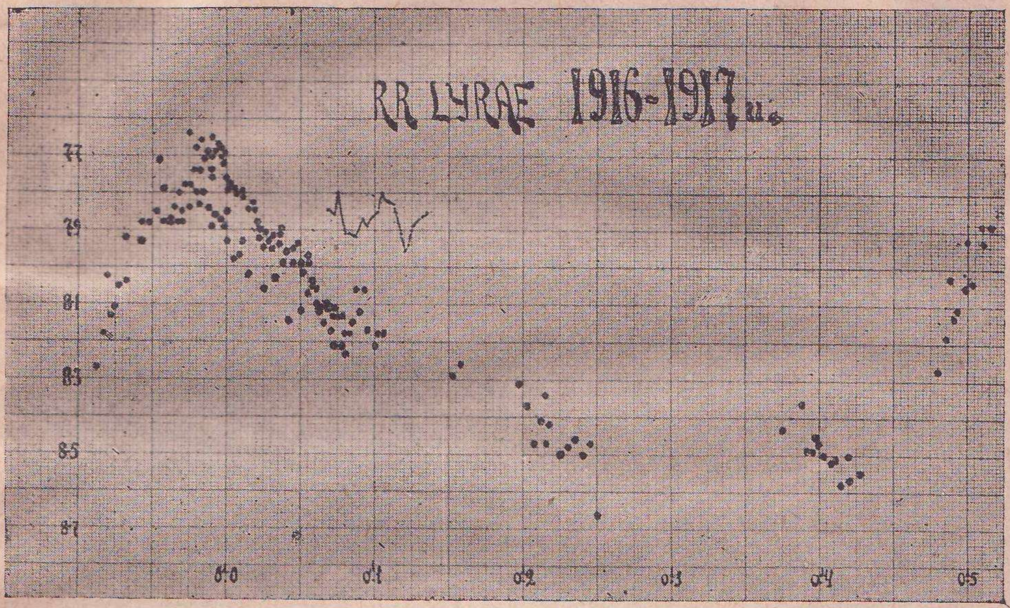


Рис. 2.

comparativement très peu. Cette courbe moyenne, ainsi que la courbe ci dessus obtenue, est bien valable pour la recherche du changement de periode, mais elle donne tres peu pour l'étude du caractère propre du changement d'éclat. Une solution du problème des Autalgoles, c'est à dire de spherès gazenses vibrantes avec une densitè modéré, peut être obtenue seulement avec l'aide d'une cooperation large et prolongée d'observateurs sous differentes longitudes et donnant une serie continue de courbes correspondantes à des periodes successives.

Kharkow. Observatoire astronomique.
1920.

Расширение понятия числа

Н. Рождественский

§ 1

Условимся под обобщенным числом разуметь любую однозначную возрастающую функцию от обыкновенного числа n; обобщенное число будем обозначать символом $|n|$; таким образом

$$|n| = f(n) \tag{1}$$

Число n назовем „основанием" обобщенного числа.

Если основанию n станем давать последовательные значения обыкновенного натурального ряда [1]), то получим натуральный ряд обобщенных чисел:

$$|0| = f(0);\ |1| = f(1);\ |2| = f(2);\ |3| = f(3), \ldots\ldots |n| = f(n) \tag{2}$$

Так как натуральным рядом определяется система чисел, то из нашего условия вытекает, что возможно неограниченное количество различных числовых систем, причем каждая будет определяться исходной, основной, функцией.

Обозначим через E_n разность между двумя последовательными обобщенными числами:

$$E_n = f(n) - f(n-1) \tag{3}$$

Ряд получающихся путем подстановки в последнее выражение последовательных чисел обыкновенного натурального ряда, будем называть основным рядом обобщенной системы чисел, а каждое E_n—единицей основного ряда. Таким образом, будем иметь:

$$E_1 = f(1) - f(0); \quad E_2 = f(2) - f(1); \quad E_3 = f(3) - f(2) \ldots$$

$$E_{n-1} = f(n-1) - f(n-2); \quad E_n = f(n) - (n-1).$$

---

[1]) Возможно, конечно, аргументу n давать последовательные значения какого-либо другого обыкновенного ряда; но так как члены последнего суть функции обыкновенного натурального ряда, то, в конце концов, все дело сводится именно к нему.

