Sur une propriété des fonctions entières de genre 0

Serge Bernstein

On sait, qu'il existe des cas exceptionnels, où la somme de deux fonctions de genre 0 représente une fonction de genre 1. Ainsi, par exemple, la somme *)

$$f_1(x) + f_1(-x) = F(x),$$

où

$$f_1(x) = \prod_{n=2}^{\infty}\left(1 + \frac{x}{n(\log n)^{\alpha}}\right), \tag{1}$$

est une fonction entière de genre 1, quoique $f_1(x)$ est de genre 0, lorsque $2 > \alpha > 1$. Dans ce cas particulier les coefficients des puissances paires de la fonction $f_1(x)$ de genre 0 sont les mêmes que dans la fonction $\frac{1}{2}F(x)$, qui est de genre 1. Par conséquent, comme l'a remarqué M. Lindelöf dans le mémoire cité, on ne puit affirmer d'une façon générale que si la fonction $f(x)$, majorante de la série $\frac{1}{2}F(x)$ est de genre 0, cette dernière doit aussi être de genre 0.

Posons, en général,

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n \ldots \tag{2}$$

On vérifie *) sans difficulté, que pour les fonctions de genre 0 et d'ordre réel inférieur à 1, la série

$$\sum^{\infty} \sqrt[n]{c_n} \tag{3}$$

est convergente. Mais dans le cas, où l'ordre reel de la fonction $f(x)$ le genre 0 est égal à 1, comme cela a lieu dans l'exemple (1), la convergence de la serie (3) est douteuse. M. Lindelöf démontre, en effet, que dans son exemple on a pour une infinité de valeurs de n (ε étant positif et arbitrairement petit).

$$\sqrt[n]{c_n} > \frac{e(1-\varepsilon)}{(\alpha-1)\,n(\log n)_{\alpha-1}} \tag{4}$$

---

*) Ernst Lindelöf. „Mémoire sur la theorie des fonctions entières". Acta Societatis Scientiarum Fennicae, t. XXXI (1902).

et, en supposant que l'inégalité (4) subsiste pour **toute** valeur de n assez grande il s'exprime ainsi: „En admettant cette conclusion *), dont l'exactitude n'est pas douteuse, mais dont il ne semble pas aisé de trouver une démonstration directe, on voit d'abord que, bien que la fonction donnée soit du genre zéro, la série $\sum^{\infty} \sqrt[n]{c_n}$ n'en est pas moins divergente".

Je vais montrer plus loin, que l'inégalité (4) pour la fonction de M. Lindelöf est, en effet, vérifiée pour **toute** valeur de n, de sorte que la conclusion citée de cet éminent géomètre est parfaitement exacte.

Il est d'autant plus intéressant de signaler la proposition suivante, qui montre, que pour les fonctions **paires** l'exception constatée par M. Lindelöf serait impossible.

Si $$f(x) = c_0 + c_2 x^2 + \ldots + c_{2n} x^{2n} + \ldots \tag{5}$$

est une fonction paire de genre 0, la série

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[2n]{|c_{2n}|} \tag{6}$$

est toujours convergente.

Il résulte, en particulier, de notre théorème, que toutes les fois, où, comme dans l'exemple de M. Lindelöf, la série (3) relative à la fonction (2) sera divergent, la somme $f(x) + f(-x)$ sera de genre 1.

Passons à présent à la démonstration du théorème énoncé.

On la, par hypothèse (pour simplifier l'écriture supposons $c_0 = 1$)

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x_2}{\beta_n^2}\right) = 1 + c_2 x^2 + \ldots + c_{2n} x^{2n} + \ldots, \tag{7}$$

où

$$\sigma = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|\beta_n|} \tag{8}$$

est convergente.

Il est clair que, $|\beta_n|$ étant donnés, les coefficients c_{2n} auront leurs modules les plus grands, lorsque tous les β_n seront réels et positifs: nous pouvons donc nous borner, à considérer ce cas, comme le plus défavorable pour la convergence de la serie (6). Supposons donc $\beta_n > 0$.

Ceci posé, envisageons le polynome:

$$f_N(x) = \prod_{n=1}^{n=N} \left(1 + \frac{x^2}{\beta_n^2}\right) = 1 + A_1 x^2 + \ldots\ldots + A_N x^{2N}. \tag{9}$$

On aura:

$$A_1 = \sum\nolimits_1 \frac{1}{\beta_n^2}, \quad A_2 = \sum\nolimits_2 \frac{1}{\beta_m^2 \beta_n^2} \text{ etc.,}$$

*) L'exactitude de l'inégalité (4) pour toute valeur de *n*. S. B.

le signe $\sum_k$ exprimant que l'on fait la somme de tous les produits de k facteurs $\frac{1}{\beta_m^2\beta_n^2\ldots\beta_s^2}$ obtenus en combinant de toutes les façons possibles les N quantités $\frac{1}{\beta_n^2}$.

