К вопросу о математическом выражении движения населения

Я. Диманштейн

1.

Величина населения, как и всякого иного органического единства, подвержена непрерывным изменениям. Можно говорить об изменениях двоякого рода. С одной стороны, в состав населения вступают новые единицы, в результате рождения и иммиграции, и выбывают—вследствие смерти и переселения. О таких изменениях, известных под названием движения населения, можно говорить как об изменениях внешнего порядка. Под изменениями внутреннего порядка нужно понимать изменения, происходящие с течением времени для каждой входящей в состав населения единицы или известной совокупности таких единиц. Сюда относятся все изменения, связанные с изменением возраста, а также и все те обстоятельства, которые определяют течение и его видоизменения человеческой жизни — заболевания, несчастные случаи, заключение брачных союзов и их расторжение, рождение потомства в его значении для брачной пары, осуждение судом, существенное изменение материального положения, перемена профессии, состояние безработицы и пр. В дальнейшем мы имеем в виду лишь движение населения в целом, хотя нужно иметь в виду, что закономерность свойственна и тому, что мы называем внутренними изменениями населения.

Наблюдая сложение человеческих масс (состав населения) в его изменении во времени, легко установить известное, эмпирически наблюдаемое, постоянство определенных признаков в составе населения при всей изменчивости составляющих его индивидуальных элементов. В связи с этим возникает вопрос о возможности суждения о будущем составе населения не столько с точки зрения познания и учета основных факторов движения населения, что составляет содержание материальной теории населения (основоположник—Мальтус), сколько на основании собранных о нем в прошлом статистических данных, что определяет собою содержание того, что мы определяем в качестве формальной теории населения. Попытки построения последней, требующие углубленного теоретического анализа, делались неоднократно, и иногда с очень интересными результатами, равно как и попытки определения величины населения в будущем.

К одной из замечательных попыток последнего рода принадлежит сделанное Elkanah Watson'om в 1816 году предсказание о развитии населения Соединенных Штатов до 1860 г., с помощью метода, исходившего из допущения постоянного коэффициента прироста населения, равного коэффициенту прироста его за период 1790—1800 г.г. E. Czuber [1]), взяв цифры населения Соединенных Штатов в 1790 и 1820 г.г. и допустив сохранение того же коэффициента прироста, дал следующее определение величины населения Соединенных Штатов, которое мы приводим в сравнении с действительной величиной.

Население Соединенных Штатов в миллионах:

	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860
Величина населения при допущении постоянного коэффициента прироста	3,93	5,30	7,15	9,64	13,00	17,53	23,65	31,89
Действительное население . .	3,93	5,31	7,24	9,64	12,87	17,07	23,19	31,44
Разница . . .	0,00	0,01	0,09	0,00	0,13	0,46	0,46	0,45

Отсюда можно было бы заключить о возможности построения общей теории развития населения, выраженной математически,—ибо все изменения в составе населения имеют численное выражение,—которая устанавливала бы не только вероятные величины населения, разложенного на известные группы, для определенной временной точки, но и давала бы возможность судить о вероятных отклонениях наблюденных опытно величин от устанавливаемых априорно при помощи известной теоретической формулы. Последняя должна была бы, повидимому, представить величину населения в качестве непрерывной функции от первоначального его значения (взятого для определенной временной точки) и времени, а поскольку первая величина может быть условно принята в качестве постоянной,—функции времени. Такое представление основано на допущении, что коэффициент прироста остается все время постоянным, что соответствует действительности лишь в редчайших случаях. Вообще же говоря, и коэффициент прироста населения должен быть рассматриваем в качестве переменной величины и может быть теоретически выражен также в качестве функции времени.

Условия общественного развития становятся все более сложными, и в настоящее время мы уже не можем подходить к определению формулы движения населения с такими упрощенными методами, как это было возможно в эпоху Уатсона. Формула эта должна опираться на исследование всех факторов, определяющих движение и величину населения, и в то же время носить, как и все математические построения, отвлеченный от действительности характер, покоясь на допущениях, замещающих реальное население воображаемым. Помимо того, что изучение интересующей нас проблемы наталкивается на значительные трудности в виде наличия значительного числа типов движения населения даже в пределах территориально-узко ограниченной области, мы вынуждены сделать ряд допущений, не связанных определенно ни с одним из этих типов. Население может возрастать в течение короткого промежутка времени на значительные величины (иммиграция) и точно так же убывать (войны, эпидемии). В действительном развитии населения отсутствует непрерывность. Построение

[1]) E. Czuber. „Mathematische Bevölkerungstheorie". Taubner, Leipzig-Berlin. 1923.

же математической теории населения делает необходимым допущение, что для бесконечно малой частицы времени происходит и бесконечно малое приращение населения. Однако, если брать крупные массы населения и ограниченные промежутки наблюдения, то действительность не будет существенно искажена сделанным нами допущением.