Складывая, получаем:

$$\sum_{n}^{1} E_i = f(n) - f(0),$$

откуда:

$$f(n) = |n| = f(0) + \sum_{1}^{n} E_i\,,$$

т.-е. обобщенное число есть совокупность нуля (ибо $f(0)=|0|$) и всех n первых по порядку (а не любых) единиц основного ряда системы; поэтому, поскольку инвариантность числа можно считать доказанной для обычной числовой системы [1]), постольку же она имеет место и для обобщенных числовых систем в пределах этих n первых единиц основного ряда. Этим обобщенная система, в которой, вообще говоря, единицы основного ряда не равны друг другу, отличается от обыкновенной, где все единицы основного ряда равны друг другу, и где поэтому, для образования числа n можно брать совокупность любых n единиц основного ряда. Отсюда же вытекает роль порядка в образовании числа.

Под сложением обобщенных чисел (знак действия будем выражать $+\!\!+$) условимся разуметь действие, удовлетворяющее общей формуле:

$$|n_1| +\!\!+ |n_2| = f(0) + \sum_{1}^{n_1} E_i + \sum_{n_1}^{n_1+n_2} E_i = f(0) + \sum_{1}^{n_1+n_2} E_i =$$

$$= f(n_1 + n_2) = |n_1 + n_2|, \tag{5}$$

т.-е. сумма двух обобщенных чисел равна обобщенному числу, основание которого равно сумме оснований слагаемых.

Очевидно, из всего сказанного, что законы коммутативности и ассоциативности сложения имеют место и для обобщенных числовых систем.

Если вычитание определим, как действие обратное сложению, то формулу вычитания для обобщенных чисел получим в виде:

$$|n_1| \sim |n_2| = |n_1 - n_2|,$$

где символ $\sim$ есть знак вычитания. Как в сложении, так и в вычитании порядок играет основную роль: от уменьшаемого последовательно отнимаются не любые единицы основного ряда, а единицы вычитаемого, пока не будет это последнее исчерпано все целиком.

Принцип перманентности подведет нас к понятию обобщенного нуля $|0|$ и обобщенного отрицательного числа.

Определим умножение, как действие, посредством которого из множимого $|n_1|$ составляется произведение так, как множетель $|n_2|$ составлен из первой единицы натурального ряда. Знаком умножения будем считать символ „!“

---

[1]) L. Kronecker: „J. reine angew. Math.“, 101 (1887), S.339. u. ff. H. v. Helmholtz: „Wiss. Abh.“, (1895), S. 372 u. and.

Множитель $|n_2|$ составлен из первой единицы натурального ряда следующим образом: взято основание первой единицы $|1|$ и умножено на основание n_2 множителя $|n_2|$:

$$|n_2| = |1.\ n_2|;$$

По этому же правилу составим произведение из множимого, именно: основание n_2, множимого $|n_1|$, умножим на основание n_2 множителя $|n_2|$ т.-е.:

$$|n_1| \,!\, |n_2| = |n_1.\, n_2|. \tag{6}$$

Коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность умножения для обобщенных чисел очевидны.

От умножения легко перейти к возведению в степень и к делению, рассматривая последнее, как действие, обратное умножению:

$$|n^1| \downarrow |n_2| = \left|\frac{n_1}{n_2}\right|. \tag{7}$$

($\downarrow$ знак деления).

По принципу перманентности легко перейти к извлечению корня (а, след., далее, и к понятию об иррациональном обобщенном числе) и действию логарифмирования.

