О конечных разностях функций двух независимых переменных

М. Н. Марчевский

1. Во многих вопросах, как, например, при решении задачи интерполирования или нахождения конечных определенных сумм, нам приходится встречаться с так называемыми конечными разностями различных порядков для некоторой функции $f(x)$ одного независимого переменного x.

Предполагая эти понятия, равно как и важнейшие формулы, относящиеся к конечным разностям, известными, мы лишь напомним формулы, дающие выражения разностей любого порядка с помощью значений функций и, наоборот выражения значений функций с помощью ее последовательных разностей. Эти формулы имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \triangle^k f(x) &= f(x+kh) - C_k^1 f[x+(k-1)h] + C_k^2 f[x+(k-2)h] \ldots\ldots + (-1)^k f(x) \\ f(x+kh) &= f(x) + C_k^1 \triangle f(x) + C_k^2 \triangle^2 f(x) + \ldots\ldots + \triangle^k f(x) \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Мы напишем их еще проще в символической форме, для чего предварительно введем следующие сокращенные обозначения:

$$f(x) = f_0,\ f(x+h) = f_1,\ f(x+2h) = f_2, \ldots\ldots f(x+kh) = f_k,$$

т.-е. индексами будем указывать, сколько раз повторяется буква h, прибавляемая к x. Тогда первую из вышенаписанных формул мы представим в следующем символическом виде:

$$\triangle^k f(x) = (f_1 - 1)^k \quad \text{или} \quad \triangle^k f_0 = (f_1 - 1)^k,$$

при чем условимся, возвышая символически в k-ую степень в правой части, ставить коэффициенты, как и при действительном возвышении в эту степень какого-либо двучлена $(z-1)$, а индексы у f в каждом члене писать такие, какие должны были бы быть показатели буквы z в соответствующем члене выражения $(z-1)^k$, так что f_3 будет соответствовать z^3, f_0 будет стоять на месте z^0, т.-е. в последнем члене разложения, и т. д. Например:

$$\begin{aligned} \triangle^3 f(x) &= (f_1 - 1)^3 = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0 = \\ &= f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x). \end{aligned}$$

Вторую из формул (A) мы также напишем символически в виде:

$$f(x+kh)=(1+\triangle)^k f(x), \quad \text{или} \quad f_k=(1+\triangle)^k f_0;$$

так, например, $f(x+4h)$ вычисляется по этой формуле следующим образом:

$$f(x+4h)=(1+\triangle)^4 f(x)=(1+4\triangle+6\triangle^2+4\triangle^3+\triangle^4)f(x)=$$
$$=f(x)+4\triangle f(x)+6\triangle^2 f(x)+4\triangle^3 f(x)+\triangle^4 f(x).$$

2. Одно из первых применений конечных разностей различных порядков мы встречаем в так называемой интерполяционной формуле Ньютона. Предполагая, что для некоторой функции $f(x)$ даны значения ее для ряда равноотстоящих значений x, а именно

$$f(a),\ f(a+h),\ f(a+2h),\ldots\ldots f[a+(n-1)h],\ f(a+nh),$$

мы имеем известный интерполяционный полином Ньютона:

$$F(z)=f(a)+\frac{z-a}{1}\triangle f(a)+\frac{(z-a)(z-a-h)}{2!\,h^2}\triangle^2 f(a)+\ldots\ldots+$$
$$+\frac{(z-a)(z-a-h)\ldots\ldots[z-a-(n-1)h]}{n!\,h^n}\triangle^n f(a),$$

значения которого при $z=a,\ a+h,\ a+2h,\ldots\ldots a+nh$ будет совпадать с значениями $f(z)$, т.-е.:

$$F(a)=f(a),\ F(a+h)=f(a+h),\ldots\ldots F(a+nh)=f(a+nh),$$

на основании чего для некоторого значения x, отличного от $a, a+h,\ldots\ldots a+nh$ пишут приближенное равенство:

$$f(x)=F(x), \text{ т.-е.}$$

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}\triangle f(a)+\frac{(x-a)(x-a-h)}{2!\ h^2}\triangle^2 f(a)+$$
$$+\ldots\ldots+\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots\ldots[x-a-(n-1)h]}{n!\ h^n}\triangle^n f(a),$$

которое и представляет собою интерполяционную формулу Ньютона.

3. Мы имеем в виду в настоящей статье заняться обобщением некоторых формул теории конечных разностей на случай функций двух независимых переменных.

Подобно тому, как в дифференциальном исчислении при распространении понятия о дифференциалах различных порядков на случай функций двух (и вообще, нескольких) переменных приходится вводить понятия о частных и полных дифференциалах, так и при аналогичном построении теории конечных разностей для функций $f(x, y)$ двух независимых переменных мы должны будем ввести в рассмотрение **частные** и **полные** разности различных порядков, а затем исследовать их важнейшие свойства *).

Мы будем предполагать, что x может принимать ряд равноотстоящих значений вида:

$$a,\ a+h,\ a+2h, \ldots\ldots a+mh,$$

постепенно увеличивающихся на h; значения же y, также равностоящие пусть будут:

$$b,\ b+k,\ b+2k, \ldots\ldots b+nk,$$

т.-е. все время увеличиваются на k. Рассматривая для каждой пары значений x и y соответствующую точку (x, y) в координатной плоскости ХОУ, мы будем, таким образом, иметь целый ряд точек с координатами вида $(a+mh,\ b+nk)$ где m и n могут изменяться независимо друг от друга. Мы условимся еще иногда для краткости письма пользоваться сокращенным обозначением:

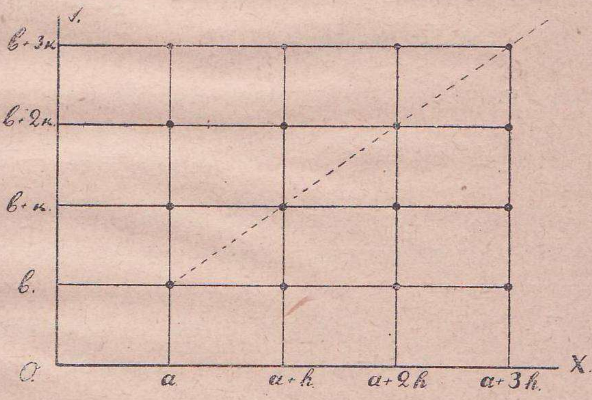

Рис. 1

$$f(a+mh,\ b+nk) = f_{m,n}, \text{ в частности: } f(a,b) = f_{0,0}$$

4. Станем теперь под **частными** разностями 1-го порядка, взятыми, относительно переменных x и y, понимать выражения:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_x f(a,b) = f(a+h,b) - f(a,b)\\ \Delta_y f(a,b) = f(a,b+k) - f(a,b)\end{array}\right\} \text{ или, короче } \left\{\begin{array}{l}\Delta_x f_{0,0} = f_{1,0} - f_{0,0}\\ \Delta_y f_{0,0} = f_{1,0} - f_{0,0}\end{array}\right.$$

Далее можем рассматривать частные разности высших порядков:

$$\Delta^2_{x^2} f(a,b) = \Delta_x[\Delta_x f(a,b)],\ \Delta^2_{xy} f(a,b) = \Delta_y[\Delta_x f(a,b)]$$
$$\Delta^2_{yx} f(a,b) = \Delta_x[\Delta_y f(a,b)],\ \Delta^2_{y^2} f(a,b) = \Delta_y[\Delta_y f(a,b)] \text{ и т. д.}$$

При этом мы сейчас же видим, что

$$\Delta^2_{xy} f(a,\ b) = \Delta^2_{yx} f(a,\ b),$$

потому что $\Delta_y[\Delta_x f(a,b)] = \Delta_y[f(a+h,b) - f(a,\ b)] =$

$$= f(a+h,\ b+k) - f(a,\ b+k) - f(a+h,\ b) + f(a,\ b)$$
$$\Delta_x[\Delta_y f(a,b)] = \Delta_x[f(a,b+k) - f(a,b)] =$$
$$= f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)$$

И вообще можно было бы легко убедиться в том, что результат последовательного нахождения конечных разностей по различным переменным не зависит от порядка таких действий.

*) См. Lacroix — Traité des differences et des séries, 1819 г. или Schlömilch, — Theorie der Differenzen und Summen, 1848 г.

Что же касается последовательного конечного диференцирования по одному и тому же переменному, т.-е. в предположении, что другое сохраняет неизменную величину то, очевидно, оно совершается по известным уже нам правилам, относящимся к функциям одного переменного. Таким образом, мы могли бы писать:

$$\left.\begin{aligned}\triangle_{x^n}^n f(a,b) &= f(a+nh,b) - C_n^1 f[a+(n-1)h,b] + \\ &+ C_n^2 f[a+(n-2)h,\ b] - \ldots\ldots + (-1)^n f(a,b) \\ \triangle_{y^n}^n f(a,b) &= f(a,b+nk) - C_n^1 f[a,b+(n-1)k] + \\ &+ C_n^2 f[a,b+(n-2)k] - \ldots\ldots + (-1)^n f(a,b)\end{aligned}\right\}(n=1,2,3,\ldots\ldots)$$

или, еще короче, в символической форме:

$$\triangle_{x^n}^n f_{0,0} = (f_{1,0}-1)^n,\ \triangle_{y^n}^n f_{0,0} = (f_{0,1}-1)^n \qquad (n=1,2,3,\ldots\ldots),$$

где при возвышении в степень изменяется только значек 1 по тому же правилу, которое мы встречали в случае одного переменного, значек же 0 остается без перемены.