Дальнейшее изложение основано на двух, создающих, по нашему мнению, новую эпоху в рассматриваемой области, работах. Одна из них принадлежит австралийскому статистику G. H. Knibbs'у (The Mathematical Theory of Population, of its Charakter and Fluctuation etc. Melbourne 1917) и представляет теоретическое обобщение результатов австралийской переписи 1911 г., а другая представляет вышецитированную книгу Чубера, сводящуюся к талантливому изложению теоретических основ работы Книббса.

2.

Для отдельных государств было бы правильнее всего сравнивать коэффициент прироста населения с таковым для земного шара. Однако, мы не имеем до сих пор сколько-нибудь точного определения величины населения земного шара для разных временных точек. Ошибка для существующих оценок может составлять десятки миллионов. Сравнительно еще недавно оценочная величина населения Китая была понижена чуть ли не на 100 миллионов. Первая известная нам и явно преувеличенная оценка населения земного шара, принадлежащая Riccioli и относящаяся к 1660 году, дает величину в 1.000 миллионов. Более осторожные и, повидимому, более приближающиеся к действительности оценки дают для начала 19-го столетия около 700 миллионов, а для времени, непосредственно предшествовавшего войне, 1600 — 1650 миллионов. Определенный на основании этих данных коэффициент ежегодного прироста населения земного шара находился бы в пределах между 0,0015 и 0,0121, средняя между коими составляет 0.00846.

Для последнего времени мы имеем относительно очень точные данные о движении населения культурных стран. Годовой коэффициент прироста на 10.000 наличного населения в период 1906 — 1911 г.г. составлял:

СТРАНЫ	Годовой коэффициент прироста	СТРАНЫ	Годовой коэффициент прироста
Ирландия	16	Цейлон	120
Франция	16	Швейцария	121
Ямайка	28	Голландия	122
Шотландия	55	Дания	126
Норвегия	66	Германия	136
Бельгия	69	Финляндия	143
Италия	80	Румыния	148
Швеция	84	Сербия	155
Венгрия	84	Чили	156
Австрия	86	Соединенные Штаты	182
Испания	87	Австралия	203
Англия и Уэльс	104	Новая Зеландия	256
Япония	108	Канада	298

Ежегодная величина населения может быть установлена более или менее точно путем вычета из величины населения предшествующего года числа умерших и эмигрировавших из страны и прибавления числа родившихся и иммигрировавших в страну в течение года. Возможно и приближенное исчисление величины населения для каждой точки (года), лежащей внутри интервала между двумя народными переписями, путем определения кривой движения населения в этом интервале. Если мы обозначим функцию, представляющую величину населения, через $P(t)$, то прожитое населением между временными точками t_1 и t_2 время (графически оно изобразится площадью между осью абсцисс, кривой величины населения и ординатами точек t_1 и t_2) может быть представлено интегралом:

$$\int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt$$

а среднее население в интервале $AP(t_1, t_2)$:

$$AP(t_1, t_2) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt}{\int_{t_1}^{t_2} dt} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt,$$

а если интервал между двумя переписями $(t_2 - t_1)$ принять за единицу, то

$$AP(0,1) = \int_0^1 P(t)\,dt.$$

В вышеприведенной таблице характерно, что наибольший прирост населения замечается раньше всего во всех странах с интенсивной иммиграцией, т.-е. Америке и Австралии. В Европе наибольший прирост приходился на Балканы и Россию. Взвешенная средняя годового прироста населения, при чем в качестве весов принимаются величины наличного населения, для всех перечисленных стран в периоде 1906—11 г.г. составляет 0,01159 или 1,159 % населения.

На основании определенного для каждой страны коэффициента годового прироста населения v, мы можем определить период удвоения величины населения n, путем решения уравнения

$$(1 + v)^n = 2,$$

откуда

$$n = \frac{\log 2}{\log(1+v)} = \frac{\log 2}{v\left(1 - \frac{v}{2} + \frac{v^2}{3} - \ldots\right)} \cong \frac{\log 2}{v}\left(1 + \frac{v}{2}\right) \cong$$

$$\cong \frac{0{,}69315}{v} + 0{,}34657.$$

Вычисленное таким образом n составляет:

СТРАНЫ	Период удвоения населения (лет)	СТРАНЫ	Период удвоения населения (лет)
Ирландия	—	Швейцария	57,6
Франция	436	Голландия	57,2
Ямайка	248	Дания	55,4
Шотландия	26	Германия	51,3
Норвегия	105	Финляндия	48,8
Бельгия	101	Румыния	47,2
Италия	187	Сербия	45,1
Швеция	82,9	Чили	44,8
Венгрия	882,9	Соедин. Штаты	38,4
Австрия	80,9	Австралия	34,5
Испания	60,0	Новая Зеландия	27,4
Англия и Уэльс	67,0	Канада	23,6
Япония	64,5		
Цейлон	58,1	В среднем	60,1

Совершенно очевидно, что в прошлом средний годовой прирост населения земного шара был значительно меньшей величиной, чем выведенная на основании наблюдений за период 1906—1911 г.г. Если определить современную величину населения земного шара в 1.649 миллионов (по Книббсу) и исходить из коэффициента годового прироста населения в 0,01159, то это население может произойти из одной человеческой пары в течение 1782 лет, по уравнению $1.649.000.000 = 2\ (1{,}01159)^n$, так что наличие на земном шаре одной пары должно было бы быть отнесено к 132 году после Р. Х. Даже если исходить из коэффициента 0,00864, исчисленного по оценкам величины населения земного шара между 1804 и 1914 годами, то для производства всего населения земного шара из одной человеческой пары потребовалось бы всего 2397 лет, или существование этой пары должно было бы быть отнесено к 483 году до Р. Х.