Montrons d'abord, que l'on a quel que soit l'entier m

$$A_m A_{m-2} < A_{m-1}^2, \tag{10}$$

pourvu qu'on pose $A_0 = 1$ et $A_m = 0$, lorsque $m < 0$ ou $m > N$, et que l'on remplace le signe $<$ par $=$, si $m \leqslant 0$ ou $m > N + 1$.

En effet, notre affirmation est évidente pour $N = 1$. Il suffit donc de faire voir, que les inégalités (10) étant vraies pour $N = N_0$, elles le seront également pour $N = N_0 + 1$.

Or, en désignant par A'_m les coefficients correspondants du polynome $f_{N+1}(x)$ de degré $2(N + 1)$, obtenu par l'introduction dans (9) d'un nouveau facteur $(1 + h^2x^2)$, où $h^2 = \frac{1}{\beta_{N+1}^2} > 0$, on a, en effectuant la multiplication,

$$f_{N+1}(x) = 1 + A'_1x^2 + \ldots\ldots + A'_m x^{2m} + \ldots\ldots + A'_{N+1}x^{2N+2},$$

où

$$A'_m = h^2A_{m-1} + A_m \tag{11}$$

Il suffit donc de vérifier que

$$(h^2A_{m-1} + A_m)\,(h^2A_{m-3} + A_{m-2}) < (h^2A_{m-2} + A_{m-1})^2, \tag{12}$$

les nombres A_m satisfaisant, par hypothèse, aux inégalités (10). Or, l'inégalité (12) est une conséquence des trois inégalités

$$A_{m-1}A_{m-3} < A_{m-2}^2,\ A_m A_{m-2} < A_{m-1}^2,\ A_m A_{m-3} < A_{m-1}A_{m-2}, \tag{13}$$

dont la dernierè se déduit par la multiplication des deux premières. En remarquant d'ailleurs que l'inégalité (12) subsiste même, si deux des inégalités (13) sont remplacées par des égalités, et se reduit à une égalité, seulement, lorsque toutes les trois des inégalités (13) se trouvent remlacées par les égalités correspondantes, nous voyons que

$$A'_m A'_{m-2} < (A'_{m-1})^2, \tag{14}$$

tant que $0 < m \leqslant N + 2$, l'inégalité (14) se réduisant à une égalité pour toutes les autres valeurs de m. En répétant le même raisonnement de proche en proche, nous constatons que, les inégalités (10) sont vraies quel que soit N.

Il résulte, en particulier, de notre raisonnement que $m > 1$ étant donné la différence

$$A_{m-1}^2 - A_m A_{m-2} > 0$$

va en croissant avec N; donc on aura à fortiori

$$c_{2m-2}^2 - c_{2m} \cdot c_{2m-4} > 0 \tag{15}$$

Revenons encor à notre polynome $f_N(x)$, donné par la formule (9), le nombre N étant fixe. En vertu de (10), $A_m > 0$ pour $0 \leqslant m \leqslant N$.

Par conséquent, en posant

$$\sqrt{\frac{A_{m+1}}{A_m}} = \frac{1}{P_m}, \tag{16}$$

nous voyons, que $\frac{1}{P_m} > 0$, tant que $N > m \geqslant 0$, et $\frac{1}{P_m} = 0$ pour $m = N$; de plus les termes de la somme

$$S_N = \frac{1}{P_0} + \frac{1}{P_1} + \ldots\ldots + \frac{1}{P_N} \tag{17}$$

vont en décroissant à cause de (10).

Soit, d'autre part,

$$\sigma_N = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{\beta_N}. \tag{18}$$