5. Сумму частных разностей 1-го порядка назовем **полной** разностью 1-го порядка и обозначим через $\triangle f(a,b)$, так что

$$\triangle f(a,b) = \triangle_x f(a,b) + \triangle_y f(a,b),$$

после чего определим и полные разности высших порядков:

$$\triangle^2 f(a,\ b) = \triangle[\triangle f(a,\ b)],\ \triangle^3 f(a,\ b) = \triangle[\triangle^2 f(a,\ b)],\ldots\ldots,\triangle^n f(a,\ b) = \\ = \triangle[\triangle^{n-1} f(a,\ b)]$$

Нахождение полных разностей различных порядков на основании их определения не представляет никаких затруднений. Но мы, вместо этого, постараемся установить общую формулу для полной разности n-го порядка. Из равенства

$$\triangle f(a,b) = \triangle_x f(a,b) + \triangle_y f(a,b)$$

тотчас же имеем:

$$\triangle^2 f(a,b) = \triangle_x[\triangle_x f(a,b) + \triangle_y f(a,b)] + \triangle_y[\triangle_x f(a,b) + \triangle_y f(a,b)] = \\ = \triangle_{x^2}^2 f(a,b) + 2\triangle_{xy}^2 f(a,b) + \triangle_{y^2}^2 f(a,b).$$

Отсюда легко нашли бы дальше, что

$$\triangle^3 f(a,b) = \triangle_{x^3}^3 f(a,b) + 3\triangle_{x^2y}^3 f(a,b) + 3\triangle_{xy^2}^3 f(a,b) + \triangle_{y^3}^3 f(a,b),$$

но и без этой последней формулы, на основании вида выражений для $\triangle f(a,b)$ и $\triangle^2 f(a,b)$ естественно предположить, что:

$$\triangle^n f(a,\ b) = \triangle_{x^n}^n + C_n^1\triangle_{x^{n-1}y}^n + C_n^2\triangle_{x^{n-2}y^2}^n + \ldots\ldots \\ + C_n^m\triangle_{x^{n-m}y^m}^n + \ldots\ldots + C_n^{n-1}\triangle_{xy^{n-1}}^n + \triangle_{y^n}^n\ {}^{*})$$

*) Для краткости в правой части во всех членах опускаем f(a, b).

В том, что эта формула действительно справедлива при всяком n, можно убедиться путем перехода от n к $n+1$. Для этого допустим, что она справедлива для какого-либо значения n и примем во внимание, что, по определению

$$\triangle^{n+1} f = \triangle(\triangle^n f) = \triangle_x(\triangle^n f) + \triangle_y(\triangle^n f),$$

и, кроме того, как легко проверить:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle_x (Af + B\varphi + \ldots\ldots + K\omega) = A\triangle_x f + B\triangle_x \varphi + \ldots\ldots + K\triangle_x \omega \\ \triangle_y (Af + B\varphi + \ldots\ldots + K\omega) = A\triangle_y f + B\triangle_y \varphi + \ldots\ldots + K\triangle_y \omega \end{array}\right\},$$

где A, B.....K — постоянные числа, а f, φ,.....ω — функции от x и y. Тогда можем написать:

$$\triangle^n f = \triangle^n_{x^n} + C^1_n \triangle^n_{x^{n-1}y} + C^2_n \triangle^n_{x^{n-2}y^2} + \ldots\ldots + C^m_n \triangle^n_{x^{n-m}y^m} + \\ + \ldots\ldots + C^{n-1}_n \triangle^n_{xy^{n-1}} + \triangle^n_{y^n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \triangle^{n+1} f = \triangle^{n+1}_{x^{n+1}} + C^1_n \triangle^{n+1}_{x^n y} + C^2_n \triangle^{n+1}_{x^{n-1}y^2} + \ldots\ldots + C^m_n \triangle^{n+1}_{x^{n-m+1}y^m} + \\ + \ldots\ldots + \triangle^{n+1}_{xy^n} + \triangle^{n+1}_{x^n y} + C^1_n \triangle^{n+1}_{x^{n-1}y^2} + \ldots\ldots + C^{m-1}_n \triangle^{n+1}_{x^{n-m+1}y^m} + \\ \qquad + \ldots\ldots + C^{n-1}_n \triangle^{n+1}_{xy^n} + \triangle^{n+1}_{y^{n+1}} \end{array}\right\}$$

отсюда, замечая, что $C^m_n + C^{m-1}_n = C^m_{n+1}$, получаем формулу:

$$\triangle^{n+1} f = \triangle^{n+1}_{x^{n+1}} + C^1_{n+1} \triangle^{n+1}_{x^n y} + C^2_{n+1} \triangle^{n+1}_{x^{n-1}y^2} + \ldots\ldots + C^m_{n+1} \triangle^{n+1}_{x^{n+1-m}y^m} + \\ + \ldots\ldots + C^n_{n+1} \triangle^{n+1}_{xy^n} + \triangle^{n+1}_{y^{n+1}},$$

которая прямо может быть получена из допущенной нами формулы для $\triangle^n f$ путем замены n на $n+1$. Так как, кроме того, для $n=1$ и $n=2$ формулы составляются именно по указанному закону, то он верен при всяком n.

Формулы служащие для нахождения последовательных полных разностей, могут быть очень просто записаны в символическом виде, не требующем особых пояснений:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle\ f(a, b) = (\triangle_x + \triangle_y)^1 f(a, b) \\ \triangle^2 f(a, b) = (\triangle_x + \triangle_y)^2 f(a, b) \\ \triangle^3 f(a, b) = (\triangle_x + \triangle_y)^3 f(a, b) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \triangle^n f(a, b) = (\triangle_x + \triangle_y)^n f(a, b) \end{array}\right\}$$

Эти формулы представляют полную аналогию с известными формулами для нахождения полных дифференциалов высших порядков функции двух независимых переменных с помощью ее частных дифференциалов.

6. Кроме рассмотренных нами частных и полных конечных разностей различного порядка для функции $f(x, y)$, нам необходимо ввести еще одну разность

специального вида. Именно, мы предположим, что совместные значения переменных x и y представляются в виде следующих систем:

$$(a, b),\ (a+h,\ b+k),\ (a+2h,\ b+2k), \ldots . (a+nh,\ b+nk),$$

геометрически изображаемых диагональными точками параллелограмов (см. пунктирную линию предыдущего чертежа). Составим теперь разность

$$f(a+h,\ b+k) - f(a, b),$$

которую обозначим через $\delta f(a, b)$*), так что

$$\delta f(a, b) = f(a+h,\ b+k) - f(a, b), \text{ или короче; } \delta f_{0,0} = f_{1,1} - f_{0,0}$$

С помощью этой разности 1-го порядка станем составлять такие же разности высших порядков:

$$\delta^2 f(a, b) = \delta[\delta f(a, b)],\ \delta^3 f(a, b) = \delta[\delta^2 f(a, b)], \ldots ,$$
$$\delta^n f(a, b) = \delta[\delta^{n-1} f(a, b).$$

Мы займемся сейчас выводом формул, дающих выражение этих разностей с помощью значений функции $f(x, y)$, а также формул, служащих для решения обратной задачи — выражения значений функции с помощью последовательных разностей указанного вида. Здесь очень удобно пользоваться сокращенными обозначениями, а именно, мы можем написать последовательно:

$$\delta f_{0,0} = f_{1,1} - f_{0,0}$$
$$\delta^2 f_{0,0} = \delta(f_{1,1} - f_{0,0}) = (f_{2,2} - f_{1,1}) - (f_{1,1} - f_{0,0}) = f_{2,2} - 2f_{1,1} + f_{0,0}$$
$$\delta^3 f_{0,0} = \delta(f_{2,2} - 2f_{1,1} + f_{0,0}) = (f_{3,3} - 2f_{2,2} + f_{1,1}) - (f_{2,2} - 2f_{1,1} + f_{0,0}) =$$
$$= f_{3,3} - 3f_{2,2} + 3f_{1,1} - f_{0,0} \text{ и т. д.}$$

Получившийся закон составления этих формул совершенно ясен, и мы могли бы, аналогично разобранному методу составления полной разности n-го порядка, показать и здесь, по методу совершенной индукции, справедливость общей формулы:

$$\delta^n f_{0,0} = f_{n,n} - C_n^1 f_{n-1,\ n-1} + C_n^2 f_{n-2,\ n-2} - \ldots . + (-1)^m C_n^m f_{n-m,\ n-m} +$$
$$+ \ldots . + (-1)^n f_{0,0},$$

---

*) Эту разность Lacroix обозначает через $\triangle f(a, b)$ и называет полною разностью.

Данное нами понятие полной разности не совпадает с определением Lacroix. Мы предпочитаем введенную нами терминологию не только в виду формул, полученных в № 5, аналогичных формулам для полных дифференциалов, но также и в виду формулы, выражающей условие, необходимое и достаточное для того, чтобы выражение $M_1(x,y) + M_2(x,y)$ было полной конечной разностью $\triangle u\ (x,y)$ Это условие, как нетрудно было бы убедиться, состоит в том, что должно выполняться тождество: $\triangle_y M_i(x, y) = \triangle_x M_j(x, y)$ $(i = 1,\ j = 2$ или $j = 1,\ i = 2)$.

или в раскрытом виде:

$$\delta^n f(a, b) = f(a + nh, b + nk) - C_n^1 f[a + (n-1)h, b + (n-1)k] +$$
$$+ C_n^2 f[a + (n-2)h, b + (n-2)k] + \ldots\ldots +$$
$$+ (-1)^m C_n^m f[a + (n-m)h, b + (n-m)k] + \ldots\ldots + (-1)^n f(a, b)$$

Очень удобно пользоваться символическими формулами:

$$\delta^n f_{0,0} = (f_{1,1} - 1)^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots\ldots),$$

где *оба* значка 1 при символическом возвышении в степень подчиняются известному уже нам правилу.

