Расширение понятия числа

Н. Рождественский

§ 1

Условимся под *обобщенным числом* разуметь любую однозначную возрастающую функцию от обыкновенного числа n; *обобщенное число* будем обозначать символом $|n|$; таким образом

$$|n| = f(n) \tag{1}$$

Число n назовем „основанием" *обобщенного числа*.

Если основанию n станем давать последовательные значения обыкновенного натурального ряда [1]), то получим *натуральный ряд обобщенных чисел*:

$$|0| = f(0); |1| = f(1); |2| = f(2); |3| = f(3), \ldots\ldots |n| = f(n) \tag{2}$$

Так как натуральным рядом определяется система чисел, то из нашего условия вытекает, что *возможно* неограниченное количество различных числовых систем, причем каждая будет определяться исходной, *основной*, функцией.

Обозначим через E_n разность между двумя последовательными *обобщенными числами*:

$$E_n = f(n) - f(n-1) \tag{3}$$

Ряд получающихся путем подстановки в последнее выражение последовательных чисел обыкновенного натурального ряда, будем называть *основным рядом обобщенной системы чисел*, а каждое E_n—*единицей основного ряда*. Таким образом, будем иметь:

$$E_1 = f(1) - f(0); \quad E_2 = f(2) - f(1); \quad E_3 = f(3) - f(2) \ldots$$

$$E_{n-1} = f(n-1) - f(n-2); \quad E_n = f(n) - (n-1).$$

---

[1]) Возможно, конечно, аргументу n давать последовательные значения какого-либо другого обыкновенного ряда; но так как члены последнего суть функции обыкновенного натурального ряда, то, в конце концов, все дело сводится именно к нему.

Складывая, получаем:

$$\sum_{n}^{1} E_i = f(n) - f(0),$$

откуда:

$$f(n) = |n| = f(0) + \sum_{1}^{n} E_i\ ,$$

т.-е. *обобщенное число* есть совокупность нуля (ибо $f(0) = |0|$) и всех n *первых по порядку* (а *не любых*) единиц основного ряда системы; поэтому, поскольку инвариантность числа можно считать доказанной для обычной числовой системы [1]), постольку же она имеет место и для *обобщенных числовых систем в пределах* этих n первых единиц основного ряда. Этим *обобщенная система*, в которой, *вообще* говоря, единицы основного ряда *не равны друг другу*, отличается от обыкновенной, где все единицы основного ряда равны друг другу, и где поэтому, для образования числа n можно брать совокупность любых n единиц основного ряда. Отсюда же вытекает роль *порядка* в образовании числа.

Под сложением *обобщенных чисел* (знак действия будем выражать $\#$) условимся разуметь действие, удовлетворяющее общей формуле:

$$|n_1| \# |n_2| = f(0) + \sum_{1}^{n_1} E_i + \sum_{n_1}^{n_1+n_2} E_i = f(0) + \sum_{1}^{n_1+n_2} E_i =$$

$$= f(n_1 + n_2) = |n_1 + n_2|, \tag{5}$$

т.-е. сумма двух *обобщенных чисел* равна *обобщенному числу*, основание которого равно сумме оснований слагаемых.

Очевидно, из всего сказанного, что законы коммутативности и ассоциативности сложения имеют место и для обобщенных числовых систем.

Если вычитание определим, как действие обратное сложению, то формулу вычитания для обобщенных чисел получим в виде:

$$|n_1| \sim |n_2| = |n_1 - n_2|,$$

где символ $\sim$ есть знак вычитания. Как в сложении, так и в вычитании *порядок* играет основную роль: от уменьшаемого последовательно отнимаются *не любые* единицы основного ряда, а единицы вычитаемого, пока не будет это последнее исчерпано все целиком.

Принцип перманентности подведет нас к понятию *обобщенного нуля* $|0|$ и обобщенного отрицательного числа.

Определим умножение, как действие, посредством которого из множимого $|n_1|$ составляется произведение так, как множетель $|n_2|$ составлен из *первой* единицы натурального ряда. Знаком умножения будем считать символ „!"

[1]) L. Kronecker: „J. reine angew. Math.", 101 (1887), S.339. u. ff. H. v. Helmholtz: „Wiss. Abh.", (1895), S. 372 u. and.