Cherchons une limite supérieure de l'accroissement de S_N, lorsque nous introduisons dans $F_N(x)$, comme auparavant, le nouveau facteur $1 + h^2 x^2$, de sorte que la somme σ_N reçoit l'accroissement h et devient égale à

$$\sigma_{N+1} = \sigma_N + h. \tag{19}$$

En vertu de l'égalité (11), chaque terme $\frac{1}{P_m}$ sera remplacé par

$$I_m = \frac{1}{P_m}\sqrt{\frac{1 + h^2 P_m^2}{1 + h^2 P_{m-1}^2}},$$

de sorte que la somme S_N se trouvera trausformée en

$$S_{N+1} = \sum_{m=o}^{m=N} \frac{1}{P_m}\sqrt{\frac{1 + h^2 P_m^2}{1 + h^2 P_{m-1}^2}} = \sum_{m=o}^{m=N} \sqrt{\frac{\frac{1}{P_m^2} + h^2}{1 + h^2 P_{m-1}^2}} \tag{20}$$

pourvu qu'on pose $P_{-1} = 0$ et que l'on remarque que le dernier terme $\frac{1}{P_N}$ qui était nul daus S_N se transforme effectivement en $\sqrt{\frac{h^2 A_N}{A_N + h^2 A_{N-1}}} = \sqrt{\frac{h^2}{1 + h^2 P_{N-1}}}$

Ceci posé, nous allons décomposer S_{N+1} en trois parties s'il y a lieu (il se pourrait que la première ou dernière partie ne contienne aucun terme):

$$S_{N+1} = \sum_{m=0}^{m=m_0} I_m + \sqrt{\frac{\dfrac{1}{P^2_{m_0+1}} + h^2}{1 + P^2_{m_0} h^2}} + \sum_{m=m_0+2}^{m=N} I_m , \tag{21}$$

où m_0 est le plus petit indice pour lequel

$$h^2 (2 P_{m_0} + P_{m_0+1}) P_{m_0+1} > 1 , \tag{22}$$

de sorte qu'on aura pour toute valeur de $m \leqslant m_0$

$$h^2 (2 P_{m-1} + P_m) P_m \leqslant 1 . \tag{23}$$

Chaque terme de la première partie pourra être mis sous la forme:

$$I_m = \frac{1}{P_m} \sqrt{\frac{1 + h^2 P^2_m}{1 + h^2 P^2_{m-1}}} = \frac{1}{P_m} \sqrt{1 + h^2 \frac{P^2_m - P^2_{m-1}}{1 + h^2 P^2_{m-1}}} <$$

$$< \frac{1}{P_m} \left[1 + \frac{h^2}{2} \frac{P^2_m - P^2_{m-1}}{1 + h^2 P^2_{m-1}} \right]. \tag{24}$$

Or,

$$\frac{P^2_m - P^2_{m-1}}{1 + h^2 P^2_{m-1}} = (P_m - P_{m-1}) \frac{P_m + P_{m-1}}{1 + h^2 P^2_{m-1}} =$$

$$= \frac{P_m - P_{m-1}}{1 + h^2 P_m} \cdot \frac{1 + h^2 P^2_m}{1 + h^2 P^2_{m-1}} (P_m + P_{m-1}) , \tag{25}$$

et

$$\frac{P_m - P_{m-1}}{1 + h^2 P_m} < \int_{P_{m-1}}^{P_m} \frac{dz}{1 + h^2 z^2} . \tag{26}$$

Mais, en multipliant par $(P_m - P_{m-1})$ les deux membres de l'inégalité (23) qui est vérifiée, par hypothèse, pour toutes les valeurs de m que nous considérons actuellement, on a

$$h^2 [P^2_m + P_m P_{m-1} - 2P^2_{m-1}] P_m \leqslant P_m - P_{m-1} ,$$

ou bien

$$(1 + h^2 P^2_m)(P_m + P_{m-1}) \leqslant 2P_m (1 + h^2 P^2_{m-1}) ; \tag{27}$$

par conséquent, en tenant compte de (26) et (27), on tire de (25)

$$\frac{P^2_m - P^2_{m-1}}{1 + h^2 P^2_{m-1}} < 2P_m \int_{P_{m-1}}^{P_m} \frac{dz}{1 + h^2 z^2} ,$$

de sorte que, d'aprés (24),

$$I_m < \frac{1}{P_m} + h^2 \int_{P_{m-1}}^{P_m} \frac{dz}{1+h^2 z^2}$$

et finalement

$$\sum_{m=0}^{m=m_0} I_m < \sum_{m=0}^{m=m_0} \frac{1}{P_m} + h^2 \int_0^{P_{m_0}} \frac{dz}{1+h^2 z^2} \leqslant \sum_{m=0}^{m=m_0} \frac{1}{P_m} + h\frac{\pi}{4}, \tag{28}$$

car $h P_{m_0} \leqslant 1$, en vertu de (23).