Факт значительно более медленного накопления населения земного шара в прошлом находится в полном соответствии со всем нашим историческим знанием. Средневековье является, напр., в общем, периодом стационарного состояния населения, а для некоторых периодов может быть отмечено и значительное его понижение (реформационные войны). Стабильность населения поддерживалась опустошительными эпидемиями, в еще большей мере—непрерывными войнами, а наиболее яркое свое выражение эта стабильность находила себе в сравнительно очень мало подвижном строе хозяйственных отношений. В настоящее время интенсивный рост населения, несмотря на значительное падение величины рождаемости во всех культурных странах, покоится на значительном сокращении величины смертности и значительном росте средней продолжительности человеческой жизни. Так как для ограничения величины смертности существуют естественные пределы, и в некоторых странах, если отвлечься от периода мировой войны, мы, судя по некоторым признакам, уже довольно близко подошли к этим пределам, то при условии продолжающегося падения величины рождаемости—прототипом в этом отношении является

Франция—мы имеем основания в будущем ожидать и понижения коэффициента годового прироста населения. Возможна и стабильность населения земного шара—переселение, очевидно, не изменяет его общей величины—если величина рождаемости упадет повсеместно до величины смертности, а средняя продолжительность человеческой жизни не будет проявлять тенденции к заметному росту.

Если исходить из сохранения для будущего коэффициента годового прироста населения в 0,01159, то нужно было бы предположить, что и границы производства средств для поддержания человеческой жизни должны были бы быть раздвинуты в совершенно невероятных границах. При периоде удвоения населения земного шара в 60,15 лет, через 10.000 лет величина эта должна составлять $22.184.10^{46}$, так что, если бы люди стали плотно друг к другу, то они заняли бы всю поверхность земного шара. Таким образом, нужно прийти к заключению, что, если развитие на протяжении последнего столетия привело к видимому опровержению учения Мальтуса, то неизбежно все же, и может быть не для слишком далекого будущего, наступление момента, когда оно будет блестяще подтверждено действительностью. Это соображение должно лечь в основу построения схемы роста человеческих масс в будущем.

3.

Как было указано выше, мы должны исходить из воображаемого, а не реального населения, относительно которого можно предположить, что в каждую бесконечно малую частицу времени dt оно изменяется в известном отношении ρ к своей первоначальной величине. Если к моменту t времени население составляло величину B_t, то по прошествии dt, оно составит

$$B_{t+dt} = B_t + \rho B_t dt = B_t (1 + \rho dt) \cong B_t e^{\rho dt} \tag{1}$$

При положительном ρ происходит возрастание населения, при отрицательном—его убывание.

Относительно коэффициента возрастания населения ρ можно сделать предположение, что на протяжении того или иного периода он сохраняет значение постоянной величины. Однако, вообще, для него должно быть сделано обратное предположение, а именно, что он сам представляется непрерывно изменяющейся во времени величиной, т.-е. является непрерывной функцией времени, в силу чего мы обозначаем его через $\Phi(t)$. Тогда выражение (1) превращается в

$$B_{t+dt} = B_t [1 + \Phi(t) dt].$$

Если коэффициент прироста населения предположить постоянным и обозначить его через v, то из выражения (1) мы можем получить дифференциальное уравнение

$$dB_t = v B_t dt,$$

и при помощи интегрирования

$$B_t = B_0 e^{vt} \tag{2}$$

где B_0 означает население для времени $t = 0$.

При разложении потенциальной функции B_t в ряд получаем:

$$B_t = B_0 \left(1 + \nu t + \frac{\nu^2 t^2}{2!} + \frac{\nu^3 t^3}{3!} + \cdots \right). \tag{2a}$$