Теперь решим обратную задачу, а именно, покажем, как найти

$$f(a + nh, b + nk)$$

с помощью разностей $\delta, \delta^2, \ldots\ldots \delta^n$

Из равенства

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \delta f(a, b)$$

имеем прежде всего:

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \delta f(a, b).$$

откуда следует, что

$$\delta f(a + h, b + k) = \delta f(a, b) + \delta^2 f(a, b).$$

После сложения этих равенств имеем:

$$f(a + h, b + k) + \delta f(a + h, b + k) = f(a, b) + 2\delta f(a, b) + \delta^2 f(a, b),$$

иначе говоря:

$$f(a + 2h, b + 2k) = f(a, b) + 2\delta f(a, b) + \delta^2 f(a, b),$$

потому что, очевидно,

$$f(a + 2h, b + 2k) = f(a + h, b + k) + \delta f(a + h, b + k).$$

Составив затем $\delta f(a + 2h, b + 2k)$ и сложив получившееся выражение с $f(a + 2h, b + 2k)$, пришли бы к формуле:

$$f(a + 3h, b + 3k) = f(a, b) + 3\delta f(a, b) + 3\delta^2 f(a, b) + \delta^3 f(a, b),$$

но уже и предыдущие результаты заставляют предположить, что

$$f(a + nh, b + nk) = f(a, b) + C_n^1 \delta f(a, b) +$$
$$+ C_n^2 \delta^2 f(a, b) + \ldots\ldots + C_n^m \delta^m f(a, b) + \ldots\ldots + \delta^n f(a, b);$$

в том, что эта формула действительно справедлива при всяком n, легко было бы убедиться по методу перехода от n к $n+1$ с помощью равенства

$$f[a+(n+1)h,\ b+(n+1)k] = f(a+nh,\ b+nk) + \delta f(a+nh,\ b+nk).$$

Полученные нами результаты мы также запишем символически в виде:

$$f(a+nh,\ b+nk) = (1+\delta)^n f(a,\ b)$$

или, короче:

$$f_{n,n} = (1+\delta)^n f_{0,0} \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots).$$

7. Решенная нами сейчас задача о выражении разностей $\delta^n f(a,\ b)$ с помощью значений функции и, наоборот, значений функции $f(a+nh,\ b+nk)$ с помощью последовательных разностей могла бы быть распространена и на более общий случай, когда требуется выразить частную разность $\triangle^n_{x^m y^{n-m}}$ $f(a,\ b)$ с помощью значений функции или, наоборот, выразить значение функции $f(a+mh,\ b+nk)$ с помощью ее последовательных частных разностей.

Решение первого из указанных вопросов, во-первых, мало имеет значения для всего дальнейшего и, во-вторых, приводит к формулам довольно сложного вида. Поэтому мы обратимся ко второму, очень важному для нас, вопросу о выражении значения функции $f_{m,n} = f(a+mh,\ b+nk)$ с помощью ее последовательных частных разностей. Мы имели выше решение этой задачи лишь для частного случая $m = n$, и притом с помощью разностей специального вида $\delta,\ \delta^2, \ldots \delta^n \ldots$

Из случаев, когда $m \neq n$, можно указать еще два, в которых требуемые формулы получаются немедленно на основании известных теорем, относящихся к функциям одного независимого переменного. Именно, когда $n = 0$, то $f_{m,0} = f(a+mh,\ b)$, когда же $m = 0$, то $f_{0,n} = f(a,\ b+nk)$; в обоих случаях к $f(a+mh,\ b)$ и $f(a,\ b+nk)$ могут быть применены известные уже нам формулы, касающиеся функций одного переменного, которые и дадут решение вопроса:

$$\left.\begin{aligned} f(a+mh,\ b) &= (1+\triangle_x)^m f(a,\ b) \\ f(a,\ b+nk) &= (1+\triangle_y)^n f(a,\ b) \end{aligned}\right\}, \text{ или } \left\{\begin{aligned} f_{m,0} &= (1+\triangle_x)^m f_{0,0} \\ f_{0,n} &= (1+\triangle_y)^n f_{0,0} \end{aligned}\right.$$

Чтобы подметить закон составления $f_{m,n}$ для общего случая, мы постараемся найти $f_{2,1}$ и $f_{1,2}$, для чего придется начать с $f_{1,1}$. Так как

$$\triangle^2_{xy} f_{0,0} = \triangle_x(\triangle_y f_{0,0}) = \triangle_y(\triangle_x f_{0,0}),$$

то

$$\triangle^2_{xy} f_{0,0} = \triangle_x(f_{0,1} - f_{0,0}) = \triangle_y(f_{1,0} - f_{0,0}),$$

или

$$\triangle^2_{xy} f_{0,0} = f_{1,1} - f_{1,0} - f_{0,1} + f_{0,0},$$

откуда

$$f_{1,1} = f_{1,0} + f_{0,1} - f_{0,0} + \triangle^2_{xy} f_{0,0}.$$

Так как, кроме того, по определению

$$f_{1,0} - f_{0,0} = \triangle_x f_{0,0}, \quad f_{0,1} - f_{0,0} = \triangle_y f_{0,0},$$

то

$$f_{1,0} = f_{0,0} + \triangle_x f_{0,0}, \quad f_{0,1} = f_{0,0} + \triangle_y f_{0,0}$$

Вставляя эти значения в выражение для $f_{1,1}$ получим, по упрощении:

$$f_{1,1} = f_{0,0} + \triangle_x f_{0,0} + \triangle_y f_{0,0} + \triangle_{xy}{}^2 f_{0,0},$$

или еще короче в символической форме:

$$f_{\cdot,1} = (1 + \triangle_y)\,(1 + \triangle_y) f_{0,0},$$

где, по умножении двучленов обыкновенным способом, нужно к каждому члену приставить $f_{0,0}$ и рассматривать полученное произведение, как частную разность; кроме того, произведение $\triangle_x \triangle_y$ рассматривается, как $\triangle^2_{xy}$.

Можно и еще скорее прийти к найденному выражению для $f_{1,0}$, если принять во внимание, что

$$f_{1,1} - f_{1,0} = \triangle_y f_{1,0} \text{ и } f_{1,1} - f_{0,1} = \triangle_x f_{0,1},$$

т.-е.

$$f_{1,1} = f_{1,0} + \triangle_y f_{1,0} = f_{0,1} + \triangle_x f_{0,1},$$

и на основании этого писать:

$$\left.\begin{aligned} f_{1,0} &= f_{0,0} + \triangle_x f_{0,0} \\ \triangle_y f_{1,0} &= \triangle_y f_{0,0} + \triangle^2_{xy} f_{0,0} \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left\{\begin{aligned} f_{0,1} &= f_{0,0} + \triangle_y f_{0,0} \\ \triangle_x f_{0,1} &= \triangle_x f_{0,0} + \triangle^2_{xy} f_{0,0} \end{aligned}\right.$$

В обоих случаях после сложения двух равенств получим

$$f_{1,1} = f_{0,0} + \triangle_x f_{0,0} + \triangle_y f_{0,0} + \triangle^2_{xy} f_{0,0},$$

как и было найдено ранее.

Последний, более короткий, способ мы применим к нахождению значений

$$f_{2,1} = f_{1,1} + \triangle_x f_{1,1} \quad \text{и} \quad f_{1,2} = f_{1,1} + \triangle_y f_{1,1}.$$

А именно, мы можем написать

$$\left.\begin{array}{rl} f_{1,1} = & f_{0,0} + \triangle_x f_{0,0} + \triangle_y f_{0,0} + \triangle^2_{xy} t_{0,0} \\ \triangle_x f_{1,1} = & \phantom{f_{0,0} +{}} \triangle_x f_{0,0} + \phantom{\triangle_y f_{0,0} +{}} \triangle^2_{xy} f_{0,0} + \triangle^2_{x^2} f_{0,0} + \triangle^3_{x^2y} f_{0,0} \\ \hline f_{2,1} = & f_{0,0} + 2\triangle_x f_{0,0} + \triangle_y f_{0,0} + 2\triangle^2_{xy} f_{0,0} + \triangle^2_{x^2} f_{0,0} + \triangle^3_{x^2y} f_{0,0} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rl} f_{1,1} = & f_{0,0} + \triangle_x f_{0,0} + \triangle_y f_{0,0} + \triangle^2_{xy} f_{0,0} \\ \triangle_y f_{1,1} = & \phantom{f_{0,0} + \triangle_x f_{0,0} +{}} \triangle_y j_{0,0} + \triangle^2_{xy} f_{0,0} + \triangle^2_{y^2} f_{0,0} + \triangle^3_{xy^2} f_{0,0} \\ \hline f_{1,2} = & f_{0,0} + \triangle_x f_{0,0} + 2\triangle_y f_{0,0} + 2\triangle^2_{xy} f_{0,0} + \triangle^2_{y^2} f_{0,0} + \triangle^3_{xy^2} f_{0,0} \end{array}\right\}.$$

Обе полученные довольно сложные формулы для $f_{2,1}$ и $f_{1,2}$ приобретают чрезвычайно простой вид, если им придать символическую форму:

$$\left.\begin{aligned} f_{2,1} &= (1+\triangle_x)^2 (1+\triangle_y) f_{0.0} \\ f_{1,2} &= (1+\triangle_x)(1+\triangle_y)_2 f_{0,0} \end{aligned}\right\}$$

В указанной сейчас форме закон настолько ясен, что позволяет нам сделать предположение, что вообще

$$f_{m,n} = (1+\triangle_x)^m (1+\triangle_y)^n f_{0,0},$$

Для доказательства того что эта формула справедлива, достаточно, очевидно убедиться в том, что, если она верна для каких-либо значений m и n, то она останется верна и при увеличении одного из этих чисел на 1. Мы проведем доказательство лишь для буквы m т.-е. проверим, что $f_{m+1,n}$ составится по тому же закону, что и $f_{m,n}$. Итак допустим, что

$$f_{m,n} = (1+\triangle_x)^m (1+\triangle_y)^n = \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=o}^{n} C_m^p C_n^q \triangle_{x^p y^q}^{p+q} = \sum_{q=}^{n} C_n^q \left\{ \sum_{p=o}^{m} C_m^p \triangle_{x^p y^q}^{p+q} \right\},$$

где для простоты $f_{0,0}$ не приписываем и, кроме того, принимаем, что

$$C_k^o = 1, \triangle_{x^o y^q}^{o+q} = \triangle_{y_q}^q, \triangle_{x^p q^o}^{p+o} = \triangle_{x^p}^p, \triangle_{x^o y^o}^{o+o} = 1, \triangle_{x^0}^0 = \triangle_{y^0}^0 = 1.$$

