О различных мерах точечных ансамблей *)

Гр. Грузинцев

---

1. В своей предыдущей заметке „Об одном типе свойств точечных ансамблей“ я указал на один класс свойств ансамблей, которые назвал α-свойствами.

Приложением понятия α-свойств к измерению линейных ансамблей мы теперь и займемся.

И подобно тому, как канторовская мера ансамблей, римановский интеграл, жордановские функции ограниченной варьяции и непрерывные функции оказываются тесно связанными между собой, так как при построении этих понятий мы можем взять один и тот же исходный пункт — то, что я назвал бэровским α-свойством, точно так же и замена бэровского α-свойства общим α-свойством приводит к обобщению меры, интеграла и понятий функций ограниченной варьяции и непрерывных.

Напомню, что задача измерения линейного ансамбля очень просто сводится к отысканию определенного интеграла от некоторой функции, связанной с измеряемым ансамблем.

Именно, под длиной ансамбля ε, лежащего в интервале (a, b), мы понимаем

$$\int_a^b \mu(x)dx$$

где функция $\mu(x)$ равна единице для всех точек ансамбля E и нулю — для точек дополнительного ансамбля. Поэтому мы сначала определим интеграл, а от него перейдем к мере ансамбля.

2. Предварительно мы дадим обобщение понятия верхней (resp. нижней) границы и колебания функции в промежутке и в точке.

Пусть нам дано некоторое α-свойство.

Тогда функцией α-ограниченной в интервале (a, b), мы будем называть функцию $f(x)$, определенную в этом интервале, если можно определить два числа A и B так, чтобы ни ансамбль чисел x, удовлетворяющих неравенству

$$f(x) > A,$$

---

*) Доложено Екатеринославскому Мат. О-ву 24. VI. 20 под заглавием: „О различных определениях интеграла“ и Харьковскому Мат. О-ву 15. II. 23 под заглавием: „О формальном методе исследования в теории ансамблей и в теории функций“.

ни ансамбль чисел x, удовлетворяющих неравенству

$$f(x) < B$$

не имели бы данного α-свойства.

В случае, если α-свойство будет бэровским (т.-е. „не быть пустым"), то мы получим просто ограниченную функцию.

3. Число M_α (f, a, b) или, короче, M_α мы будем называть верхним α-пределом функции f(x) в интервале (a, b), если оно удовлетворяет двум условиям:

I. Как бы ни было мало положенное число ε, ансамбль чисел x, удовлетворяющих неравенству

$$f(x) > M_\alpha - \varepsilon,$$

всегда имеет α-свойство.

II. Как-бы ни было мало положительное число ε, ансамбль чисел x, удовлетворяющих неравенству

$$f(x) > M_\alpha + \varepsilon,$$

никогда не имеет α-свойства.

Верхний α-предел функции есть частный случай верхнего α-предела ансамбля, который определяется аналогичными двумя условиями и имеет следующие два важные свойства:

I. Верхний α-предел ансамбля всегда существует, если ансамбль α-ограничен и имеет α-свойство.

II. Если ансамбль E_1, есть часть ансамбля E_2, то его верхний α-предел не может быть больше верхнего α-предела ансамбля E_2.

Нетрудно конструировать и нижний α-предел функции, и нижний α-предел ансамбля.

4. Можно было бы привести много примеров α-свойств, но я ограничусь пятью.

Пусть α_1 — будет „не быть пустым"

α_2 — „ „быть бесконечным"
α_3 — „ „быть неприводимым"
α_4 — „ „быть неисчислимым"
α_5 — „ „быть не меры нуль" *)

Тогда, очевидно, M_{α_1} будет верхней границей функции в данном промежутке и M_{α_2} — верхним пределом. Остальные же три мы назовем: M_{α_3} — верхним неприводимым пределом, M_{α_4} — верхним сгущенным пределом и, наконец, M_{α_5} — верхним метрическим пределом.

Нетрудно показать, что для одной и той же функции в одном и том же промежутке

$$M_{\alpha_1} \geqslant M_{\alpha_2} \geqslant M_{\alpha_3} \geqslant M_{\alpha_4} \geqslant M_{\alpha_5}$$

*) Для определенности, я в этом случае меру беру в смысле Borel — Lebesgue'a.

Таким же образом, если мы обозначим m_α нижний α-предел, то для одной и той же функции в одном и том же промежутке

$$m_{\alpha_1} \leqslant m_{\alpha_2} \leqslant m_{\alpha_3} \leqslant m_{\alpha_4} \leqslant m_{\alpha_5}$$

5. Если нам дана некоторая α-ограниченная функция $f(x)$ и некоторое частное значение независимого переменнаго, напр., x, то, окружив это значение интервалом длины h, мы получим два числа

$$M_\alpha\left(f, x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}\right) = M_\alpha(h)$$

и

$$m_\alpha\left(f, x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}\right) = m_\alpha(h)$$

т.-е. верхний и нижний α-пределы в соответствующих интервалах.