D'autre part, la dernière partie

$$\sum_{m=m_0+2}^{m=N} I_m < \sum_{m=m_0+1}^{m=N-1} \frac{1}{P_m}, \tag{29}$$

puisque

$$I_m = \sqrt{\frac{\frac{1}{P_m^2} + h^2}{1 + h^2 P_{m-1}^2}} < \frac{1}{P_{m-1}}$$

Ainsi nous concluons de (28) et (29) que l'accroissement

$$S_{N+1} - S_N < h\frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{\frac{1}{P_{m_0+1}^2} + h^2}{1 + P_{m_0}^2 h^2}}, \tag{30}$$

P_{m_0} et P_{m_0+1} devant satisfaire à l'inégalité (22); mais, grâce à l'inégalité signalée, on a

$$\frac{1 + \frac{1}{h^2 P_{m_0+1}^2}}{1 + h^2 P_{m_0}^2} < \frac{1 + \frac{2P_{m_0} + P_{m_0+1}}{P_{m_0+1}}}{1 + \frac{P_{m_0}^2}{P_{m_0+1}(2P_{m_0} + P_{m_0+1})}} = \frac{2(2P_{m_0} + P_{m_0+1})}{P_{m_0} + P_{m_0+1}} < 3.$$

Par conséquent, quelle que soit la valeur positive h,

$$S_{N+1} - S_N < h\left[\sqrt{3} + \frac{\pi}{4}\right]. \tag{31}$$

Il en résulte que dans tous les cas, et quel que soit N,

$$S_N < \sigma_N \left[\sqrt{3} + \frac{\pi}{4}\right]. \tag{32}$$

car pour $N=1$, on a $S_1 = \sigma_1$.

En faisant croitre N indéfiniment, nous voyons ainsi que la somme

$$\sum_{m=1}^{n} \sqrt{\frac{|c_{2m}|}{|c_{2m-2}|}} < \sigma\left[\sqrt{3}+\frac{\pi}{4}\right],$$

quelque soit n. Donc la série

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\frac{|c_{2m}|}{|c_{2m-2}|}} < \sigma\left[\sqrt{3}+\frac{\pi}{4}\right] \tag{33}$$

est convergente.

Le conclusion est maintenant immédiate, grâce au théorème suivant, dû à M. Carleman:

Si
$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est une série convergente à termes positifs, la série

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n}$$

est également convergente, et on a $\Sigma \leqslant eS$.

En appliquant ce théorème de M. Carleman à notre série S, nous tirons de (33) que la série

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[2n]{|c_{2n}|} < e\left[\sqrt{3}+\frac{\pi}{4}\right]\sigma \tag{34}$$

est convergente. C. q. f. d.

Il y a lieu de signaler que, grâce à la remarque faite au debut de notre démonstration, la convergence de Σ est bien assurée quels que soient les nombres β_n; par contre, la convergence de la série S n'est aucunement certaine, lorsque les nombres β_n ne sont pas positifs (il est évident que la variation d'une seule des quantités β_n suffirait pour détruire la convergence, en annulant un des coefficients c_{2m}).

Remarque. La réciproque de notre théorème n'est exacte, en général, car, quel que soit le genre de la fonction entière donnée par la série (5), il suffirait que ses coefficients présentent des lacunes assez grandes pour que la série (6) puisse converger. Si cependant nous nous bornons au cas, où les nombres β_n sont réels, nous avons vu que les coefficients de (5) satisfont à l'inégalité (15), qui leur impose une certaine régularité de décroissanse, et alors la réciproque est bien exacte. En d'autres termes, je dis que pour $\beta_n > 0$, la divergence de la série (8) (qui exprime que la fonction (7) est de genre 1) entraine la divergence de la série (6). Il suffira évidemment de prouver la divergence de la série

$$S = \sum_{1}^{\infty} \sqrt{\frac{c_{2m}}{c_{2m-2}}}, \tag{35}$$

puisque les termes de cette série étant décroissants [d'après (15)], sa divergence entraine nécessairement celle de la série (6), dont les termes sont supérieurs respectivement à ceux de la série (35). Pour le montrer nous allons faire voir que l'introduction d'un nouveau facteur $1+h^2x^2$ dans le produit (9) qui correspond à l'augmentation de h de la somme σ_N donnée par la formule (18) entraine une augmentation be la somme S_N d'une quantité supérieure à Ah, où A est un nombre positif fixe: il en resultera que σ_n croissant indéfiniment, par hypothèse, il en sera de même de S_N.

