Classe du système d'équations de Pfaff.

C. Russyan

La classe du système d'équations de Pfaff

$$\omega_i = \sum_1^p {}_s X_{is}\, dx_s = 0 \quad i = 1 \ldots m \tag{1}$$

est le nombre minimum de variables $y_1 \ldots y_p$ restant après la transformation

$$x_s = \varphi_s\,(y_1 \ldots y_p) \quad s = 1 \ldots p$$

dans le système donné, ou dans le système équivalent convenablement choisis.

Je vais déterminer ce nombre par la méthode dirècte et simple sans considération des él'éments caractéristiques du système (1) et des covariants bilinéaires introduits par Lipschitz *) et si usités dans la théorie du problème de Pfaff.

Si

$$x_s = \varphi_s\,(y_1 \ldots y_p) \quad s = 1 \ldots p$$

sont formules de la transformation des variables $x_1 \ldots x_p$, après laquelle les variables $y_q \ldots y_p$ disparaissent dans le système de Pfaff équivalent

$$\overline{\omega}_i = \sum_1^m {}_k \lambda_{ik}\, \omega_k = 0 \qquad i = 1 \ldots m$$

$$(\sum \pm \lambda_{11} \ldots \lambda_{mm} \gtreqless 0)$$

la forme de Pfaff

$$\Omega = t_1\, \omega_1 + \ldots t_m\, \omega_m$$

où $t_1 \ldots t_m$, $x_1 \ldots x_p$ sont les variables indépendantes, ne contient pas de $y_q \ldots y^p$ après la transformation

$$t_k = \sum_1^m {}_i \lambda_{ik}\, T_i, \quad x_s = \varphi_s(y^1 \ldots y_p) \quad s = 1 \ldots p, \quad k = 1 \ldots m$$

---

*) J. Crelle, Bd LXX.

des variables $t_1 \dots t_k$, $x_1 \dots x_p$, car elle obtient la forme

$$\Omega = T_1 \overline{\omega}_1 + \dots + T_m \overline{\omega}_m.$$

Inversement, si cette forme de Pfaff, ayant après la transformation

$$t_k = \sum_1^m {}_i T_i \lambda_{ik} \quad (\sum \pm \lambda_{11} \dots \lambda_{mm} \gtreqless 0) \quad \kappa = 1 \dots m$$

$$x_s = \varphi_s (y_1 \dots y_p) \quad s = 1 \dots p$$

a forme

$$\Omega = T_1 \overline{\omega}_1 + \dots + T_m \overline{\omega}_m$$

où $\overline{\omega}_i = \sum_1^m {}_k \lambda_{ik} \omega_k$ $i - 1 \dots m$ ne contient pas après cette transformation de variables $y_q \dots y_p$, le système de Pfaff

$$\overline{\omega}_i = \sum_1^m {}_k \lambda_{ik} \omega_k = 0 \quad i = 1 \dots m$$

équivalent au système donné (I) ne contient pas après la transformation

$$x_s = \varphi_s (y_1 \dots y_p) \quad s = 1 \dots p$$

de — mêmes variables.

La condition donc nécéssaire et suffisante, pour que le système de Pfaff

$$\overline{\omega}_i = \sum_1^m {}_k \lambda_{ik} \omega_k = 0 \, i = 1 \dots m$$

équivalent au système donné (I) ne contienne pas de variables $y_q \dots y_p$ après la transformation

$$x_s = \varphi_s (y_1 \dots y_p) \quad s = 1 \dots p$$

est que la forme de Pfaff

$$\Omega = t_1 \omega_1 + \dots + t_m \omega_m$$

ne contienne pas de mêmes variables après la transformation

$$t_k = \sum_1^m {}_i T_i \lambda_{ik} \quad \kappa = 1 \dots m$$

$$x_s = \varphi_s (y_1 \dots y_p) \quad s = 1 \dots p.$$

Il est connu de la théorie du problème de Pfaff, que la condition nécéssaire et suffisante pour que la forme de Pfaff quelconque