Тогда для нахождения

$$f_{m+1,n} = f_{m,n} + \triangle^x f_{m,n}$$

мы составим два равенства

$$f_{m,n} = \sum_{q=0}^{n} C_n^q \left\{ \triangle_{y^q}^q + C_m^1 \triangle_{xy^q}^{1+q} + C_m^2 \triangle_{x^2 y^q}^{2+q} + \ldots + C_m^{m-1} \triangle_{x^{m-1} y^q}^{m-1+q} + \triangle_{x^m y^q}^{m+q} \right\}$$

$$\triangle_x f_{m,n} = \sum_{q=0}^{n} C_n^q \left\{ \triangle_{xy^q}^{1+q} + C_m^1 \triangle_{x^2 y^q}^{2+q} + \ldots + C_m^{m-1} \triangle_{x^m y^q}^{m+q} + \triangle_{x^{m+1} y^q}^{m+1+q} \right\},$$

от сложения которых тотчас же находим:

$$f_{m+1,n} = \sum_{q=0}^{n} \left\{ \triangle_{y^q}^q + C_{m+1}^1 \triangle_{xy^q}^{1+q} + C_{m+1}^2 \triangle_{x^2 y^q}^{2+q} + \ldots + C_{m+1}^m \triangle_{x^m y^q}^{m+q} + \triangle_{x^{m+1} y^q}^{m+1+q} \right\} =$$

$$= \sum_{q=0}^{n} C_n^q \left\{ \sum_{p=0}^{m+1} C_{m+1}^p \triangle_{x^p y^q}^{p+q} \right\} = \sum_{p=0}^{m+1} \sum_{q=0}^{n} C_{m+1}^p C_n^q \triangle_{x^p y^q}^{p+q}.$$

А это и показывается ,что $f_{m+1,n}$ составляется по тому же закону, т.-е.

$$f_{m+1,n} = (1+\triangle_x)^{m+1} (1+\triangle_y)^n f_{0,0};$$

то же самое можно было бы доказать и для $f_{m,n+1}$. Итак, формула

$$f_{n,m} = (1+\triangle_x)^m (1+\triangle_y)^n f_{0,0},$$

справедлива при всяких m и n.

Мы видим отсюда, между прочим, что для нахождения $f_{m,n} = f(a + mh, b + nк)$ нам нужны частные разности до $(m+n)$-го порядка включительно, причем из разностей $(m+n)$ порядка в формулу $f_{m,n}$, войдет только $\triangle^{m+n}_{x^m y^n} f_{0,0}$.

8. Установив формулу для определения $f_{m,n}$ мы можем обнаружить интересную зависимость между разностями $\triangle_x$, $\triangle_y$, $\triangle^2_{xy}$ и разностью δ. Действительно, раньше мы уже имели формулу

$$f_{n,n} = (1 + \delta)^n f_{0,0}\,;$$

теперь же, полагая $m = n$ в только что найденной формуле для $f_{m,n}$, получим

$$f_{n,n} = (1 + \triangle_x)^n (1 + \triangle_y)^n f_{0,0}$$

Из сопоставления двух последних формул можно заключить, что

$$(1 + \delta)^n = (1 + \triangle_x)^n (1 + \triangle_y)^n$$

или:

$$1 + \delta = (1 + \triangle_x)(1 + \triangle_y) \text{ *)},$$

откуда получаем, по упрощении:

$$\delta = \triangle_x + \triangle_y + \triangle^2_{xy}$$

и

$$\delta f_{0,0} = \triangle_x f_{0,0} + \triangle_y f_{0,0} + \triangle^2_{xy} f_{0,0}. \tag{B}$$

Хотя при таком рассуждении мы все время поступали с символическими равенствами, как с обыкновенными, тем не менее, полученная сейчас зависимость действительно имеет место, в чем легко убедиться непосредственной проверкой:

$$\triangle_x f_{0,0} = f(a + h, b) - f(a, b) = f_{1,0} - f_{0,0}$$

$$\triangle_y f_{0,0} = f(a, b + k) - f(a, b) = f_{0,1} - f_{0,0}$$

$$\triangle^2_{xy} f_{0,0} = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) = f_{1,1} - f_{1,0} - f_{0,1} + f_{0,0}$$

$$\triangle_x f_{0,0} + \triangle_y f_{0,0} + \triangle^2_{xy} f_{0,0} = f(a + h, b + к) - f(a, b) = f_{1,1} - f_{0,0}\,;$$

но в то же время, по определению, существует равенство:

$$\delta f_{0,0} = f(a + h, b + k) - f(a, b) = f_{1,1} - f_{0,0},$$

откуда и видна справедливость полученной выше формулы (B).

9. Полученные нами результаты найдут себе применение в вопросе о составлении для функции $f(x, y)$ двух независимых переменных интерполяционной формулы, аналогичной формуле Ньютона для функции одного независимого переменного.

---

*) Отсюда вытекает также новая символическая формула для разности n-го порядка δ^n:

$$\delta^n = [(1 + \triangle x)(1 + \triangle y) - 1]^n.$$

Задача интерполирования, в случае функций одного переменного, состоит, как известно, в нахождении по данным значениям

$$f(a_1),\ f(a_2), \ldots\ldots f(a_n) \tag{C}$$

такого полинома $F(z)$, который при $z = a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ принимал бы те же самые значения (C). Затем при каком-либо $x \neq a_i$ $(i = 1, 2, \ldots\ldots n)$ приближенно полагают

$$f(x) = F(x),$$

т.-е. ординату $f(x)$ заменяют ординатой $F(x)$ параболы $(n-1)^{\text{го}}$ порядка $y = F(x)$ [Полином $F(z)$, определенный с помощью n данных, является полиномом $(n-1)^{\text{ой}}$ степени].

В частности, когда даются $(n+1)$ значений

$$f(a),\ f(a+h),\ f(a+2h), \ldots\ldots f[a+(n-1)h],\ f(a+nh),$$

мы получаем интерполяционный полином Ньютона $n^{\text{ой}}$ степени, о котором уже упоминали в самом начале (№ 2).

Мы дадим сейчас более короткую и удобную символическую запись этого полинома, которая особенно будет нам полезна для распространения на случай двух независимых переменных.

Именно, мы условимся для краткости в таком символическом обозначении:

$$(z-a)(z-a-h)\ldots\ldots[z-a-(k-1)h] = (z-a)^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots\ldots n).$$

Тогда известный нам интерполяционный полином Ньютона может быть написан в виде:

$$F(z) = f(a) + \frac{(z-a)^{(1)}}{h}\triangle f(a) + \frac{(z-a)^{(2)}}{2!\,h^2}\triangle^2 f(a) + \frac{(z-a)^{(3)}}{3!\,h^3}\triangle^3 f(a) + \ldots\ldots + \\ + \frac{(z-a)^{(n)}}{n!\,h^n}\triangle^n f(a).$$

Еще короче можно написать предыдущее равенство в такой символической форме:

$$F(z) = f(a) + \left(\frac{z-a}{h}\triangle\right)^{(1)} f(a) + \frac{1}{2!}\left(\frac{z-a}{h}\triangle\right)^{(2)} f(a) + \frac{1}{3!}\left(\frac{z-a}{h}\triangle\right)^{(3)} f(a) + \\ + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{z-a}{h}\triangle\right)^{(n)} f(a).$$

Если желаем сделать проверку, что при $z = a + mh$ $(m \leqslant n)$ действительно выполняется требование

$$F(a+mh) = f(a+mh),$$

то мы должны ввести еще новую символическую запись:

$$mh\,(m-1)h\ldots\ldots(m-k+1)h = (mh)^{(k)},$$

т.-е. $m(m-1)\ldots\ldots(m-k+1) = A_m^k = m^{(k)}$ $\qquad (k = 1, 2, \ldots\ldots n)$,

при чем, очевидно, будем иметь

$$m^{(m)} = m! \text{ и } m^{(k)} = 0 \text{ при } k \geqq m + 1.$$

При этих условиях легко получаем при $z = a + mh$:

$$F(a + mh) = f(a) + (m\triangle)^{(1)} f(a) + \frac{1}{2!}(m\triangle)^{(2)} f(a) + \ldots\ldots + \frac{1}{m!}(m\triangle)^{(m)} f(a) +$$
$$+ \frac{1}{(m+1)!}(m\triangle)^{(m+1)} f(a) + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}(m\triangle)^{(n)} f(a).$$

Все члены во второй строке, в силу замеченного выше, обратятся в нуль и мы получим:

$$F(a + mh) = f(a) + m\triangle f(a) + \frac{m(m-1)}{2!}\triangle^2 f(a) + \ldots\ldots + \triangle^m f(a) = f(a + mh).$$

Теперь обратимся к вопросу об интерполировании для случая функции $f(x, y)$ двух независимых переменных, т.-е. станем искать приближенное значение такой функции с помощью целой рациональной функции, или многочлена $F(u, v)$. Для этого, прежде всего, заметим связь между числом коэффициентов многочлена $F(u, v)$ и его степенью относительно u и v. Обозначая это число коэффициентов через N, а степень многочлена — символом (F), имеем следующие зависимости:

$$\left.\begin{array}{ll} (F) = 1; & N = 1 + 2 \\ (F) = 2; & N = 1 + 2 + 3 \\ (F) = 3; & N = 1 + 2 + 3 + 4 \\ (F) = n; & N = 1 + 2 + \ldots\ldots + (n + 1) \end{array}\right\}$$

Поэтому, для возможности определения интерполяционного многочлена $F(u, v)$ нужно для рассматриваемой функции $f(x, y)$ задавать 3, или 6, или 10, или 15, ... или $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ значений. При этих условиях особенно удобно рассматривать интерполирование через равные промежутки, т.-е. когда u и v принимают значения:

$$a,\ a + h,\ a + 2h, \ldots\ldots;\ b,\ b + k,\ b + 2k, \ldots\ldots$$

Тогда для получения интерполяционного многочлена 1ой, 2ой, 3ей и т. д. степеней нужно задавать следующие значения функции $f(x, y)$:

$(F) = 1,\ N = 3;\ f_{0,0};\ f_{1,0};\ f_{0,1}\quad (1 + 2)$

$(F) = 2,\ N = 6;\ f_{0,0};\ f_{1,0};\ f_{0,1};\ f_{2,0};\ f_{1,1};\ f_{0,2}\quad (1 + 2 + 3)$

$(F) = 3,\ N = 10;\ f_{0,0};\ f_{1,0};\ f_{0,1};\ f_{2,0};\ f_{1,1};\ f_{0,2};\ f_{3,0};\ f_{2,1};\ f_{1,2};\ f_{0,3}$

$(1 + 2 + 3 + 4)$ и т. д.;

при, этом для получения многочлена $F(u, v)$ более высокой степени, нужно, не изменяя прежних данных, присоединить к ним ряд новых. В общем случае, когда функция $F(u, v)$ должна быть $n^{\text{ой}}$ степени, нужно, как мы указали, дать $N = 1 + 2 = 3 + \ldots + (n+1)$ значений функции $f(x, y)$. Мы их напишем более подробно в следующем виде:

$$f(a, b) \tag{1}$$

$$f(a+h, b);\; f(a, b+k) \tag{2}$$

$$f(a+2h, b),\; f(a+h, b+k);\; f(a, b+2k) \tag{3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(a+nh, b),\; f[a+(n-1)h, b+k], \ldots\ldots f[a+h, b+(n-1)k],\; f(a, b+nk) \tag{n+1}$$

Здесь номера, поставленные нами в конце каждой строчки, в то же время совпадают с числом данных, содержащихся в этой строчке.