§ 2

Выше все время мы понимали обобщенное число, как фунцию одной переменной, а именно:

$$|n| = f\,(n) \tag{1}$$

Однако можно сделать дальнейшее обобщение и рассматривать обобщенное число, как функцию двух независимых переменных, например:

$$|n| = f\,(n, x) \tag{8}$$

Условимся относительно этого уравнения, что переменная n будет попрежнему основанием обобщенного числа, x же пусть будет непрерывно изменяющейся переменной величиной. При этом условии постоянное число, например $|5|$, выразится, как

$$|5| = f\,(5, x),$$

т.-е. будет функцией некоторого аргумента x и, с геометрической точки зрения, выражать некоторую линию. Если, для простоты, мы возьмем эту функцию f в виде

$$|n| = nax,$$

то ясно, что это уравнение будет выражать собою, при значениях равных числам натурального ряда, неограниченное количество (пучек) прямых линий, исходящих из начала координат и определяемых некоторым, выбранным нами, определенным параметром a. Давая в этой формуле основанию n последовательные значения обыкновенного натурального ряда, получим:

$$|1| = ax;\ |2| = 2ax;\ |3| = 3ax \ldots\ldots$$

т.-е. эти *обобщенные числа* будут представлять собою ординаты *любой точки соответствующей* прямой. Это приводит нас к выводу, что при этом условии *неравные в обычном смысле слова* ординаты различных точек *одной и той же прямой*, выражающей данное число, например $|2| = 2ax$, будут представлять собою одно и то же число.

Сложение двух чисел сводится к построению новой прямой по уравнению:

$$|n_1| \mathbin{+\!\!+} |n_2| = n_1 ax + n_2 ax = (n_1 + n_2)\, ax = |n_1 + n_2|$$

Резюме

1°. Возможно неограниченное число различных числовых систем. Наша обычная система есть лишь *одна из возможных*.

2°. В образовании числа играют роль три момента:

а) выбор той или иной числовой функции, определяющей собой *основной ряд*;

в) точное определение действия, которое мы называем *сложением*;

с) удовлетворение условию, выраженному формулой образования суммы:

$$|n_1| \mathbin{+\!\!+} |n_2| = f(0) + \sum_{1}^{n_1} E_i + \sum_{n_1+1}^{n_1+n_2} E = f(0) + \sum_{1}^{n_1+n_2} E_i = |n_1 + n_2|.$$

3°. Единицы *основного ряда*, вообще говоря, неравны друг другу и порядковые числа *не* совпадают с количественными. (В обычной же системе единицы основного ряда равны друг другу и порядковые числа совпадают с количественными).

Для всех числовых систем действия над числами *формально* сводятся к действиям над соответствующими порядковыми номерами этих чисел. Например, для всех систем мы будем иметь $|5| \mathbin{+\!\!+} |7| = |12|$, где основания слагаемых (5 и 7) и суммы (12) суть не что иное, как их порядковые номера чисел в их *натуральном ряду*.

Это обстоятельство характеризуем, как принцип *символической инвариантности числа*.

Выше было кратко сказано об инвариантности чисел. Под этим разумеют следующее: в каком бы порядке не пронумеровать предметы какого-нибудь комплекса, получается всегда один и тот же номер [1]). Для наших обобщенных числовых систем этот принцип надо понимать в том смысле, что всякое число (n) *натурального ряда* образуется из n первых единиц *основного ряда*, независимо от того порядка, в каком брать эти последние.

Под принципом же *символической инвариантности* чисел будем разуметь то обстоятельство, что для всех систем *формальный* результат действий над несколькими числами выражается в одних и тех же символах, *совпадающих с символами обычной системы*, независимо от *реального* количества отдельных объектов, входящих в данный числовой

---

[1]) Ж. Танри и Ж. Мольк. „Основные принципы арифм." (Сборн. „Нов. идеи в мат.")

комплекс и скрывающихся за соответственным символом: для всех систем „пять" плюс „семь" будет (формально) „двенадцать", хотя под числами „пять", „семь" и „двенадцать" в различных системах будут разуметься различные реальные количества объектов.

Из этого принципа могут быть сделаны некоторые выводы гносеологического характера, на которых останавливаться здесь мы не будем.

Однако, из сказанного не следует делать вывода, будто бы, вместо систем чисел, мы имеем простой счет числа комплексов, независимо от их содержания; наоборот, мы имеем настоящие числовые системы, а вовсе не действия над числами порядковых номеров. В этом легко убедиться из следующего: в чем сущность всякой системы, например, нашей обычной? Что мы хотим сказать, когда пишем равенство: $5+7=12$?