Как было указано выше, в качестве общего правила нужно предположить, что коэффициент прироста населения не остается постоянным, изменяется во времени и представляет функцию последнего. Поэтому величина населения (B_t) есть функция от функции, и для определения движения населения в пределах известного временного интервала, необходимо изучить пробег кривой $\Phi(t)$ в этом интервале. Очевидно, что существует значительная совокупность факторов естественного, экономического и социального порядка, обусловливающая ту или иную величину коэффициента прироста населения и характер его изменения, при чем можно различать факторы органического и пертурбационного характера. Известная территория может быть богата естественными благами, непосредственно употребляемыми для удовлетворения элементарных человеческих потребностей. Это обстоятельство создает объективную возможность для интенсивного прироста населения. Не меньшее, однако, значение (в известных пределах) может иметь характер хозяйственной организации (способ производства). При преимущественном занятии населения охотой небольшое число лиц должно фактически обладать значительной территорией, в силу чего при этом условии прирост населения на ограниченной территории ограничен относительно очень узкими пределами. Кочевой образ жизни также сильно ограничивает размеры населения, могущего найти себе пропитание на известной территории, что привело в свое время к социальному движению, известному под названием великого переселения народов. Переход к оседлому земледелию чрезвычайно расширяет границы возможного прироста, создавая возможность прокормления гораздо большего количества людей на той же территории. И, наконец, широчайшие возможности в смысле прироста населения создаются переходом к индустриальному развитию, так что 19-е столетие является в известном смысле неповторимым в истории человечества. Однако и независимо от сильного и при том продолжающегося усиливаться падения рождаемости, можно предположить, что кульминационная точка этого развития уже позади. Такое явление, как возникновение мировой войны, является подтверждением такого предположения, хотя с другой стороны, несомненно, существуют и широкие еще возможности расширения производства средств пропитания. Когда мы в этом отношении подойдем ближе, чем сейчас, к естественным пределам, то лишь тогда будет полностью оценено великое значение учения Мальтуса. Судя по историческому опыту, можно думать, что установление стационарности населения или даже тенденция к его пониженю определится значительно раньше, чем будут достигнуты указанные пределы. Нельзя в этом отношении возлагать и излишних надежд на успехи научного знания, которому априорно не дано преодолеть окончательно естественной ограниченности средств поддержания человеческой жизни, если, конечно, отвлечься от фантазий относительно возможности колонизации других планет. Самое возникновение таких фантазий указывает на то, что в человечестве наростает сознание невозможности сохранения в дальнейшем того коэффициента прироста населения, какой мы наблюдали в течение истекшего столетия.

Если бы было возможно количественно измерять значение каждого фактора, влияющего на рост населения, в том числе и значение такого определяющего фактора, как отношение масс населения к вопросу о возможном количественном пределе продолжения человеческого рода, то коэффициент прироста населения ρ можно было бы представить в качестве функции времени и значительного числа изменяющихся параметров, так что вместо формулы простого вида

$$B_{t+dt} = B_t \left[1 + \Phi(t)\, dt\right],$$

мы имели бы

$$B_t = B_0 \Phi(a, b, c, \ldots \ldots t).$$

Влияние всех этих параметров представляется по большей части несущественным и ограниченным. Во всяком случае их влияние может сказаться лишь в течение очень значительного временного интервала. Зато некоторые из них могут приобрести и для короткого интервала более или менее крупное значение и привести к быстрому изменению в отношении роста населения, хотя бы и территориально ограниченному (землетрясения, эпидемии, неурожаи, войны). Для полного исследования функции роста населения необходимо было бы также исследовать зависимость каждого отдельного параметра от времени. По современному состоянию знания определить все эти изменения представляется в большинстве случаев невозможным. Однако форма функции, выражающей эти влияния, не является всегда неопределимой, если мы только отвлечемся от ряда параметров, влияние которых будет признано априорно несущественным. Естественно, что в самом отборе параметров неизбежны элементы значительного субъективизма.

Ряд факторов, влияющих на величину прироста населения, изменяется таким образом, что относительно них может быть предположена периодичность появления определенных значений, напр., метеорологические условия. Как бы ни было скрыто влияние таких факторов иными, но они должны влечь за собою и периодичность в развитии прироста населения. Давно уже было наблюдено, напр., что скопление зачатий наблюдается, по крайней мере для городского населения, весною и летом, а рождений — весной.

Если обозначить через T_1, T_2, ... продолжительность периодов влияния факторов, через α_1, α_2, ... продолжительность разделяющих эти периоды интервалов, через a_1, a_2, ... амплитуды изменений и через Q — сумму влияний всех прочих факторов, то периодичность в приросте населения выразится формулой, примерно, следующего строения:

$$\frac{\rho_t}{\rho_0} = 1 + \left[a_0 + a_1 \operatorname{Sin}\left(\alpha_1 + \frac{t}{T_1}\right) + a_2 \operatorname{Sin}\left(\alpha_2 + \frac{t}{T_2}\right) + \cdots\right] + Q \qquad (3)$$

Изменения прироста населения под влиянием переселений носят, если отвлечься от периодических переселений, обусловливаемых туризмом, приливом и отливом сезонных рабочих, участием в периодических съездах, ярмарках и т. д., имеют вообще непериодический характер. Наблюдения над иммиграцией приводят к заключению, что под ее влиянием коэффициент прироста населения возрастает до известного максимума, по достижении которого он падает, приближаясь ассимптотически к первоначальной или ближайшей к ней величине. Характерен в этом отношении пример прироста населения в Калифорнии. Указанное обстоятельство делает возможным выражение простейших изменений этого рода в форме потенциальной функции

$$\frac{\rho_t}{\rho_0} = 1 + \eta t^{m - nt} \tag{4}$$

При помощи выбора соответствующих параметров η, m, n можно исчерпать большинство индивидуальных явлений. Положительный знак перед η означает иммиграцию, а отрицательный — эмиграцию.