При уменьшении этого интервала до нуля, оба эти числа, как это нетрудно показать, стремятся к определенным пределам:

$$\lim_{h \to 0} M_\alpha(h) = M_\alpha(f, x)$$

$$\lim_{h \to 0} m_\alpha(h) = m_\alpha(f, x).$$

Эти пределы мы будем называть **верхний и нижний α-пределы функции f в точке x.**

Так как при этом постоянно

$$m_\alpha(h) \leqslant M_\alpha(h)$$

то, следовательно,

$$m_\alpha(f, x) \leqslant M_\alpha(f, x)$$

6. Неравенства, существующие между верхним и нижним α-пределами дают возможность определить положительные (точнее: не отрицательное число которое мы назовем **α-колебанием** функций **в данном интервале**:

$$\omega_\alpha(a, b) = M_\alpha(a, b) - m_\alpha(a, b)$$

Подобным же образом мы определим и **α-колебание** функции в данной **точке**:

$$\omega_\alpha(f, x) = M_\alpha(f, x) - m_\alpha(f, x)$$

Относительно α-колебания функции в точке и интервале можно доказать теорему, которая является обобщением теоремы Baire'а о равномерности колебания функции.

Если во всех точках x некоторого полного интервала $[a, в]$ *) имеет место неравенство

$$\omega_\alpha(f, x) \leqslant k$$

---

*) **Полным** интервалом (a, b) я называю ансамбль точек x, удовлетворяющих неравенствам.

то для всякого $\varepsilon > o$ всегда можно подобрать такое δ, что во всяком промежутке, лежащем в $[a, b]$ и не превышающем по длине δ, α-колебание ω_α будет меньше $(k + \varepsilon)$

$$\omega_\alpha < k + \varepsilon$$

Введение понятия α-колебания дает возможность определить два класса функций, которые мы назовем функциями

$$a \leqslant x \leqslant b$$

ограниченного α-колебания и α-непрерывными.

Разобьем интервал $[a, b]$, в котором определена функция $f(x)$, предполагаемая нами α-ограниченной, на конечное число частных интервалов

$$\triangle_1, \triangle_2, \ldots\ldots \triangle_k, \ldots\ldots, \triangle_n$$

так, чтобы они не находили друг на друга, и чтобы сумма их равнялась длине первоначального интервала. Обозначим ω_α^k α-колебание функции в k-ом интервале.

Тогда функцию $f(x)$ мы будем называть функцией ограниченного α-колебания в интервале $[a, b]$, если

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_\alpha^k$$

ограничено сверху, как бы мы ни брали частные интервалы

Если же для всех значений x в полном интервале $[a, b]$ имеет место равенство:

$$\omega_\alpha(f, x) = 0$$

то такую функцию мы будем называть α-непрерывной в этом интервале.

На α-непрерывные функции без труда распространяется теорема G. Cantor'a о равномерности непрерывности: это прямое следствие формулированной выше обобщенной теоремы R. Baire'a.

Следует заметить, что такое определение α-непрерывных функций и функций ограниченного α-колебания легко распространить и на функции многих переменных, так как при определении чисел M_α, m_α и ω_α мы не пользовались тем фактом, что значения переменного x расположены в скалярном порядке *).

---

*) Обобщение функций à variation bornée на случай многих переменных можно произвести и в другом направлении, которое мне представляется более интересным.

В своей работе (1916 г.; еще не опубликована) „Fonctions de deux variables réelles et fonctions analytiques" я ввожу понятие о „une couple de fonctions à variation bornée commune" и даю обобщение интеграла Stieltjes'a—Ляпунова, полезное для решения некоторых задач теории однозначных аналитических функций.

Название, которое я привожу, дает, мне кажется, достаточно ясное понятие о направлении, в котором идет обобщение.

8. Обращаясь к тем пяти случаям α-свойств, которые я указал выше, мы получим пять классов α-непрерывных функций: непрерывные функции, в обычном смысле слова и, кроме того, предельно-непрерывные неприводимо-непрерывные, сгущенно-непрерывные и метрически-непрерывные.

В частности известная функция Lejeune-Dirichlet (равная 1 для иррациональных значений и 0 для рациональных) принадлежит, очевидно, к числу сгущенно-непрерывных.

Точно так же мы получаем, кроме функций ограниченного колебания, еще четыре класса функций: функции ограниченного предельного колебания, ограниченного неприводимого колебания, ограниченного метрического колебания.

9. Пусть нам дана функция $f(x)$, определенная в интервале $[a, b]$ и α-ограниченная в нем.