„Понятие суммы 7 и 5 не содержит ничего, кроме соединения этих двух чисел в одно, причем вовсе не мыслится, какое именно это число, обнимающее собою оба данные"[1]). Другими словами: когда мы сказали „семь" плюс „пять", мы уже сказали все в смысле действия сложения, понятие о „результате" (двенадцати) есть нечто новое, привступающее; для этого нам нужен определенно построенный натуральный ряд чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 и т. д. Говоря, что сумма семи и пяти равна двенадцати, мы указываем, что эта совокупность (сумма) совпадает с определенным числом (12) того же натурального ряда, и только. Идея же сложения уже вполне закончена в выражении: $7+5$.

Таким образом, во всякой числовой системе результат того или иного действия над числами (целыми и рациональными) должен находить себе определенное место в соответствующем натуральном ряде: в этом вся сущность всякой числовой системы.

Изложенное в § 1 показывает, что рассмотренные ряды числовых функций обладают только что указанным свойством, а поэтому они суть системы чисел.

5°. Понятия „равно", „больше", „меньше" с формальной стороны совпадают с таковыми же понятиями для обычной системы; по существу же могут быть системы, в которых $|a|>|в|$ реальное количество объектов (m_a), соответствующих символу a, будет меньше количества объектов ($m_в$), выражаемого символом b, т.-е. $m_a < m_b$. Это указывает на относительность этих понятий.

6°. Вопрос о том, какое понятие: понятие ли порядкового или понятии количественного числа надо принять за первичное, повидимому, на основании изложенного, решается в пользу порядкового понятия числа. E. G. Huserl[2]), считая, что количественное число непременно предшествует порядковому числу, не заключает, однако, отсюда того, что количественная арифметика единственно возможная, и допускает ряд других арифметик, основывающихся на понятии порядкового числа.

[1]) И. Кант. „Пролегомены", стр. 20.

[2]) См. приложение к „Philosophie der Arithmetik" (1, Halle, 1891).

В наших системах чисел в основу положена идея порядка. Каким образом фиксировать определенный порядок—это безразлично, стоит только многообразие чисел подчинить другому, уже так или иначе упорядоченному, многообразию, например, порядку букв алфавита и т. п. Выше, как это видно из изложенного, таким упорядоченным многообразием для удобства взят порядковый ряд чисел обычной системы, вот почему в этих системах порядковое число не совпадает с количественным; в обычной же системе это совпадение имеется, в чем, между прочим, и заключается ее простота, а отсюда и общеупотребительность.

Varia

В Академическом издании „Русская Наука" в отделе „Математика" составленном засл. проф. А. В. Васильевым, уважаемый автор в нескольких местах выражает пожелание о пополнении его труда библиографическими и историческими справками. Я считаю поэтому своею обязанностью внести некоторые дополнения и поправки к стр. 67—68, посвященным Харьковскому Университету, с историей преподавания математических наук в котором мне привелось подробнее ознакомиться по первоисточникам при составлении очерка истории кафедр математики и механики для юбилейных изданий, выпущенных Университетом к его столетию.

Характерным для первого периода жизни русских университетов явлением было обращение в поисках за кандидатами на профессорские кафедры за границу [1]), преимущественно в Германию, и первые годы чтение лекций производилось на латинском или на немецком языках, и протоколы факультетских заседаний составлялись также по латыни. По математике, однако, преподавание попало в Харьковском Университете с самого начала в руки хорошо подготовленного русского преподавателя Т. Ф. Осиповского, преподававшего также и механику, после отъезда в Дерпт проф. Joh. S. G. Huth'а, пробывшего в Харькове только три года (1808—1811) и читавшего как механику, так и астрономию.

Из иностранных профессоров Харьковского Ун-та первого призыва следует отметить Швейкарта, по специальности юриста, интересовавшегося вопросами об основах геометрии и, благодаря своей „Астральной геометрии" (разработанной уже после оставления им Харькова), занимающего место в истории теории параллельных линий, как один из предшественников Лобачевского и Боляя.

Переходя к Т. Ф. Осиповскому, отмечу прежде всего, что по окончании в 1786 г. учительской гимназии в Петербурге, переименованной затем в Педагогический Институт, он до 1800 г. был учителем физико-математических наук и российской словесности при Главном Народном Училище в Москве, а с 1800 г.—профессором физико-математических наук в Главном Педагогическом Институте в Петербурге. Но еще во время пребывания студентом в нем

---

[1]) В архиве сохранилось интересное письмо известного астронома Bode, к которому Совет Университета обращался за рекомендацией кандидатов.