Множитель $|n_2|$ составлен из первой единицы натурального ряда следующим образом: взято основание первой единицы $|1|$ и умножено на основание n_2 множителя $|n_2|$:

$$|n_2| = |1 . n_2| ;$$

По этому же правилу составим произведение из множимого, именно: основание n_2, множимого $|n_1|$, умножим на основание n_2 множителя $|n_2|$ т.-е.:

$$|n_1| \,!\, |n_2| = |n_1 . n_2| . \tag{6}$$

Коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность умножения для обобщенных чисел очевидны.

От умножения легко перейти к возведению в степень и к делению, рассматривая последнее, как действие, обратное умножению:

$$|n^1| \downarrow |n_2| = \left|\frac{n_1}{n_2}\right| . \tag{7}$$

($\downarrow$ знак деления).

По принципу перманентности легко перейти к извлечению корня (а, след., далее, и к понятию об иррациональном о б о б щ е н н о м ч и с л е) и действию логарифмирования.

§ 2

Выше все время мы понимали о б о б щ е н н о е ч и с л о, как фунцию одной переменной, а именно:

$$|n| = f (n) \tag{1}$$

Однако можно сделать дальнейшее обобщение и рассматривать обобщенное число, как функцию двух независимых переменных, например:

$$|n| = f(n, x) \tag{8}$$

Условимся относительно этого уравнения, что переменная n будет попрежнему о с н о в а н и е м о б о б щ е н н о г о ч и с л а, x же пусть будет н е п р е р ы в н о изменяющейся переменной величиной. При этом условии постоянное число, например $|5|$, выразится, как

$$|5| = f(5, x),$$

т.-е. будет функцией некоторого аргумента x и, с геометрической точки зрения, выражать некоторую линию. Если, для простоты, мы возьмем эту функцию f в виде

$$|n| = nax,$$

то ясно, что это уравнение будет выражать собою, при значениях равных числам натурального ряда, неограниченное количество (пучек) прямых линий, исходящих из начала координат и определяемых некоторым, выбранным нами, определенным параметром a. Давая в этой формуле основанию n последовательные значения обыкновенного натурального ряда, получим:

$$|1| = ax; \ |2| = 2ax; \ |3| = 3ax \ \ldots\ldots$$

т.-е. эти *обобщенные числа* будут представлять собою ординаты *любой точки соответствующей* прямой. Это приводит нас к выводу, что при этом условии *неравные в обычном смысле слова* ординаты различных точек *одной и той же прямой*, выражающей данное число, например $|2| = 2ax$, будут представлять собою одно и то же число.

Сложение двух чисел сводится к построению новой прямой по уравнению:

$$|n_1| \mathbin{+\!\!+} |n_2| = n_1 ax + n_2 ax = (n_1 + n_2)\, ax = |n_1 + n_2|$$

Резюме

1°. Возможно неограниченное число различных числовых систем. Наша обычная система есть лишь *одна из возможных*.

2°. В образовании числа играют роль три момента:

а) выбор той или иной числовой фунции, определяющей собой *основной ряд*;

в) точное определение действия, которое мы называем *сложением*;

с) удовлетворение условию, выраженному формулой образования суммы:

$$|n_1| \mathbin{+\!\!+} |n_2| = f(0) + \sum_{1}^{n_1} E_i + \sum_{n1+1}^{n_1+n_2} E = f(0) + \sum_{1}^{n_1+n_2} E_i = |n_1 + n_2|.$$

3°. Единицы *основного ряда*, вообще говоря, неравны друг другу и порядковые числа *не* совпадают с количественными. (В обычной же системе единицы основного ряда равны друг другу и порядковые числа совпадают с количественными).

Для всех числовых систем действия над числами *формально* сводятся к действиям над соответствующими порядковыми номерами этих чисел. Например, для всех систем мы будем иметь $|5| \mathbin{+\!\!+} |7| = |12|$, где основания слагаемых (5 и 7) и суммы (12) суть не что иное, как их порядковые номера чисел в их *натуральном ряду*.

Это обстоятельство характеризуем, как принцип *символической инвариантности числа*.