В соответствии со сделанными выше указаниями важно определить значение максимума этой функции. Для этого мы представляем ее в форме

$$y = \eta e^{(m - nt)\, lt},$$

дифференцируя, получаем

$$\frac{dy}{dt} = \eta t^{m - nt} \left(\frac{m}{t} - n - nlt \right).$$

Если обозначить через t_0 значение t, при котором получается максимум, то для определения его мы имеем уравнение

$$\frac{m}{n} = t_0 \left(1 + lt_0 \right).$$

4.

Коэффициент прироста населения находится в определенной зависимости от распределения населения по полу и возрасту. Относительно последнего можно заместить возрастное распределение величиною, которую мы уже определяли выше, как среднюю продолжительность человеческой жизни.

В странах со значительной иммиграцией для полового состава населения характерно преобладание мужского населения над женским, что находится в связи с преимущественной эмиграцией холостых мужчин. Для большинства же культурных стран характерно как раз обратное — преобладание женского населения над мужским, с тенденцией к постепенному росту этого преобладания, на почве большей жизнеспособности особей женского пола при, вообще говоря, меньшей квоте их рождаемости по сравнению с мужским полом. Если предположить длительное господство моногамии и сохранение узких пределов для внебрачных рождений, то уже этого обстоятельства достаточно для предположения о неизбежности замедления в темпе прироста населения, так как и средняя продолжительность жизни индивидов женского пола больше.

В отношении средней продолжительности человеческой жизни нужно отметить, что она в общем возрастает, что должно иметь естественным результатом рост коэффициента прироста населения. Для Европы 1900 года средняя продолжительность жизни составляла для мужчин 26,934, для женщин 27,341 и для лиц обоего пола 27,148 лет. О методе определения ее мы должны сказать несколько слов.

Количество лиц, составляющих определенную возрастную группу, может быть, очевидно, представлено функцией их возраста. Если через x обозначить определенный возраст, в смысле числа полностью прожитых человеческой группой лет, а через l_x, число лиц, переживших x-тый день своего рождения, то

$$l_x = f(x).$$

Характер этой функции нашел свое определение в известной, лежащей в основе ряда таблиц смертности[1]), формуле Гомперца-Макгама

$$l^x = c\ k^x g^{rx},$$

где c, k, g, и r обозначают постоянные, которые нужно избрать на основании материала наблюдений таким образом, чтобы они по возможности точно давали характеристику последнего.

При определении средней продолжительности жизни можно исходить из точной формулы, основанной на предположении, что величина населения определенного возраста есть функция этого возраста и, следовательно, распределение населения по возрастам предопределено, если дана его величина хотя бы для одного возраста, либо из приближенной формулы, о которой мы скажем несколько слов ниже. Исходя из вышеопределенной функции, средняя продолжительность человеческой жизни, которую нужно образовать отдельно для обоих полов и которую мы обозначаем через x_m, будет выражаться

$$x_m = \frac{\int_0^\omega x\, l_x\, dx}{\int_0^\omega l_x\, dx}$$

где ω представляет наивысший возможный для данного населения возраст.

Среднюю продолжительность человеческой жизни не следует идентифицировать с ожиданием жизненной продолжительности для возраста 0. В то время как первое есть не что иное, как средняя из продолжительностей жизни известного населения, измеряемая для определенной временной точки, ожидаемая продолжительность жизни есть не что иное, как будущая, т.-е. вероятная, продолжительность жизни всех новорожденных. Для стационарного населения, для которого коэффициент смертности изменяется от возраста к возрасту, но для каждого возраста остается постоянной величиной на длительный период, апостериорно устанавливаемая средняя продолжительность жизни населения может равняться ожиданию будущей продолжительности жизни.

---

[1]) См. об этом A. Loewy. „Yersicherungstmahematik“, Sammlung Göschen. 1910. N. Broggi. „Yersicherungsmathematik“. Teubner. 1911. Landrè. „Mathematisch-technische Kapitel zur Lebenswersicherung“. 5. Aufl. G. Fischer. 1922.

Если мы ожидание продолжительности жизни для лиц, возраст которых составляет точно x лет, обозначим через e_x^0, а всю совокупную будущую продолжительность их жизни—через T_x, то ожидание составляет частное от деления T_x на число лиц, следовательно,

$$e_x^0 = \frac{T_x}{l_x} = \frac{1}{l_x}\int_x^\omega l_x \, dx,$$

а вся будущая продолжительность жизни всего населения, начиная от новорожденных и кончая предельно возможным возрастом ω, составляет

$$\int_0^\omega e_x^0 \, l_x \, d = \int_0^\omega T_x \, dx,$$

а ожидание средней продолжительности жизни составит

$$\frac{\int_0^\omega T_x \, dx}{\int_0^\omega l_x \, dx},$$

т.-е. совпадет с $\dfrac{\int_0^\omega x \, l_x \, dx}{\int_0^\omega l_x \, dx}$ или средней продолжительностью жизни.