$$\omega = \sum_1^p {}_s X_s \, dx_s$$

ne contienne pas de variables $y_q \dots y_p$ après la transformation

$$x_s = f_s(y_1 \dots y_p) \quad s = 1 \dots p$$

est que les fonctions f_s $s = 1 \dots p$ satisfassent aux équations différentielles

$$\omega = \sum_1^p{}_s X_s \, dx_s = 0$$

$$(1s)\, dx_1 + \dots + (ps)\, dx_p = 0 \quad s = 1 \dots p \tag{a}$$

où
$$(ks) = \frac{\partial X_k}{\partial x_s} - \frac{\partial X_s}{\partial x_k} \quad k, s = 1 \dots p,$$

les différentielles $dx_1 \dots dx_p$ étant prises par rapport aux $y_q \dots y_p$. Ces équations (a) sont covariants de la forme de Pfaff ω relativement à tout changement des variables $x_1 \dots x_p$.

Le système (a) a pour la forme de Pfaff Ω la forme

$$\Omega = t_1 \omega_1 + \dots + t_m \omega_m = 0,$$

$$\omega_1 = 0, \dots \omega_m = 0,$$

$$-X_{11}\, dt_1 - \dots - X_{m1}\, dt_m + \sum_1^m{}_i t_i (11)_i dx_1 + \dots + \sum_1^m{}_i t_i (p1)_i\, dx_p = 0$$

. . . .

$$-X_{1p}\, dt_1 - \dots - X_{mp}\, dt_m + \sum_1^m{}_i t_i (1p)_i\, dx_1 + \dots + \sum_1^m{}_i t_i (pp)_i\, dx_p = 0$$

oú

$$(k, s)_i = \frac{\partial X_{ik}}{\partial x_s} - \frac{\partial X_{is}}{\partial x_k} \quad i = 1 \dots m, \quad k, s = 1 \dots p.$$

La première de ces équations est conséquence des autres, de sorte que nous n'avons à considerér que les équations

$$\omega_1 = 0, \dots \quad \omega_m = 0$$

$$-X_{11}\, dt_1 - \dots - X_{m1}\, dt_m + \sum_1^m{}_i t_i (11)_i dx_1 + \dots + \sum_1^m{}_i t_i (p1)_i\, dx_p = 0$$

. . . . (b)

$$-X_{1p}\, dt_1 - \dots - X_{mp}\, dt_m + \sum_1^m{}_i t_i (1p)_i\, dx_1 + \dots + \sum_1^m{}_i t_i (pp)_i\, dx_p = 0$$

Elles sont covariants de la forme de Pfaff Ω relativement á tout changement des variables $t_1 \dots t_m \quad x_1 \dots x_p$. Le changement des variables de la forme

$$t_k = \sum_1^m {}^i T_i \mu_{ik}, \quad x_s = \Theta_s (y_1 \dots y_p) \quad s = 1 \dots p, \quad k = 1 \dots m$$

laisse en outre invariable la forme de l'expdréssion différentielle Ω et celle des équations (b). Comme les équations (I) sont indépendantes et si p. ex.

$$\triangle = \sum \pm X_{11} \dots X_{mm} \gtreqless 0$$

on peut représenter les equations (b) sous la forme

$$\omega_1 = 0_1 \dots \quad \omega_m = 0$$

$$-X_{11}\, dt_1 - \dots - X_{m1}\, dt_m + \sum_1^m {}^i t_i\, (11)_i\, dx_1 + \dots + \sum_1^m {}^i t_i\, (p_1)_i\, dx_p = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (b_1)$$

$$-X_{1m}\, dt_1 - \dots - X_{mm} dt_m + \sum_1^m {}^i t_i\, (1m)\, dx_1 + \dots + \sum_1^m {}^i t_i\, (pm)_i\, dx_p = 0$$

$$\sum_1^m {}^i t_i \quad \omega_{i\, m+s} = 0 \quad s = 1 \dots p - m,$$

où

$$\omega_{im+s} = \begin{vmatrix} X_{11}, & \dots X_{m1}, & (11)_i\, dx_1 + \dots + (p1)_i\, dx_p \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{1m}, & \dots X_{mm}, & (1m)_i\, dx_1 + \dots + (pm)_i\, dx_p \\ X_{1m+s}, & \dots X_{mm+s}, & (1m+s)_i\, dx_1 + \dots + (pm+s)_i\, dx_p \end{vmatrix}$$