Присмотревшись внимательно к сокращенной символической записи интерполяционного полинома Ньютона для функции одного независимого переменного, мы очень легко прийдем к мысли, что для случая двух независимых переменных искомый многочлен $n^{\text{ой}}$ степени $f(u, v)$ будет иметь вид:

$$F(u, v) = f(a, b) + \left(\frac{u-a}{h}\Delta_x + \frac{v-b}{k}\Delta_y\right)^{(1)} f(a, b) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{u-a}{h}\Delta_x + \frac{v-b}{k}\Delta_y\right)^{(2)} f(a, b) + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{u-a}{h}\Delta_x + \frac{v-b}{k}\Delta_y\right)^{(n)} f(a, b),$$

где при раскрытии символических обозначений нужно полагать

$$(u-a)^{(\mu)} = (u-a)\,(u-a-h)\ldots\ldots[u-a(\mu-1)h],$$

$$(v-b)^{(\nu)} = (v-b)\,(v-b-k)\ldots\ldots[v-b-(\nu-1)k].$$

В более подробном виде наш интерполяционный многочлен напишется так:

$$F(u, v) = f(a, b) + \left(\frac{u-a}{h}\Delta_x + \frac{v-b}{k}\Delta_y\right) f(a, b) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{(u-a)\,(u-a-h)}{h^2}\Delta^2_{x^2} + 2\,\frac{(u-a)\,(v-b)}{hk}\Delta^2_{xy} +\right.$$

$$\left. + \frac{(v-b)\,(v-b-k)}{k^2}\Delta^2_{y^2}\right] f(a, b) + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left\{\frac{(u-a)\ldots\ldots[u-a-(n-1)h]}{h^n}\Delta^n_{x^n} +\right.$$

$$+ C^1_n\,\frac{(u-a)\ldots\ldots[u-a-(n-2)h]\,(v-b)}{h^{n-1}k}\Delta^n_{x^{n-1}y} + \ldots\ldots +$$

$$+C_n^1\frac{(u-a)(v-b)\ldots..[v-b-(n-2)k]}{hk^{n-1}}\triangle^n_{xy^{n-1}}+$$

$$+\frac{(v-b)[v-b-(n-1)k]}{k^n}\triangle^n_{yn}\Big\}f(a,\ b).$$

Нам остается только проверить, что написанный таким образом многочлен $F(u,\ v)$ удовлетворяет $1+2+3\ldots..+(n+1)=\frac{(n+2)\ (n+1)}{2}$ условиям:

$$F(a+\mu h,\ b+\nu k)=f(a+\mu h,\ b+\nu k),$$

где не только $o\leqslant\mu\leqslant n$, $o\leqslant\nu\leqslant n$, но еще и $o\leqslant\mu+\nu\leqslant n$, как прямо видно из таблицы данных значений функции $f(x,y)$; то же можно было бы видеть и из чертежа, на котором были бы изображены точки:

$(a,\ b)$; $(a+h,\ b)$, $(a,\ b+k)$; $(a+2h,\ b)$, $(a+h,\ b+k)$, $(a,\ b+2k)$;.... $(a+nh,\ b)$, $[a+(n-1)h,\ b+k]$,..... $[a+h,\ b+(n-1)k]$, $(a,\ b+nk)$.

Для проверки указанных равенств мы станем пользоваться упрощенной символической формой интерполяционного многочлена. Мы должны, следовательно, показать, что при:

$$u=a+\mu h,\ \ u=b+\nu k\left(\text{или}\ \frac{u-a}{h}=\mu,\frac{v-b}{x}=\nu\right),$$

$$\text{где}\ \ 0\leqslant\mu\leqslant n,\ 0\leqslant\nu\leqslant n,\ 0\leqslant\mu+\nu\leqslant n$$

этот многочлен приведется к

$$f(a+\mu h,\ b+\nu k)=f_{\mu,\nu}=(1+\triangle_x)^\mu(1+\triangle_y)^\nu f_{0,0}$$

т.-е. к сумме вида

$$\sum_{p=0}^{\mu}\sum_{q=0}^{\nu}C^p_\mu C^q_\nu\triangle^{p+q}_{x^p y^q}f^{0,0}\tag{D}$$

При этих значениях u и v интерполяционный многочлен примет вид

$$f(a,\ b)+(\mu\triangle_x+\nu\triangle_y)^{(1)}f(a,\ b)+\frac{1}{2!}(\mu\triangle_x+\nu\triangle_y)^{(2)}f(a,\ b)+\ldots..+$$

$$+\frac{1}{(\mu+\nu)!}(\mu\triangle_x+\nu\triangle_y)^{(\mu+\nu)}f(a,\ b),\tag{E}$$

так как все последующие биномы со степенями $(\mu+\nu+1)$, ... (n) обратятся в нули, потому что их отдельные члены содержат произведения $\mu^{(\alpha)}\nu^{(\beta)}$, где $\alpha+\beta\geqslant\mu+\nu+1$, так что либо $\alpha\leqslant\mu$, но $\beta\geqslant\nu+1$, либо $\alpha>\mu$ (т.-е $\alpha\geqslant\mu+1$): в обоих случаях $\mu^{(\alpha)}\nu^{(\beta)}=0$, так как один из множителей этого произведения обращается в нуль. Далее, замечая, что $\frac{\mu^{(p)}}{p!}=\frac{A^p_\mu}{p!}=C^p_\mu$, мы можем общий член в (E) представить в таком виде:

$$\frac{1}{\lambda!}(\mu\triangle_x+\nu\triangle_y)^{(\lambda)}f(a,\ b)=\frac{1.}{\lambda!}\Big\{\mu^{(\lambda)}\triangle^\lambda_{x\lambda}+\frac{\lambda}{1}\mu^{(\lambda-1)}\nu^{(1)}\triangle^{\lambda-1}_{x\lambda-1}\triangle_y+$$

$$+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}\mu^{(\lambda-2)}\nu^{(2)}\Delta^{\lambda-2}_{x^{\lambda-2}}\Delta^{2}_{y^2}+\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!}\mu^{(\lambda-3)}\nu^{(3)}\Delta^{\lambda-3}_{x^{\lambda-3}}\Delta^{3}_{y^3}+$$

$$+\ldots\ldots+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots\ldots(\lambda-p+1)}{p!}\mu^{(\lambda-p)}\nu^{(p)}\Delta^{\lambda-1}_{x^{\lambda-p}}\Delta^{p}_{y^p}+\ldots\ldots+$$

$$\left.{}^{(\lambda)}\Delta^{\lambda}_{y^\lambda}\right\}f(a,\,b)=\Big[C^{\lambda}_{\mu}\Delta^{\lambda}_{x^\lambda}+C^{\lambda-1}_{\mu}C^{1}_{\nu}\Delta^{\lambda}_{x^{\lambda-1}y}+C^{\lambda-2}_{\mu}C^{2}_{\nu}\Delta^{\lambda}_{x^{\lambda-2}y^2}+\ldots\ldots+$$

$$+C^{\lambda-p}_{\mu}C^{p}_{\nu}\Delta^{\lambda}_{x^{\lambda-p}y^p}+\ldots\ldots+C^{\lambda}_{\nu}\Delta^{\lambda}_{y^\lambda}\Big]f(a,\,b).$$

Здесь мы считали $\lambda<\mu+\nu$; если же $\lambda=\mu+\nu$, то последний член в (E) обратится, очевидно, в

$$C^{\mu}_{\mu}C^{\nu}_{\nu}\Delta^{\mu+\nu}_{x^\mu y^\nu}=\Delta^{\mu+\nu}_{x^\mu y^\nu},$$

ибо все другие члены суммы сведутся, к нулю: в $C^{p}_{\mu}C^{q}_{\nu}\Delta^{\mu+\nu}_{x^p y^q}$, где $p+q=\mu+\nu$ мы будем иметь либо $p<\mu$, но $q>\nu$, — тогда $C^{q}_{\nu}=0$, либо $p>\mu$, — тогда $C^{p}_{\mu}=0$.

Итак, сумма (E) составлена из членов вида $C^{p}_{\mu}C^{q}_{\nu}\Delta^{p+q}_{x^p y^q}$, где $p+q\leqq\mu+\nu$ соединенных по группам, в каждой из которых

$$p+q=\text{const}=\lambda\ \ (\lambda=1,\,2,\ldots\ldots\mu+\nu);$$

очевидно, эта сумма вполне тождественна с суммой (D), порядок членов которой не указан.

Мы видим таким образом, что, действительно, составленный нами интерполяционный многочлен $F(u,\,v)$ при $u=a+\mu h$, $v=b+\nu k$ принимает теже самые значения, что и рассматриваемая функция $f(u,v)$. Поэтому его можно рассматривать, как обобщение интерполяционного полинома Ньютона на случай функции двух независимых переменных.