Ожидание продолжительности жизни для новорожденных также изменяется во времени и, как показал опыт XIX столетия, возрастает.

Приближенной формулой для средней продолжительности жизни населения (средний возраст) является

$$x_m = \frac{1}{2} + \frac{\sum_0^\omega x \, l_x}{\sum_0^\omega l_x}.$$

Для большего приближения к действительности, в предположении, что число рождений распределено более или менее равномерно на протяжении года (что, как мы знаем, далеко не точно) устанавливается, что каждое лицо возроста x прожило в действительности $x + {}^1/_2$ лет. Если исходить из временного интервала, точно совпадающего с календарным годом, то можно прийти к тому же, предположив, в целях упрощения приближенной формулы, что все рождения приходятся на середину года. Если отбросить в нашем выражении $^1/_2$, то мы получим среднюю продолжительность жизни, для ближайшего к моменту наблюдения—дня рождения, в следующей форме:

$$x_m = \frac{\sum_0^\omega (x+1) \, l_x}{\sum_0^\omega l_x}$$

5.

Рождаемость, как мы видим, падает во всех культурных странах, что находится в несомненной связи с изменением условий социального характера, с одной стороны, с повышением среднего возраста лиц, вступающих в брак, а с другой с повышением материального уровня и самоограничением на этой почве масс населения. Эмпирически установлено, что при низком уровне потребностей и тяжелом материальном положении коэффициент рождаемости относительно высок, а падает он в наибольшей степени для средних, в смысле материальной обеспеченности, слоев населения. Конечно, существует еще целый ряд факторов, влияющих на понижение коэффициента рождаемости, но мы выделили лишь те, кои представляются определяющими.

Нижеследующая таблица освещает этот процесс падения рождаемости в ряде стран на протяжении последнего полувека до войны (1860-1913 г.г.).

На 10.000 наличного населения приходилось новорожденных:

Периоды	Австралия	Англия и Уэльс	Франция	Пруссия	Италия	Швейцария	Норвегия	Швеция	Австрия	Венгрия	Средняя
1860—1864	426	349	266	385	379[2])	—	—	336	387	—	358
1865—1869	404	353	261	381	374	—	—	305	379	415[4])	351
1870—1874	376	354	255	383	366	299	299[3])	302	394	421	345
1875—1879	356	356	256	398	376	319	316	307	393	448	353
1880—1884	351	338	248	372	370	292	307	294	383	440	340
1885—1889	354	320	236	375	381	279	307	291	379	444	337
1890—1894	334	205	224	369	362	273	303	276	369	414	322
1895—1899	243	296	220	367	344	282	304	270	378	395	310
1900—1904	266	284	214	354	327	282	291	264	364	381	303
1905—1909	246	267	201	309	326	264	266	256	340	368	284
1910—1913	277	243	191	296	324	244	257	239	317	357	274
Средняя	354	335	235	366[1])	357[1])	284[1])	296	287	374	411[1])	

Самое понятие рождаемости употребляется в довольно разнообразных смыслах и, вообще говоря, сюда относится все касающееся воспроизведения человечества и вся вытекающая отсюда система сложных отношений. Для нас имеют значение лишь те проблемы рождаемости, которые касаются варьирования коэффициента рождаемости, как определяющего фактора для прироста населения, следовательно, конечный результат воспроизводства населения. При этом нужно однако иметь в виду, что сама величина рождаемости определяется влиянием очень сложной совокупности причин естественного и социального порядка; в частности, частота рождений или общий коэффициент брачности должны рассматриваться в качестве одного из определяющих для рождаемости факторов,

---

[1]) Только до 1912 г. [2]) Только для 1864 г. [3]) Только 1871 — 1873г. [4]) Только 1866—1869 г.

а величина смертности находится с величиной рождаемости в состоянии несомненной функциональной зависимости, характер которой не представляется еще достаточно выясненным.

Под общим коэффициентом рождаемости мы понимаем дробь, числителем которой является число всех родившихся на протяжении определенного временного интервала, а знаменателем — средняя величина всего населения на протяжении того же интервала. Обе эти величины являются переменными и обе они являются функциями времени. Если прирост родившихся во временном интервале от t до $t+dt$ обозначить через $f(t)$, то одновременный прирост населения — оба прироста представляют отношение к единице населения — можно обозначить через $F(t)$. Пусть число рождений в течение года, которые мы для простоты относим полностью к середине года, будет G_m, а средняя величина населения по прежнему B_m. Тогда средний годовой коэффициент рождаемости относимый к середине года, с какового момента начинается и счет времени, γ_m, будет:

$$\gamma_m = \frac{G_m}{B_m} = \frac{G\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(t)\,dt}{B\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} F(t)\,dt} \tag{5}$$

B—обозначает здесь фактическое наличное население в середине года, а G—соответствующее этому моменту годовое число рождений, т.-е. то число рождений, которое получилось бы, если бы характерная для середины года частота рождений была распространена на весь год. В качестве приближения, и, если дело идет о значительном населении, можно идентифицировать B и B_m.