Les formules de la transformation cherchée

$$x_s = \varphi_s\, (y_1 \dots y)_p \qquad s = 1 \dots p$$

doivent donc satisfaire aux équations

$$\omega_i = 0, \ \omega_{i,\, m+s} = 0 \quad i = 1 \dots m, \ s = 1 \dots p - m.$$

On peut démontrer que ces équations sont covariants relativement â tout changement des variables $x_1 \dots x_p$ et à tout système de Pfaff équivalent au système donné (I).

En effet, le système d'équations (b_1) est covariant et consèrve sa forme relativement à tout changement des variables $t_1 \dots t_m, x_1 \dots x_p$ de la forme

$$t_k = \sum_1^m {}^i T_i / \mu_{ik}, \quad x_s = \Theta_s\, (y_1 \dots y_p) \quad s = 1 \dots p, \ k = 1 \dots m.$$

Si donc la forme de Pfaff Ω devient après cette transformation

$$\Omega = T_1 \bar{\omega}_1 + \ldots + T_m \bar{\omega}_m$$

$$\text{où } \bar{\omega}_i = \sum_1^m {}^k \mu_{ik} \bar{\omega}_k = \sum_1^p {}^s Y_{is} dy_s \qquad i = 1 \ldots m$$

et les équations (b_1) sont pour cette forme:

$$\bar{\omega}_1 = 0, \ldots \bar{\omega}_m = 0$$

$$- Y_{11} \, dT_1 - \ldots - Y_{m1} \, dT_m + \sum_1^m {}^i \, T_i \, (11)_i \, dy_1 + \ldots + \sum_1^m {}^i \, T_i \, (p1)_i \, dy_p = 0,$$

. . . .

$$- Y_{1m} \, dT_1 - \ldots - Y_{mm} \, dT_m + \sum_1^m {}^i \, T_i \, (1m) \, dy_1 + \ldots + \sum_1^m {}^i \, T_i \, (pm)_i \, dy_p = 0,$$

$$\sum_1^m {}^i \, T_i \, \bar{\omega}_{i, m+s} = 0 \qquad s = 1 \ldots p - m$$

oú

$$\bar{\omega}_{i, m+s} = \begin{vmatrix} Y_{11} \ldots Y_{m1}, & (11)_i \, dy_1 + \ldots + (p1)_i \, dy_p \\ \ldots & \ldots \\ Y_{1m} \ldots Y_{mm}, & (1m)_i \, dy_1 + \ldots + (pm)_i \, dy_p \\ Y_{1, m+s}, \ldots Y_{m, m+s}, & (1\, m+s)_i \, dy_1 + \ldots + (p\, m+s)_i \, dy_p \end{vmatrix}$$

dans la supposition que

$$\triangle_1 = \sum \pm Y_{11} \ldots Y_{mm} \gtreqless 0$$

on a que

$$\bar{\omega}_i = \sum_1^m {}^k \, \mu_{ik} \, \omega_k \qquad i = 1 \ldots m,$$

$$\sum_1^m {}^i \, T_i \, \bar{\omega}_{i, m+s} = \sum_1^{p-m} {}^\sigma \alpha_{\sigma s} \left(\sum_1^m {}^k \, t_k \, \omega_{k\, m+\sigma} \right) + \sum_1^m {}^k \, \tau_{ks} \, \omega_k$$

où

$$\tau_{ks} = \sum_1^m {}^i \, T_i \, \beta_{i\, ks} \qquad s = 1 \ldots p - m$$

et $\alpha_{\sigma s}$, β_{iks} ne dépendent que des $y_1 \ldots y_p$.
Il s'ensuit que

$$\bar{\omega}_{i\, m+s} = \sum_1^{p-m} {}^\sigma \sum_1^m {}^k \, \alpha_{\sigma s} \, \mu_{ik} \, \omega_{k\, m+\sigma} + \sum_1^m {}^k \, \beta_{i\, ks} \, \omega_k$$

$$i = 1 \ldots m, \qquad s = 1 \ldots p - m.$$

Ces identités et celles

$$\bar{\omega}_i = \sum_1^m {}^k \mu_{ik} \, \omega_k \qquad i = 1 \ldots m \quad \left(\sum \pm \mu_{11} \ldots \mu_{mm} \gtreqless 0 \right)$$

démontrent la proposition.