И подобно тому, как интерполирование с помощью формулы Ньютона состоит в том, что для значения x, не совпадающего с данными значениями a, $a+h\ldots\ldots a+nh$, пишется приближенное равенство

$$f(x)=F(x),$$

так и в случае двух независимых переменных мы могли бы для значений $x\neq a+\mu h$; $y\neq b+\nu k$ писать приближенное равенство (интерполяционную формулу):

$$f(x,\,y)=F(x,\,y),$$

где F есть составленный выше интерполяционный многочлен $n^{\text{ой}}$ степени.

11. Мы обратимся теперь к вопросу о неопределенных и определенных конечных суммах (интегралах) для функций двух независимых переменных где, как и в случае функций одного независимого переменного, найдут себе применение изученные уже нами конечные разности.

Прежде всего считаем нелишним напомнить, что для функций одного переменного неопределенная конечная сумма вводится следующим образом: если $\triangle F(x) = f(x)$, то $F(x) = \sum f(x)$. Если бы оказалось также, что и $\Phi(x) = \sum f(x)$, то, как известно, обе конечные суммы отличаются на произвольную периодическую функцию $\pi(x)$ с периодом h, т.-е. мы имеем:

$$\Phi(x) = F(x) + \pi(x), \quad \text{где } \pi(x+h) = \pi(x).$$

Поэтому общий вид неопределенной конечной суммы будет:

$$\sum f(x) = F(x) + \pi(x),$$

где $F(x)$ — одно из ее значений. Формула эта аналогична основной формуле интегрального исчисления:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — одно из значений неопределенного интеграла.

Некоторую аналогию с формулами интегрального исчисления

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a) = [F(z)]_a^x, \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

можно усмотреть в получении определенной конечной суммы. А именно, если $F(x)$ и $\Phi(x)$ любые две неопределенные конечные суммы для одной и той же функции $f(x)$, то, как известно,

$$F(a+mh) - F(a+nh) = \Phi(a+mh) - \Phi(a+nh),$$

или, короче:

$$[F(x)]_{a+nh}^{a+mh} = [\Phi(x)]_{a+nh}^{a+mh},$$

и обе эти разности представляют конечную определенную сумму, а именно:

$$F(a+mh) - F(a+nh) = \sum_{a+nh}^{a+mh} f(x),$$

причем эта последняя сумма имеет вид:

$$\sum_{a+nh}^{a+mh} f(x) = f(a+nh) + f[a+(n+1)h] + \ldots\ldots + f[a+(m-1)h].$$

[Последнее равенство обычно выводится как следствие из таких соотношений:

1. $$\sum_{a+nh}^{a+(n+1)h} f(x) = F[a+(n+1)h] - F(a+nh) = \triangle F(a+nh) = f(a+nh),$$

2. $$\sum_{a+nh}^{a+mh} f(x) = \sum_{a+nh}^{a+kh} f(x) + \sum_{a+kh}^{a+mh} f(x)\,^{*}),$$ в частности

3. $$\sum_{a+nh}^{a+mh} = \sum_{a+nh}^{a+(n+1)h} + \sum_{a+(n+1)h}^{a+(n+2)h} + \ldots\ldots + \sum_{a+(m-1)h}^{a+mh} \Bigg].$$

12. Желая теперь провести аналогичные рассуждения и построения для функций двух независимых переменных, мы должны будем прийти к конечным неопределенным и определенным **двойным** суммам, а потому необходимо предварительно остановиться на неопределенных и определенных двойных интегралах.

Условимся определять двойной неопределенный интеграл следующим образом:

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = F(x, y), \quad \text{если} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

или — что все равно — $d^2{}_{xy}\, F(x, y) = f(x, y)\, dx\, dy$.

Мы видим, что двойной неопределенный интеграл есть такая функция, второй частный дифференциал которой, взятый по x и по y, равен подынтегральному дифференциалу.

Если $F(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ суть два каких-либо значения двойного интеграла $\iint (x, y)\, dx\, dy$, то между ними легко установить следующую зависимость:

$$\Phi(x, y) = F(x, y) + \varphi_1(x) + \varphi_2(y),$$

где φ_1 и φ_2 — совершенно произвольные функции своих аргументов. Действительно, мы прежде всего имеем:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

откуда сейчас же следует, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \Pi(x),$$

де $\Pi(x)$ — произвольная функция. Огсюда далее выводим:

$$\Phi(x, y) = F(x, y) + \int \Pi(x)\, dx + \varphi_2(y) = F(x, y) + \varphi_1(x) + \varphi_2(y),$$

где $\varphi_2(y)$ и $\varphi_1(x)$ (как интеграл от произвольной функции) суть две произвольные функции.

Станем теперь под символом $\int_a^x \int_c^y f(x, y)\, dx dy$ понимать такой двойной

---

*) Свойство это аналогично известному свойству определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

интеграл, который обращался бы в нуль $x=a$ или при $y=c$, а, следовательно, и тогда, когда одновременно $x=a$, $y=c$. Тогда основное соотношение

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = F(x, y) + \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$$

дает нам три новых равенства:

$$\left.\begin{array}{l} F(a, y) + \varphi_1(a) + \varphi_2(y) = 0 \\ F(x, c) + \varphi_1(x) + \varphi_2(c) = 0 \\ F(a, c) + \varphi_1(a) + \varphi_2(c) = 0 \end{array}\right\},$$

откуда нетрудно заключить, что

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(y) = -F(a, y) - F(x, c) + F(a, c),$$

и, следовательно:

$$\int_a^x \int_c^y f(x, y)\, dx\, dy = F(x, y) - F(a, y) - F(x, c) + F(a, c).$$

Условимся для краткости полагать:

$$F(x, y) - F(a, y) - F(x, c) + F(a, c) = [F(u, v)]_{a,c}^{x,y};$$

тогда мы сможем полученный выше результат написать в виде:

$$\int_a^x\int_c^y f(x, y)\, dx\, dy = [F(u, v)]_{a,c}^{x,y}.$$

В частности, может случиться, что мы полагаем $x=b$, $y=d$; тогда получим формулу для вычисления двойного определенного интеграла с постоянными пределами:

$$\int_a^b\int_c^d f(x, y)\, dx\, dy = [F(x, y)]_{a,c}^{b,d}:$$

При этом, не нужно забывать, что в этой формуле, как и в предыдущей $F(x, y)$ означает любой из двойных неопределенных интегралов, т.-е. любую функцию, для которой тождественно $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y)$, потому что

$$[\varphi_1(x) + \varphi_2(y)]_{a,\ c}^{b,\ d} =$$

$$= \varphi_1(b) + \varphi_2(d) - \varphi_1(a) - \varphi_2(d) - \varphi_1(b) - \varphi_2(c) + \varphi_1(a) + \varphi_2(c) \equiv 0.$$

13. Применение формулы

$$\int_a^b\int_c^d f(x, y)\, dx\, dy = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

позволяет иногда очень быстро вычислять двойной определенный интеграл, когда легко находится соответствующий неопределенный интеграл, как, например:

1°.
$$\int_a^b\int_c^d e^{xy}(xy+1)\,dxdy = \left[e^{xy}\right]_{a,c}^{b,d} = e^{bd} - e^{ad} - e^{bc} + e^{ac}.$$

2°.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\,dx\,dy = \Big[-\sin(x+y)\Big]_{0,0}^{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} =$$
$$= -\sin\pi + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 2.$$

Иногда нахождение двойного неопределенного интеграла может быть удобно выполнено с помощью **формулы интегрирования по частям**. Для вывода ее заметим, что, если u и v суть некоторые функции от x и y, то,

$$d_x(uv) = (u'_x v + uv'_x)\,dx = vd_xu + ud_xv,$$
$$d^2_{xy}(uv) = (u''_{xy}v + u'_x v'_y + u'_y v'_x + uv''_{xy})\,dx\,dy = vd^2_{xy}u +$$
$$+ d_xud_yv + d_yud_xv + ud^2_{xy}v.$$

Отсюда и получается формула интегрирования по частям в виде:

$$\iint ud^2_{xy}v = uv - \iint vd^2_{xy}u - \iint d_xud_yv - \iint d_y\,ud_x\,v;$$

она особенно упрощается, если u есть функция только одного из двух переменных x и y, именно, тогда:

$$\iint ud^2_{xy}v = uv - \iint d_xud_yv \qquad [u = u(x)]$$
$$\iint ud^2_{xy}v = uv - \iint d_yud_xv \qquad [u = u(y)]$$

Так, например:

$$\iint x^2\sin(x+y)\,dx\,dy = -x^2\sin(x+y) + 2\iint x\cos(x+y)\,dx\,dy =$$
$$= -x^2\sin(x+y) - 2x\cos(x+y) - 2\iint \sin(x+y)\,dx\,dy =$$
$$= (2-x^2)\sin(x+y) - 2x\cos(x+y).$$

Едва ли нужно прибавлять, что этот интеграл можно было бы найти без формулы интегрирования по частям, раскрыв предварительно $\sin(x+y)$, но такой способ оказался бы значительно сложнее.

14. Теперь мы можем установить понятие о двойных конечных суммах неопределенных и определенных. Если функции $f(x, y)$ и $F(x, y)$ связаны зависимостью

$$\triangle^2_{xy} F(x, y) = f(x, y),$$

то мы, по аналогии со случаем функций одного независимого переменного, будем писать:

$$F(x, y) = \sum\sum f(x, y)$$

и называть $F(x, y)$ двойной непределенной конечной суммой (или интегралом) по отношению к функции $f(x, y)$; знак **двойного** суммирования найдет себе оправдание, как будет дальше выяснено.