Разделим весь интервал на n частей:

$$\triangle_1, \ \triangle_2, \ldots \triangle_k \ldots \triangle_n$$

и составим суммы:

$$\sum_{k=1}^{n} M_{\alpha}^{k} \triangle_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} m_{\alpha}^{k} \triangle_k$$

где M_{α}^{k} и m_{α}^{k} — верхний и нижний α-пределы функции $f(x)$ в k-ом интервале.

Пусть $\triangle$ будет наибольший из частных интервалов $\triangle_k$.

Тогда, какова бы ни была функция $f(x)$, лишь бы она была α-ограниченной,— обе вышеуказанные суммы будут стремиться к определенным пределам, если

$$\lim \triangle = 0$$

При этом величина этих пределов не зависит от способа подразделения $[a, b]$ на частные интервалы.

В этом состоит обобщение теоремы Darboux.

Назовем эти пределы

$$\lim \sum M_{\alpha}^{k} \triangle_k = \overline{\int_{a}^{b}}_{\alpha} f(x)\,dx$$

верхним α-интегралом и

$$\lim \sum m_{\alpha}^{k} \triangle_k = \underline{\int_{a}^{b}}_{\alpha} f(x)\,dx$$

нижним α-интегралом.

Если оба эти интегралы равны, то общую их величину мы будем обозначать

$$\int_{a}^{b}{}_{\alpha} f(x)\,dx$$

и будем называть α-интегралом функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ а функцию $f(x)$ будем называть α-интегрируемой в этом промежутке.

10. Из определения α-интеграла без труда вытекают три свойства его:

I. двоякая аддитивность операции α-интегрирования — по отношению к функции и по отношению к области, т.-е.,

$$\int_{\alpha}(f_1 + f_2)\,dx = \int_{\alpha} f_1\,dx + \int_{\alpha} f_2\,dx$$

$$\int_{a\,\alpha}^{b} f\,dx = \int_{a\,\alpha}^{c} f\,dx + \int_{c\,\alpha}^{b} f\,dx$$

II. теорема о средней, а именно, если M_α и m_α будут относиться ко всему интервалу $[a, b]$, то

$$m_\alpha . (b - a) \leqslant \int_{a\,\alpha}^{b} f(x)\,dx \leqslant M_\alpha . (b - a)$$

III. свойства неопределенного интеграла, а именно функция

$$F(x) = \int_{a\,\alpha}^{x} f(x)\,dx$$

определенная в интервале $[a, в]$ будет в этом интервале одновременно и непрерывной и ограниченного колебания.

Условию α-интегрируемости можно придать ту же форму, как и условию существования римановского интеграла, т.-е.;

$$\lim_{\Delta = 0} \sum \omega_\alpha^k \triangle_k = 0$$

В частном случае это условие соблюдается и для α-непрерывных функций и для функций ограниченного α-колебания.

Данному выше условию α-интегрируемости нетрудно дать форму, аналогичную форме, выведенной Lebesgue'ом для интеграла Riemann'а.

Функция $f(x)$ должна быть почти везде*) α-непрерывной.

12. Исследование α-интегрируемости функции $f(x)$ можно свести на исследование интегрируемости в смысле Riemann'а функций $M_\alpha(f, x)$ и $m_\alpha(f, x)$.

Это мы можем сделать, опираясь на две леммы:

I. Во всяком промежутке верхняя граница функции $M_\alpha(f, x)$ совпадает с верхним α-пределом функции $f(x)$ и

II. Во всяком промежутке нижняя граница функции $m_\alpha(f, x)$ совпадает с нижним α-пределом функции $f(x)$.

*) Т.-е. за исключением, быть может, ансамбля меры нуль.

Из этих лемм вытекает, что

$$\overline{\int_{a}^{b}}_{\alpha} f(x)dx = \overline{\int_{a}^{b}}_{\alpha} M_\alpha(f,x)\,dx$$

и

$$\underline{\int_{a}^{b}}_{\alpha} f(x)dx = \underline{\int_{a}^{b}}_{\alpha} m_\alpha(f,x)\,dx$$

т.-е. *верхний α-интеграл функции $f(x)$ равен верхнему римановскому интегралу функции $M_\alpha(f,x)$, а нижний α-интеграл функции $f(x)$ равен нижнему римановскому интегралу функции* $m_\alpha(f,x)$.

13. Переходя к условиям α-интегрируемости, мы отметим следующие очевидные неравенства:

$$\overline{\int} M_\alpha\,dx \geqslant \underline{\int} M_\alpha\,dx \geqslant \underline{\int} m_\alpha\,dx$$

$$\overline{\int} M_\alpha\,dx \geqslant \overline{\int} m_\alpha\,dx \geqslant \underline{\int} m_\alpha\,dx$$

интегралы берутся в римановском смысле и в интервале (a, b).