(1783—1786), как отличнейший по физико-математическим наукам сделан репетитором для своих товарищей, и с этой стороны можно, конечно, сказать, что его преподавательская деятельность началась в Петербурге. Однако, самостоятельная преподавательская деятельность началась в Москве. Его „Курс Математики" был составлен им как пособие при преподавании в Главном Педагогическом Институте и издан Комиссией Народных Училищ, том I— в 1802 г., т. I—в 1801; в 20-х годах вышло 3-е издание (второе вышло около 1810 г., когда им была представлена в комиссию рукопись III-го тома, в 2-х частях, из которых напечатана — одновременно с 3-м изданием — только 1-я часть.) В 1807 г. он возведен Советом Университета в степень доктора honoris causa. Деятельный член, а по отъезде Роммеля и председатель Общества Наук при Харьковском Университете, он сделал на заседаниях его ряд докладов, только некоторые из которых вошли в т. I (единственный) „Трудов" Общества.

Ученик, а потом товарищ Осиповского по преподаванию, А. Ф. Павловский, оставил следующие печатные труды: 1) Таблица логарифмов по изданию Каллета (семизначные),—большой том in 4^0, около 750 стр., X., 1820 год, и Актовая речь 1871 г. „О вероятности".

Другой ученик Осиповского Н. М. Архангельский, командировка которого за границу не была утверждена, занимался в Петербурге под руководством Шуберта и Гурьева; с 1813 г. он стал преподавать в Харьк. Ун-те механику „по Франкеру" и „для удобства студентов" перевел на русский яз. его „Основания механики". Кроме ряда других переводов (мемуары Эйлера по теории движения твердых тел, статика Пуассона и др.) А. напечатал „Рассмотрение примечаний на основании геометрии Гурьева" и „Теория движения жидких тел" (Труды Общ. Наук, I, с. 42—108).

Говоря о Н. А. Дьячанке, следует отметить его докторское рассуждение „О гидравлических колесах", 1838 г.

Виднейший представитель кафедры математики в середине 19-го века — Е. И. Бейер кончил Гл. Педагогический Институт и, после занятий под руководством Остроградского, два года был за границей, по возвращении сдал в Харькове магистерский экзамен и в 1849 г. защитил диссертацию „О решении буквенных алгебраических уравнений". Вопросы о численных и буквенных уравнениях и были излюбленными темами для кандидатских диссертаций. В 1858 г. в качестве актовой речи он напечатал главный свой труд: об интегрировании линейных дифференциальных уравнений с каким угодно числом изменяемых величин, 139 стр. текста со множеством формул. Другая большая его работа: „О разностном интегрировании рациональных дробей при помощи алгебраических функций, когда это возможно", напечатана в Моск. Мат. Сборнике т. IV—V (уже в 70-х годах). Опуская других, менее видных, представителей математики в Харьковском Университете, отметим еще более крупную фигуру проф. И. Д. Соколова, по окончании Главного Педагогического Института работавшего два года за границей (у Якоби и др.) и занимавшего в Харькове кафедру механики до конца 60-х годов, когда он перешел ректором университета в Одессу. В своих лекциях он излагал учения Якоби; кроме докторской диссертации „Исследование некоторых предметов, относящихся к вариационному исчислению“, 1842, напечатал „Динамика“, ч.ч. I и II, 1860, и выдержавший 4 издания учебник тригонометрии (1-е изд.—1853 г.).

Д. Синцов

Харьковское Математическое Общество

28 апреля 1925 года Харьковское Математическое Общество официально возобновило свою деятельность. В состав Распорядительного Комитета вошли: председатель—проф. Д. М. Синцов, товарищи председателя—проф. Ц. К. Руссьян и акад. С. Н. Бернштейн, секретарь—проф. В. Л. Гончаров, заведующий библиотекой Общества—проф. М. Н. Марчевский.