Если бы, кроме функции $F(x, y)$, нашлась еще другая функция $\Phi(x, y)$, удовлетворяющая тому же самому условию

$$\Delta^2_{xy} \Phi(x, y) = f(x, y), \text{ т.-е. } \Phi(x, y) = \sum\sum f(x, y),$$

то, как мы сейчас покажем, такие две неопределенные двойные суммы будут связаны друг с другом зависимостью следующего вида:

$$\Phi(x, y) = F(x, y) + \pi'_{(x)}(x, y) + \pi''_{(y)}(x, y),$$

где π' и π'' — две произвольные периодические функции, первая — относительно x с периодом h, а вторая — относительно y с периодом κ, т.-е.

$$\pi'_{(x)}(x + h, y) = \pi'_{(x)}(x, y), \ \pi''_{(y)}(x, y + \kappa) = \pi''_{(y)}(x, y);$$

мы ставим у этих функций внизу значки (x) и (y) для напоминания о том по какому именно переменному они периодичны.

Чтобы вывести указанную нами зависимость, заметим прежде всего, что

$$\triangle^2_{xy} \Phi(x, y) = \triangle^2_{xy} F(x, y) = f(x, y),$$

следовательно, если обозначить $\Phi - F = \varphi$, то будем иметь:

$$\triangle^2_{xy}(\Phi - F) = \triangle^2_{xy}\varphi(x, y) = 0 \text{ или } \triangle_x[\triangle_y \varphi(x, y)] = 0,$$

откуда заключаем, что

$$\triangle_y \varphi(x, y) = \Pi_{(x)}(x, y), \text{ где } \Pi_{(x)}(x + h, y) = \Pi_{(x)}(x, y).$$

Отсюда, производя неопределенное суммирование по букве y, очевидно получим:

$$\varphi(x, y) = \sum_{(y)} \Pi_{(x)}(x, y) + \pi''_{(y)}(x, y), \text{ где } \pi''_{(y)}(x, y + \kappa) = \pi''_{(y)}(x, y);$$

а так как первое слагаемое, т.-е. $\sum\limits_{(y)} \Pi_{(x)}(x, y)$ останется периодической функцией относительно переменного x с периодом h, то, обозначая эту периодическую функцию через $\pi_{(x)}(x, y)$, мы и получим

$$\Phi(x, y) - F(x, y) = \varphi(x, y) = \pi'_{(x)}(x, y) + \pi''_{(y)}(x, y), \text{ или}$$
$$\Phi(x, y) = F(x, y) + \pi'_{(x)}(x, y) + \pi''_{(y)}(x, y).$$

Установив это основно соотношение, нетрудно показать затем, что

$$[F(x,y)]_{a+\mu h,\ b+\nu k}^{a+mh,\ b+nk} = [\Phi(x,\ y)]_{a+\mu h,\ b+\nu k}^{a+mh,\ b+nk}, \tag{F}$$

где указанные знаки подстановки имеют тот же смысл, что и для двойных определенных интегралов. Для этого, очевидно, достаточно убедиться в том, что применение тех же подстановок к функции $\pi'_{(x)} + \pi''_{(y)}$ даст в результате нуль. И, действительно, благодаря известной уже нам периодичности этих функций мы будем иметь при любых x и y:

$$\pi'_{(x)}(a+mh,y) = \pi'_{(x)}(a+\mu h,y),\quad \pi''_{(y)}(x,b+n\kappa) = \pi''_{(y)}(x,b+\nu\kappa),$$

а потому можем написать:

$$[\pi'_{(x)}(x,y) + \pi''_{(y)}(x,y)]_{a+\mu h,\ b+\nu k}^{a+mh,\ b+nk} = \pi'_{(x)}(a+mh,b+nk) +$$
$$+ \pi''_{(y)}(a+mh,b+nk) - \pi'_{(x)}(a+\mu h\ b+nk) - \pi''_{(y)}(a+\mu h,b+nk) -$$
$$- \pi'_{(x)}(a+mh,b+\nu k) - \pi''_{(y)}(a+mh,b+\nu k) + \pi'_{(x)}(a+\mu h,b+\nu k) +$$
$$+ \pi''_{(y)}(a+\mu h,b+\nu k) \equiv 0.$$

Итак, действительно, подтверждается справедливость равенства (F), которое в подробном виде, но с применением знакомых нам сокращенных обозначений, может быть написано так:

$$F_{m,n} - F_{\mu,n} - F_{m,\nu} + F_{\mu,\nu} = \Phi_{m,n} - \Phi_{\mu,n} - \Phi_{m,\nu} + \Phi_{\mu,\nu}.$$

Полученное таким образом выражение мы назовем двойной определенной конечной суммой (или интегралом) от функции $f(x,y)$ в пределах $(a+\mu h, a+mh)$ для x и в пределах $(b+\nu k, b+nk)$ для y, и введем такое обозначение:

$$[F(x,y)]_{a+\mu h,\ b+\nu k}^{a+mh,\ b+nk} = F_{m,n} - F_{\mu,n} - F_{m,\nu} + F_{\mu,\nu} = \sum_{a+\mu h}^{a+mh}\ \sum_{b+\nu k}^{b+nk} f(x,y),$$

где первый слева знак суммы относится к переменному x, а второй — к y.

Вместе с тем мы докажем, что имеет место равенство:

$$\sum_{a+\mu h}^{a+mh}\ \sum_{b+\nu k}^{b+nk} f(x,\ y) = \sum_{a+\mu h}^{a+mh} \left\{ \sum_{b+\nu k}^{b+nk} f(x,\ y) \right\} =$$
$$= \sum_{a+\mu h}^{a+mh} \left\{ f_{x,\nu} + f_{x,\nu+1} + \ldots\ldots + f_{x,\,n-1} \right\} =$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} \quad f_{\mu,\nu} + f_{\mu,\nu+1} + \ldots\ldots + f_{\mu,n-1} + \\ + f_{\mu+1,\nu} + f_{\mu+1,\nu+1} + \ldots\ldots + f_{\mu+1,\,n-1} + \\ + \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ + \\ + f_{m-1,\nu} + f_{m-1,\nu+1} + \ldots\ldots + f_{m-1,\,n-1}, \end{array} \right.$$

т. е. что мы здесь имеем действительно *двойную* сумму. Применим для этого рассуждения, являющиеся обобщением тех, которые прилагаются к функциям одного независимого переменного, и схему которых мы приводили выше (№ 11).

1°. Во-первых, равенство,

$$F_{m,n} - F_{\mu,n} - F_{m,\nu} + F_{\mu,\nu} = \sum_{a+\mu h}^{a+mh} \sum_{b+\nu k}^{b+nk} f(x,\ y)$$

при $m = \mu + 1$ и $n = \nu + 1$ принимает следующий вид:

$$F[a + (\mu + 1) h,\ b + (\nu + 1) k] - F[a + \mu h,\ b + (\nu + 1) k] -$$

$$- F[a + (\mu + 1) h,\ b + \nu k] + F(a + \mu h,\ b + \nu k) = \sum_{a+\mu h}^{a+(\mu+1)\,h} \sum_{b+\nu k}^{b+(\nu+1)\,k} f(x,\ y).$$

Но левая часть полученного равенства, очевидно, выражает собою $\Delta^2_{xy} F(a + \mu h, b + \nu k)$, иначе говоря, равна $f(a + \mu h, b + \nu k)$ — на основании зависимости между функциями $F(x, y)$ и $f(x, y)$. Таким образом, имеем основное соотношение:

$$\sum_{a+\mu h}^{a+(\mu+1)} \sum_{b+\nu k}^{b+(\nu+1)k} f(x,y) = \Delta^2_{xy} F(a + \mu h,\ b + \nu k) = f(a + \mu h,\ b + \nu k).$$

2°. Во-вторых, по аналогии с легко доказываемым свойством двойного определенного интеграла (см. рис. 2)

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta = \int_a^A \int_b^B + \int_a^A \int_B^\beta + \int_A^\alpha \int_b^B + \int_A^\alpha \int_B^\beta$$

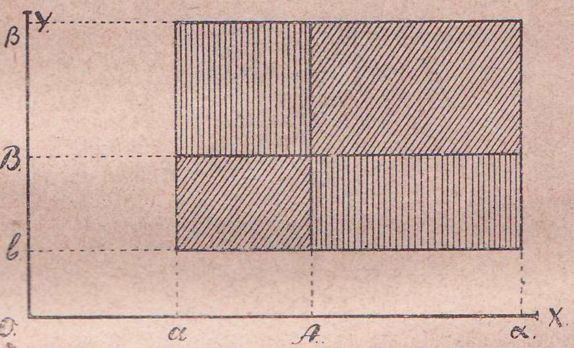

Рис. 2

можно обнаружить такое же свойство двойных определенных сумм:

$$\sum_{\mu h}^{mh} \sum_{\nu k}^{nk} = \sum_{\mu h}^{Mh} \sum_{\nu k}^{Nk} + \sum_{\mu h}^{Mh} \sum_{Nk}^{nk} + \sum_{Mh}^{mh} \sum_{\nu k}^{Nk} + \sum_{Mh}^{mh} \sum_{Nk}^{nk} \tag{G}$$

(для краткости вместо $a + \mu h$, $b + \nu k$ и т. д. написано просто μh, νk и т. д.). Чтобы в этом убедиться, достаточно заменить все двойные определенные суммы их выражениями с помощью неопределенной суммы, т.-е. функции $F(x, y)$:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{\mu h}^{Mh} \sum_{\nu k}^{Nk} &= F_{M,N} - F_{\mu,N} - F_{M,\nu} + \underline{F_{\mu,\nu}} \\
\sum_{\mu h}^{Mh} \sum_{Nk}^{nk} &= F_{M,n} - \underline{F_{\mu,n}} - F_{M,N} + F_{\mu,N} \\
\sum_{Mh}^{mh} \sum_{\nu k}^{Nk} &= F_{m,n} - F_{M,N} - \underline{F_{m,\nu}} + F_{M,\nu} \\
\sum_{Mh}^{mh} \sum_{Nk}^{nk} &= \underline{F_{m,n}} - F_{M,n} - F_{m,N} - F_{M,N}
\end{aligned}\right\};$$

от сложения правых частей у нас получатся лишь четыре подчеркнутых члена:

$$F_{m,n} - F_{\mu,n} - F_{m,\nu} + F_{\mu,\nu} = \sum_{\mu h}^{mh} \sum_{\nu k}^{nk},$$ что и доказывает формулу (G)