Выше было кратко сказано об инвариантности чисел. Под этим разумеют следующее: в каком бы порядке не пронумеровать предметы какого-нибудь комплекса, получается всегда один и тот же номер [1]). Для наших обобщенных числовых систем этот принцип надо понимать в том смысле, что всякое число (n) *натурального ряда* образуется из n первых единиц *основного ряда*, независимо от того порядка, в каком брать эти последние.

Под принципом же *символической инвариантности* чисел будем разуметь то обстоятельство, что для всех систем *формальный* результат действий над несколькими числами выражается в одних и тех же символах, *совпадающих с символами обычной системы*, независимо от *реального* количества отдельных объектов, входящих в данный числовой

[1]) Ж. Танри и Ж. Мольк. „Основные принципы арифм.“ (Сборн. „Нов. идеи в мат.“)

комплекс и скрывающихся за соответственным символом: для всех систем „пять“ плюс „семь“ будет (формально) „двенадцать“, хотя под числами „пять“, „семь“ и „двенадцать“ в различных системах будут разуметься различные реальные количества объектов.

Из этого принципа могут быть сделаны некоторые выводы гносеологического характера, на которых останавливаться здесь мы не будем.

Однако, из сказанного не следует делать вывода, будто бы, вместо систем чисел, мы имеем простой счет числа комплексов, независимо от их содержания; наоборот, мы имеем настоящие числовые системы, а вовсе не действия над числами порядковых номеров. В этом легко убедиться из следующего: в чем сущность всякой системы, например, нашей обычной? Что мы хотим сказать, когда пишем равенство: $5 + 7 = 12$?

„Понятие суммы 7 и 5 не содержит ничего, кроме соединения этих двух чисел в одно, причем вовсе не мыслится, какое именно это число, обнимающее собою оба данные“ [1]). Другими словами: когда мы сказали „семь“ плюс „пять“, мы уже сказали все в смысле действия сложения, понятие о „результате“ (двенадцати) есть нечто новое, привступающее; для этого нам нужен определенно построенный натуральный ряд чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 и т. д. Говоря, что сумма семи и пяти равна двенадцати, мы указываем, что эта совокупность (сумма) совпадает с определенным числом (12) того же натурального ряда, и только. Идея же сложения уже вполне закончена в выражении: $7 + 5$.

Таким образом, во всякой числовой системе результат того или иного действия над числами (целыми и рациональными) должен находить себе определенное место в соответствующем натуральном ряде: в этом вся сущность всякой числовой системы.

Изложенное в § 1 показывает, что рассмотренные ряды числовых функций обладают только что указанным свойством, а поэтому они суть системы чисел.

5°. Понятия „равно“, „больше“, „меньше“ с формальной стороны совпадают с таковыми же понятиями для обычной системы; по существу же могут быть системы, в которых $|a| > |в|$ реальное количество объектов (m_a), соответствующих символу a, будет меньше количества объектов ($m_в$), выражаемого символом b, т.-е. $m_a < m_b$. Это указывает на относительность этих понятий.

6°. Вопрос о том, какое понятие: понятие ли порядкового или понятии количественного числа надо принять за первичное, повидимому, на основании изложенного, решается в пользу порядкового понятия числа. E. G. Huserl [2]), считая, что количественное число непременно предшествует порядковому числу, не заключает, однако, отсюда того, что количественная арифметика единственно возможная, и допускает ряд других арифметик, основывающихся на понятии порядкового числа.

---

[1]) И. Кант. „Пролегомены“, стр. 20.

[2]) См. приложение к „Philosophie der Arithmetik“ (1, Halle, 1891).

В наших системах чисел в основу положена идея порядка. Каким образом фиксировать определенный порядок—это безразлично, стоит только многообразие чисел подчинить другому, уже так или иначе упорядоченному, многообразию, например, порядку букв алфавита и т. п. Выше, как это видно из изложенного, таким упорядоченным многообразием для удобства взят порядковый ряд чисел обычной системы, вот почему в этих системах порядковое число не совпадает с количественным; в обычной же системе это совпадение имеется, в чем, между прочим, и заключается ее простота, а отсюда и общеупотребительность.