По 1 марта 1926 года состоялось 10 заседаний Общества, в которых было заслушано 17 докладов, а именно:

1) И. Е. Огневецкий. О кинематической геометрии (2/V—1925).

2) Д. М. Синцов. О линейчатых коннексах.

3) В. Л. Гончаров. Реферат о книге Hilbert—Courant: „Methoden d. mathematischen Physik“ (8/V — 1925).

4) Д. М. Синцов. О моменте двух прямых и его применении в теории коннексов.

5) Его же. О дифференциальной геометрии в Punkt-Ebene системах.

6) М. Ф. Кравчук (Киев). Доказательство формулы Hermitéa (доложено Д. М. Синцовым).

7) М. Н. Марчевский. Реферат о книге E. Landau: „Einführung in die Theorie d. alg. Zahlen u. Ideale“ (5/VI—1925).

8) И. С. Чернушенко. О новых работах (Четверухина и Фейгля), связанных со 2-ой группой аксиом Гильберта (12/VI — 1925).

9) Д. М. Синцов. Памяти Феликса Клейна.

10) Ф. Иванов. О новых трансцендентных функциях (2/X — 1925).

11) А. С. Вайнфельд. О дифференциальных параметрах.

12) Его же. Вывод основной формулы конформного преобразования (10/XII — 1925).

13) Б. П. Герасимович. Материя при высоких температурах (обзорный доклад) (14/I — 1926).

14) А. Б. Тиц. Прибор для механического решения уравнений.

15) Д. М. Синцов. О приборе Н. П. Беляева для решения уравнений графическим путем.

16) В. Л. Гончаров. Об основных понятиях общей топологии (4/II—1926).

17) С. Н. Бернштейн. Аналитическое продолжение функций в области вещественного переменного (обзорный доклад) (18/II—1926).

Следует отметить появление новой коллекции математических монографий:

MEMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur: Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences,
Professeur à l'Université de Strasbourg

Nouvelle collection, fondée sous le haut patronage de:
L'Académie des Sciences de Paris,
L'Académie Royale des Sciences de Belgique (Bruxelles),
L'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres (Crakovie),
L'Académie des Sciences de l'Ukraine (Kiew),
La Real Academie de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales (Madrid),
L'Académie Tchèque des Sciences (Prague),
La Reale Accademia dei Lincei (Rome) etc.,
avec la collaboration de nombreux savants.

But de la Collection

Le but de cette Collection est de constituer un ensemble de petits volumes sur tous les sujets intéressant les Mathématiques. Chacun de ces volumes donne l'exposé et la mise au point d'une question précise et bien délimitée. Sur une telle question, on trouve la suite ordonnée de tous les faits fondamentaux, tous les résultats acquis et un tableau des principaux progrès qui paraissent actuellement désirables, ou en cours de réalisation. Une solide bibliographie, d'une consultation aisée, est placée à la fin des volumes.

Les fascicules du Mémorial permettent à tous les chercheurs de s'assimiler aisément, au moyen d'un guide sûr, l'essence d'une théorie, qui ne rentrerait pas dans le cadre de leurs études habituelles.

Volumes se vendant séparément

Fascicules parus:

Paul Appell. — Sur une forme générale des équations de la dynamique (fasc. I). In-8 de 50 pages; 1925 . . . . 10 fr.

G. Valiron. — Fonctions entiéres et fonctions ménomorphes (fasc. II). In-8 de 59 pages; 1925 . . . . 10 fr.

Paul Appell. — Séries hypergéométriques de plusieurs variables, polynomes d'Hermite et autres fonctions sphériques de l'hyperespace (fasc. III). In-8 de 75 pages; 1925 . . . . 10 fr.

M. d'Ocagne. — Esquisse d'ensemble de la Nomographie (fasc. IV). in-8 de 68 pages; 1925 . . . . 10 fr.

P. Levy. — Analyse fonctionnelle (fasc. V). In-8 de 56 pages; 1925 . . . . 10 fr.

E. Goursat. — Le problème de Bäcklund (fasc. VI). 53 pages; 1925 . . . . 10 fr.

A. Buhl. — Séries analytiques. Sommabilité (fasc. VII). 55 pages; 1925 . . . . . 10 fr.

У.С.Р.Р.

Державне видавництво