В частности, могло бы оказаться, что $N = n$ или $M = m$; тогда получились бы более простые формулы:

$$\sum_{\mu h}^{mh} \sum_{\nu k}^{nk} = \sum_{\mu h}^{Mh} \sum_{\nu k}^{nk} + \sum_{Mh}^{mh} \sum_{\nu k}^{nk}, \quad \sum_{\mu h}^{mh} \sum_{\nu k}^{nk} = \sum_{\mu h}^{mh} \sum_{\nu k}^{Nk} + \sum_{\mu h}^{mh} \sum_{Nk}^{nk}.$$

3°. Наконец, в-третьих, пользуясь всеми только что доказанными положениями и вводя для сумм еще более сокращенные обозначения: $\sum_{\mu}^{m} \sum_{\nu}^{n}$ и т. п., мы можем написать:

$$\sum_{a+\mu h}^{a+mh} \sum_{b+\nu k}^{b+nk} = \sum_{\mu}^{m} \sum_{\nu}^{n} = \sum_{\mu}^{m} \sum_{\nu}^{\nu+1} + \sum_{\mu}^{m} \sum_{\nu+1}^{\nu+2} + \cdots + \sum_{\mu}^{m} \sum_{n-1}^{n} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\mu}^{\mu+1} \sum_{\nu}^{\nu+1} + \sum_{\mu+1}^{\mu+2} \sum_{\nu}^{\nu+1} + \cdots + \sum_{m-1}^{m} \sum_{\nu}^{\nu+1} + \\ + \sum_{\mu}^{\mu+1} \sum_{\nu+1}^{\nu+2} + \sum_{\mu+1}^{\mu+2} \sum_{\nu+1}^{\nu+2} + \cdots + \sum_{m-1}^{m} \sum_{\nu+1}^{\nu+2} + \\ + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + \\ + \sum_{\mu}^{\mu+1} \sum_{n-1}^{n} + \sum_{\mu+1}^{\mu+2} \sum_{n-1}^{n} + \cdots + \sum_{m-1}^{m} \sum_{n-1}^{n} + \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} + f_{\mu,\nu} + f_{\mu+1,\nu} + \cdots + f_{m-1,\nu} + \\ + f_{\mu,\nu+1} + f_{\mu+1,\nu+1} + \cdots + f_{m-1,\nu+1} + \\ + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + \\ f_{\mu,n-1} + f_{\mu+1,n-1} + \cdots + f_{m-1,n-1} \end{array} \right\},$$

что и желали доказать.

15. Чтобы на примере показать, как можно находить двойные определенные суммы с помощью неопределенных, обратим внимание на следующие весьма простые равенства, легко получаемые на основании известных правил отыскания конечных разностей некоторых функций одного независимого переменного:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle_x \sin(x+y) = 2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + y + \frac{h}{2}\right) \\ \triangle_{xy}^2 \sin(x+y) = -4 \sin\frac{h}{2} \sin\frac{k}{2} \sin\left(x + y + \frac{h+k}{2}\right) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle_x \cos(x+y) = -2 \sin \frac{h}{2} \sin\left(x + y + \frac{h}{2}\right) \\ \triangle_{xy}^2 \cos(x+y) = -4 \sin\frac{h}{2} \sin\frac{k}{2} \cos\left(x + y + \frac{h+k}{2}\right) \end{array} \right\}$$

Отсюда легко вывести и такие следствия:

$$\left.\begin{aligned}\sum\sum \sin(x+y) &= \frac{\sin\left(x+y-\frac{h+k}{2}\right)}{-4\sin\frac{h}{2}\sin\frac{k}{2}}\\ \sum\sum \cos(x+y) &= \frac{\cos\left(x+y-\frac{h+k}{2}\right)}{-4\sin\frac{h}{2}\sin\frac{k}{2}}\end{aligned}\right\}$$

Предположим теперь, что требуется найти двойную сумму для $\sin(x+y)$ либо $\cos(x+y)$ соответственно следующим значениям аргумента $x+y$:

$$\left.\begin{array}{l}2\alpha+2\beta,\ 4\alpha+2\beta,\ldots\ldots 2m\alpha+2\beta\\ 2\alpha+4\beta,\ 4\alpha+4\beta,\ldots\ldots 2m\alpha+4\beta\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 2\alpha+2n\beta, 4\alpha+2n\beta,\ldots\ldots 2m\alpha+2n\beta\end{array}\right\}$$

(пусть в каждом двучлене первое и второе слагаемые соответствуют переменным x и y). Мы видим, что в наших общих формулах суммирования нужно для данного случая принять:

$$a=2\alpha,\ b=2\beta;\ h=2\alpha,\ к=2\beta.\ \frac{h+к}{2}=\alpha+\beta.$$

Применяя формулу перехода от неопределенных двойных сумм к определенным, мы получаем:

$$\sum_{2\alpha}^{2(m+1)\alpha}\sum_{2\beta}^{2(n+1)\beta}\sin(x+y)=\left[-\frac{\sin(x+y-\alpha-\beta)}{4\sin\alpha\sin\beta}\right]_{2\alpha,\ 2\beta}^{2(m+1)\alpha,\ 2(n+1)\beta}=$$

$$=\frac{-1}{4\sin\alpha\sin\beta}\{\sin[(2m+1)\alpha+(2n+1)\beta]-\sin[\alpha+(2n+2)\beta]-\sin[(2m+1)\alpha+\beta]+\sin(\alpha+\beta)\}=$$

$$=-\frac{-1}{4\sin\alpha\sin\beta}\{2\sin[(m+1)\alpha+(n+1)\beta]\cos(m\alpha+n\beta)-2\sin[(m+1)\alpha+(n+1)\beta]\cos(m\alpha+n\beta)\},\text{ т.е.}$$

$$\sum_{2\alpha}^{2(m+1)\alpha}\sum_{2\beta}^{2(n+1)\beta}\sin(x+y)=\frac{\sin[(m+1)\alpha+(n+1)\beta]\sin m\alpha\sin n\beta}{\sin\alpha\ \sin\beta}.$$

Совершенно так же нашли бы, что

$$\sum_{2\alpha}^{2(m+1)\alpha}\sum_{2\beta}^{2(n+1)\beta}\cos(x+y)=\frac{\cos[(m+1)\alpha+(n+1)\beta]\sin m\alpha\sin n\beta}{\sin\alpha\ \sin\beta}.$$

Отсюда получили бы, например, при $m=3$, $n=2$ следующие суммы:

$$\left.\begin{aligned}&\sin(2\alpha+2\beta)+\sin(4\alpha+2\beta)+\sin(6\alpha+2\beta)+\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(4\alpha+4\beta)+\\&\qquad+\sin(6\alpha+4\beta)=\frac{\sin(4\alpha+3\beta)\sin3\alpha\sin2\beta}{\sin\alpha\ \sin\beta}\\&\cos(2\alpha+2\beta)+\cos(4\alpha+2\beta)+\cos(6\alpha+2\beta)+\cos(2\alpha+4\beta)+\cos(4\alpha+4\beta)+\\&\qquad+\cos(6\alpha+4\beta)=\frac{\cos(4\alpha+3\beta)\sin3\alpha\sin2\beta}{\sin\alpha\ \sin\beta}\end{aligned}\right\}$$

Если еще принять здесь $\beta=\alpha$, то тогда

$$\left.\begin{aligned}\sin4\alpha+2\beta\sin6\alpha+2\beta\sin8\alpha+\sin10\alpha&=\frac{\sin7\alpha\ \sin3\alpha\ \sin2\alpha}{\sin^2\alpha}\\\cos4\alpha+2\cos6\alpha+2\cos8\alpha+\cos10\alpha&=\frac{\cos7\alpha\ \sin3\alpha\ \sin2\alpha}{\sin^2\alpha}\end{aligned}\right\}$$

Справедливость всех таких равенств, конечно, можно было бы проверить элементарным путем, с помощью тригонометрии, но это потребовало бы довольно сложных выкладок.

M. Marczewsky. Sur les différences finies des fonctions de deux variables indépendantes.

Resumé.

Dans cette Note je considère les notions des différences partielles et complètes (ces dernières — en sens un peu différent de celui de S. F. Lacroix) des fonctions de deux variables indépendantes, puis je donne la formule d'interpolation (analogue à celle de Newton) qu'on peut présenter sous la forme la plus condensée (N⁰ 10):

$$f(x,y)=f(a,b)+\left(\frac{x-a}{h}\Delta_x+\frac{y-b}{k}\Delta_y\right)^{(1)}f(a,b)+$$
$$\frac{1}{2!}\left(\frac{x-a}{h}\Delta_x+\frac{y-b}{k}\Delta_y\right)^{(2)}f(a,b)+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{x-a}{h}\Delta_x+\frac{x-b}{k}\Delta_y\right)^{(n)}f(a,b).$$

Enfin je passe au procédé inverse à la differentiation finie, c'est à dire à l'intégration finie des fonctions de deux variables indépendantes (N⁰ 14 — 15).

J'introduis une somme double finie en ecrivant

$$F(x,y)=\sum\sum f(x,y),\qquad \text{si l'on a } \Delta^2_{xy}F(x,y)=f(x,y).$$

Le signe de la double sommation se trouve justifié dans la suite, quand on passe à la somme double définie. Il demontre la formule (№ 14)

$$\sum_{a+\mu h}^{a+mk}\sum_{h+\nu k}^{b+nk}f(x,y)=(f_{\mu,\nu}+f_{\mu,\nu+1}+\ldots\ldots+f_{\mu,n-1})+$$
$$(f_{\mu+1,\nu}+f_{\mu+1,\nu+1}+\ldots\ldots+f_{\mu+1,n-1})+\ldots\ldots+$$
$$+(f_{m-1,\nu}+f_{m-1,\nu+1}+\ldots\ldots+f_{m-1,n-1}),$$

où F désigne la somme double indéfinie correspondante à f. A l'aide de cette relation fondamentale on peut parfois trouver effectivement quelques sommes doubles, dont on trouve des exepmles dans № 15.