Сравнивая эти неравенства с равенствами предыдущего n°, мы находим: *необходимыми и достаточными условиями α-интегрируемости функции $f(x)$ являются 1) интегрируемость в риманновском смысле функций $M_\alpha(f,x)$ и $m_\alpha(f,x)$ и 2) равенство полученных таким образом интегралов:*

$$\int_a^b M_\alpha\,dx = \int_a^b m_\alpha\,dx.$$

14. Так как всегда верхний α-предел меньше или равен верхней границе, а нижний α-предел больше или равен нижней границе, то

$$\overline{\int} F(x)\,dx \geqslant \overline{\int}_{\alpha} F(x)\,dx \geqslant \underline{\int}_{\alpha} F(x)\,dx \geqslant \underline{\int} F(x)\,dx,$$

где функция $F(x)$ *ограничена* во всем интервале интегрирования.

Положим $F = M_\alpha(f,x)$

Тогда получим:

$$\overline{\int} M_\alpha(f,x)\,dx \geqslant \overline{\int}_{\alpha} M_\alpha(f,x)\,dx \geqslant \underline{\int}_{\alpha} M_\alpha(f,x)\,dx \geqslant \underline{\int} M_\alpha(f,x)\,dx,$$

Допустим теперь, что функция $f(x)$ α-интегрируема; тогда $M_\alpha(f,x)$, как мы знаем, будет интегрируема в смысле Riemann'а и все написанные выше неравенства превращаются в равенства.

Отсюда вытекает, во-первых, что $M_\alpha(f, x)$ α-интегрируема и, во-вторых,

$$\int_\alpha M_\alpha(f,x)\,dx = \int M_\alpha(f,x)\,dx = \int_\alpha f(x)\,dx.$$

Тот-же вывод можно, очевидно, сделать и относительно функции $m_\alpha(f, x)$; т.-е. во-первых m_α (f, x) α-интегрируемо и, во-вторых,

$$\int_\alpha m_\alpha(f, x)\,dx = \int m_\alpha(f, x)\,dx = \int_\alpha f(x)dx.$$

Отсюда следует, что

$$\int_\alpha (M_\alpha - f)\,dx = 0$$

и

$$\int_\alpha (f - m_\alpha)\,dx = 0$$

15. Допустим тепер, что функция $f(x)$ неинтегрируема в смысле Riemann'a, но имеет какой-нибудь α-интеграл.

Тогда легко убедиться, что к f можно прибавить такую неинтегрируемую в смысле Riemann'a функцию σ, имеющую α-интеграл, равный нулю, что полученная новая функция

$$f + \sigma$$

будет интегрируема по Riemann'у и, кроме того,

$$\int (f + \sigma)\,dx = \int_\alpha f\,dx$$

Таких функций, очевидно, можно указать бесчисленное множество; вот одна из них:

$$\sigma(x) = M_\alpha(f, x) - f(x)$$

Таким образом, всякая функция $f(x)$, не интегрируемая в смысле Riemann'a, но α-интегрируемая, может быть представлена в виде суммы двух функций

$$f(x) = \varphi(x) + \rho(x)$$

где φ — интегрируема по Riemann'у, а ρ — имеет α-интеграл, повсюду равный нулю.

16. Допустим, что у нас имеется несколько α-свойств, которые можно расположить в ряд так, что если ансамбль имеет некоторые из этих свойств, то он будет иметь и все последующие.

Мы будем говорить в этом случае, что у нас имеется шкала α-свойств.

Пример такой шкалы мы видели в самом начале статьи (n° 4).

Сравнение различных α-свойств, принадлежащих к одной и той же шкале, приводит к интересным выводам, из которых я отмечу только некоторые:

I. Если функция интегрируема для какого-нибудь α-свойства, то она будет интегрируема и для всех следующих.

II. Если функция интегрируема для двух различных α-свойств, то соответствующие α-интегралы равны.

III. Оценка α-интеграла при помощи теоремы о средней дает для следующих α-свойств лучшие результаты.

IV. При переходе от предыдущих α-свойств к последующим происходит расширение класса интегрируемых функций, причем это расширение можно представить себе в такой форме: увеличивается класс функций, имеющий интеграл, повсюду равный нулю, а именно: некоторые функции, которые были раньше неинтегрируемыми, делаются интегрируемыми, ибо их интеграл равен нулю; остальные же „приобретают", так сказать, интегрируемость в силу теоремы, аналогичной теореме n° 15.

17. Воспользоваться изложенными результатами для построения меры ансамбля, связанной с данным α-свойством, уже нетрудно.

Мы этого делать не будем, ограничившись напоминанием замечания, сделанного в n° 1 относительно функции $\mu(x)$.