Взаимозависимость коэффициента рождаемости и коэффициента смертности, в первую очередь грудных младенцев, устанавливается эмпирическим наблюдением в определенном направлении. По общему правилу, высокий коэффициент рождаемости сочетается с высоким же коэффициентом смертности грудных младенцев, но последний сам по себе, повидимому, лишь слабо влияет на величину рождаемости. Так как в то же время выяснилось, что повышение смертности грудных младенцев лишь в слабой степени повышает риск новой беременности, то отсюда нужно сделать тот вывод, что те же социальные условия, которые обусловливают повышенную рождаемость (раньше всего низкий материальный уровень населения), обусловливают и повышение смертности грудных младенцев.

Так как детская смертность в первом году жизни очень велика, то определенный выше коэффициент рождаемости не может дать удовлетворительного выражения для воспроизводительной силы населения, учитывая опустошение, происходящие для каждой генерации в ее первом жизненном году. Книббс и Чубер вводят новое понятие — остаточный коэффициент рождаемости (residuale Geburtenrate), под которым понимают коэффициент рождаемости, корректированный величиной смертности в первом году жизни. Если γ представляет коэффициент рождаемости, γ_r — корректированную вышеуказанным способом ее величину, τ — коэффициент смертности на первом году жизни, взятый в отношении к числу рождений, то

$$\gamma_r = \gamma (1 - \tau)$$

при чем выражение, заключенное в скобки, представляет относительную величину переживших первый год своей жизни. Для населения с постоянной частотой рождений и постоянной величиной смертности для первого года жизни эта величина совпадала бы с вероятностью жизни для возраста $x = 1$, т.-е. величиной, которую мы обозначаем через ${}_0p_1$, так как в этом случае она была бы не чем иным, как отношением $l_1 : l_0$. При этих условиях можно написать,

$$1 - \tau = {}_0p_1 = \frac{l_1}{l_0}, \tag{6}$$

что, повидимому, может быть применено в качестве приближенной формулы и при условии изменяющихся коэффициентов рождаемости и смертности грудных младенцев, если эти изменения держатся в относительно узких границах.

Колебания коэффициента рождаемости находятся в зависимости — в этом убеждают и теоретические соображения и эмпирический опыт — от коэффициента брачности. Периоды понижающейся рождаемости суть в то же время и периоды понижающейся брачности. Последнее, как и первое, характерно для большинства культурных стран, что можно условно рассматривать, как сознательное или бессознательное проникновение в массы начал мальтузианства. Параллельно с понижением рождаемости происходит и понижение величины смертности грудных младенцев, в силу чего совокупный эффект действия обеих тенденций сводится к относительной устойчивости остаточного коэффициента рождаемости, и, во всяком случае, падение этой величины представляется гораздо более ослабленным, а для определения движения населения изменения именно этой величины имеют решающее значение. Кривую падения корректированного коэффициента рождаемости можно было бы назвать Мальтусовской кривой.

В законе, установленном Мальтусом, нужно различать его сущность и внешнюю форму выражения. Что касается первой, то она сводится лишь к установлению того положения, что возрастание населения имеет тенденцию, при условии неограниченного влияния инстинкта размножения, происходит относительно быстрее, чем возрастание средств поддержания человеческой жизни. Опыт всей человеческой истории подтверждает правильность этого закона, а наблюдения последнего времени не опровергают его ни в малейшей степени, так как устанавливают, что после того, как новый способ производства очень существенно раздвинул рамки количественного накопления населения, в процессе развития этого способа производства, массы населения вынуждены приспособлять свое воспроизводство к внешним материальным условиям существования, и свести причины воздержания (падение коэффициента рождаемости и брачности) к влиянию одного лишь фактора—неравномерного распределения материальных благ — очевидно, не представляется никакой возможности.

В гораздо большей мере и с гораздо большим успехом оспаривалась та форма, в которой сам Мальтус выразил свой основной закон народонаселения и которая, в общем, сводится к следующему положению: если в течение известного периода производство средств существования имеет тенденцию возрастать в отношении арифметической прогрессии, то неизбежно наступление момента, когда население обгонит в своем росте производство средств поддержания человеческой жизни, после чего должно начаться вымирание до тех пор, пока между обеими величинами не будет восстановлено необходимого равновесия. Нам нужно установить, в какой мере эта формула находится в соответствии с вышеочерченным процессом изменения коэффициента рождаемости.