Définissons le nombre $m_0 \geqslant 0$ par la condition que

$$h\ P_m > 1 \text{ (ponr } m \geqslant m_0) \quad h\ P_m \leqslant 1 \text{ (poun } m < m_0).$$

Nous pouvons faire deux hypothèses différentes: 1) soit d'abord $h P_{m_0} \geqslant 2$: dans ces conditions en se reportant à (24), nous vérifions que

$$I_{m_0} = \frac{1}{P_{m_0}} \sqrt{\frac{1+h^2 P_{m_0}^2}{1+h^2 P_{m_0-1}^2}} \geqslant \frac{1}{P_{m_0}} \sqrt{\frac{1+h^2 P_{m_0}^2}{2}} \geqslant \frac{1}{P_{m_0}} + \frac{h}{4},$$

car

$$\sqrt{\frac{1+x^2}{2}} - \frac{x}{4} < 1 \text{ croit avec } x \text{ (pour } x \geqslant 2).$$

En tenant compte de ce que tous les termes de S_n reçoivent des accroissements positifs, nous voyons que dans l'hypothèse considérée l'accroissement de S_N est supérieur à $\frac{h}{4}$. 2) Soit à présent $hP_{m_0} < 2$; nous avons alors pour toutes les valeurs de $m \leqslant m_0$

$$I_m = \frac{1}{P_m} \sqrt{1+h^2 \frac{P_m^2 - P_{m-1}^2}{1+h^2 P_{m-1}^2}} > \frac{1}{P_m} \left[1 + \frac{h^2}{4} \frac{P_m^2 - P_{m-1}^2}{1+h^2 P_{m-1}^2} \right]$$

Donc, l'accroissement de I_m est supérieur à

$$\frac{h^2 (P_m - P_{m-1})}{4(1+h^2 P_{m-1}^2)} > \frac{h^2}{4} \int_{P_{m-1}}^{P_m} \frac{dz}{1+h^2 z^2},$$

et la somme de tous ces accroissements sera grâce à (36) supérieure à

$$\frac{h^2}{4} \int_0^{P_{m_0}} \frac{dz}{1+h^2 z^2} \geqslant \frac{h}{4} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{h\pi}{16}$$

Ainsi dans cette seconde hypothèse également, l'accroissement de S_N sera supérieur à Ah, où $A = \frac{\pi}{16}$ c. q. f. d. Je terminerai cette note par la demonstration de l'inégalité (4) de M. Lindelöf relative à la fonction (1). A cet effet, je remarquerai, que pour obtenir les coefficients successifs du développement de

$$(1+b_1 x)(1+b_2 x)\dots(1+b_n x)\dots = 1 + c_1 x + \dots + c_m x^m + \dots$$

ont peut employer le procédé suivant. Désignons par $c_h^{(k)}$ le coëfficient de x^k du produit infini obtenu en rejetant les h premiers facteurs: ainsi, en particulier, $c_0^{(k)} = c_k$. On aura évidemment

$$c_h' = \sum_{h+1}^{\infty} b_n, \quad c_h'' = \sum_{h+1}^{\infty} b_n c_n', \quad \dots \quad c_h^{(k)} = \sum_{h+1}^{\infty} b_n c_n^{(k-1)} \dots$$

Pour la fonction (1) on a $b_n = \dfrac{1}{(n+1)(\log \overline{n+1})^{\alpha}}$

Donc $$c_h' = \sum_{h+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\log \overline{n+1})^{\alpha}} > \int_{h+1}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(\log \overline{x+1})^{\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{(\alpha-1)(\log \overline{h+2})^{\alpha-1}}$$

$$c_h'' = \frac{1}{\alpha-1} \sum_{h+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\log \overline{n+1})^{\alpha}(\log \overline{n+2})^{\alpha-1}} >$$

$$> \frac{1}{\alpha-1} \int_{h+1}^{\infty} \frac{dx}{(x+2)(\log \overline{x+2})^{2\alpha-1}} =$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot (\alpha-1)^2} \cdot \frac{1}{(\log \overline{h+3})^{2\alpha-2}};$$

en général $$c_h^{(k)} > \frac{1}{k!(\alpha-1)^{k}} \frac{1}{[\log (h+k+1)]^{k\alpha-k}},$$

de sorte que $$c^{k} = c_0^{(k)} > \frac{1}{k!\,(\alpha-1)^k (\log \overline{k+1})^{k\alpha-k}}$$

Donc, en tenant compte de la formule de Stirling, on a bien, quel que petit que soit ε, pour toute valeur de n assez grande.

$$\sqrt[n]{c_n} > \frac{e}{(\alpha-1)\, n\, (\log \overline{n+1})^{\alpha-1}} > \frac{e(1-\varepsilon)}{(\alpha-1)\, n\, (\log \overline{n+1})^{\alpha-1}} \qquad (4)$$

La série $\sum \sqrt[n]{c_n}$ est donc bien divergente, si $\alpha \leqslant 2$.