Допустим, что, начиная с известного момента $(t = 0)$ возможный рост производства средств существования происходит в отношении $1 + qt$ и одновременно население возрастает по закону e^{rt}. Оба выражения исходят из величины I, так как оба они обращаются в единицу при $t = 0$.

Далее, пусть $q = Mr$. Нужно предположить, что величина M значительно больше 1. В таком случае, для достаточно малых значений t величина $1 + qt$ будет больше, чем e^{rt}, т.-е. для небольших временных интервалов возрастание производства средств существования происходит в размерах, превышающих потребности населения, т.-е. существует избыток этих средств. Такое положение прекращаетея в тот момент, когда оба отношения возрастания становятся равными, т.-е. когда

$$1 + qt = 1 + Mrt = e^{rt}.$$

Разлагая потенциальную функцию в ряд, после чего можно в обеих частях отбросить единицу и произвести сокращение на rt, в результате мы получаем для определения t уравнение:

$$\frac{2\,(M-1)}{r} = t\left(1 + \frac{rt}{3} + \frac{r^2\,t^2}{3.4} + \frac{r^3\,t^3}{3.4.5} + \ldots\right) =$$

$$= t\left\{1 + \frac{rt}{3}\left[1 + \frac{rt}{4}(1 + \ldots)\right]\right\}.$$

Последняя форма может быть использована для определения величины t путем последовательного приближения.

Если принять во внимание, что, согласно наблюдению, r не может превышать 0,03, то написанное выше уравнение приводит нас к замечательному результату. Если представляется возможным повысить производство средств существования в течение ряда следующих друг за другом годов в отношении $1{,}1 + M{,}r$ $1 + 2Mr$, $1 + tMr$, то после сравнительно небольшого количества истекших лет должен наступить момент, когда должно произойти сокращение величины приходящихся на каждого индивидуума средств существования. Необходимый для того период, определяемый значениями M и r, можно назвать Мальтусовским эквивалентным интервалом.

Чтобы создать себе представление о величине последнего, мы можем определить его (t) при нижеследующих значениях M и r.

Мальтусовский эквивалентный интервал при различных коэффициентах возрастания (количество лет)

M	Отношение, в котором возрастает население e^{rt}, возрастание средств существования в отношении $1+Mrt$				
	rt	r=0,01	r=0,015	r=0,02	r=0,03
2	1,2564	125,6	83,8	62,8	41.9
4	2,3370	233,7	155,8	116,8	77,9
8	3,3150	331,5	221,0	165,7	110,5
16	4,2290	422,9	281,9	211,4	141,0

Если M принять равным 1,5, а $r=0{,}015$, то при помощи интерполяции получается $t=53$ годам. При $M=13{,}4$ и том же r, $t=266{,}6$ лет, при $M=29{,}483$ и том же r, $t=333{,}3$ годам. Максимум в нашей таблице для t (422,9 лет) получается тогда, когда мы принимаем r ниже той величины, которая характерна для последнего полувека, в 1%, в то время как мы видели, что период удвоения величины населения на основании наблюдений 1906—1911 г.г. составляет примерно 60 лет. При предположении, что $M=16$, т.-е. возрастание средств существования составляет 16% в год, и их производство увеличится в течение 50 лет в 9 раз, а в течение столетия в 17 раз против исходного предположения, то и при этих условиях потребуется всего лишь 423 года *до наступления критического момента, когда вся сумма потребностей возростего* населения — в предположении, что эти потребности не могут быть урезаны — не сможет быть удовлетворена. Как бы практически ни мало (но непременно положительно) было избрано значение r и как бы велико ни было практически M — оно, конечно, не может принимать размеров, явно немыслимых — все равно интервал t будет сравнительно невелик в сравнении с историческими и еще менее геологическими интервалами. Таким образом, можно и с точки зрения внешней формулировки прийти к выводу о ее правильности у Мальтуса. Как бы ни казалась малой наблюдателям современная величина прироста населения — она должна представляться очень большой, если припомнить, что для человеческой истории характерна стационарность населения в течение ряда столетий — все же в течение сравнительно недалекого будущего должны возникнуть стеснения в пропитании населения, в особенности для стран со значительной плотностью населения, если, конечно, само население не ограничит действия своей воспроизводительной способности до уровня относительной стационарности последнего.

Мы можем обозначить для определенного населения величину коэффициента роста населения при предположении, что воспроизводительная способность ничем не ограничивается через Г, а наблюдаемый (действительный) коэффициент прироста через $\gamma=m\Gamma$, при чем очевидно, что величина $m<1$ и выражает отношение понижения действительного прироста против физиологически возможного. Величина m может быть названа мальтусовским коэффициентом. Поскольку γ представляется функцией времени, то же относится, очевидно, и к $m\Gamma$. Для каждой группы населения кривая мальтусовского коэффициента обладает индивидуальным строением, и в направлении построения этих кривых и их сравнении должна производиться статистическая работа ближайшего будущего.