Le nombre donc d'équations indépendantes du système

$$\omega_i = 0, \ \omega_{i\,m+s} = 0 \quad i = 1 \dots m, \quad s = 1 \dots p - m \tag{c}$$

établies pour les systèmes de Pfaff transformés $\overline{\overline{\omega}}_i = 0 \quad i = 1 \dots m$ reste invariable.

C'est invariant du système de Pfaff donné (I).

Proposition. Ce nombre r est classe du système de Pfaff (I).

Il est évident que $r \leqslant p$. Si $r = p$, il s'ensuit des équations (c) que $dx_1 = \dots = dx_p = 0$ c. à d. que p est nombre minimum des variables $x_1 \dots x_p$, donc classe du système (I). Soit $r < p$. Adjoignons aux r équations indépendantes du système (c) encore $p - r - 1$ équations différentielles quelconqes de la forme

$$\sum_1^p {}^s X_s \, dx_s = 0$$

pourvu que toutes les $p - 1$ équations obtenues soient indépendantes. Ces $p - 1$ équations différentielles ordinaires ont les $p - 1$ intégrales, p. ex.

$$x_s = \varphi_s \, (C_1 \dots C_{p-1}, \ x_p) + 5h \quad s = 1 \dots p - 1,$$

où $C_1 \dots C_{p-1}$ sont constantes arbitraires.

Si nous portons ces expréssions des $x_1 \dots x_{p-1}$ dans les équations

$$- X_{11} \ dt_1 - \dots - X_{m1} \ dt_m + \sum_1^m {}^i \ t_i \ (11)_i \ dx_1 + \dots + \sum_1^m {}^i \ t_i \ (p_{2h} 1)_i \ dx_p = 0,$$

$$- X_{1m} \ dt_1 - \dots - X_{mm} \ dt_m + \sum_1^m {}^i \ ti \ (1m)_i \ dx_1 + \dots + \sum_1^m {}^i \ t_i \ (p_{2h} \, m)_i \ dx_p = 0,$$

nous obtiendrons m équations différentielles ordinaires en $t_1 \dots tm \ x_p$ linéaires et homogènes par rapport aux $t_1 \dots t_m$ et à leurs différentielles. Ces équations ont les m intégrales de la forme

$$t_k = \sum_1^m {}^i \ K_i \ \lambda_{ik} \quad k = 1 \dots m$$

oú $K_i \quad i = 1 \dots m$ sont constantes arbitraires et

$$\sum \pm \lambda_{11} \dots \lambda_{mm} \gtreqless 0.$$

Les formules de la transformation

$$t_k = \sum_1^m {}^i \ T_i \ \lambda_{ik} \quad k = 1 \dots m$$

$$x_s = \varphi_s \ (y_1 \dots y_{p-1} \ x_p) \quad s = 1 \dots p - 1$$

qu'on obtient en remplaçant $K_1 \dots K_m, \ C_1 \dots C_{p-1}$ par les nouvelles variables indépendantes $T_1 \dots T_m \ y_1 \dots y_{p-1}$ satisfont aux équations (b) les différentielles $dt_1 \dots dx_{p-1}$ étant prises par rapport à x_p. L'équation donc de Pfaff $\Omega = 0$

ne contient pas après cette transformation de la variable x_p. Le système donc de Pfaff

$$\overline{\omega}_i = \sum_1^m {}^k \lambda_{ik} \omega_k = 0 \quad i = 1 \ldots m \ (I_1)$$

équivalent au système donné (I) ne contient pas non plus x_p après la transformation

$$x_s = \varphi_s (y_1 \ldots y_{p-1} x_p) \quad s = 1 \ldots p-1.$$

Le système d'équations (b) établies pour le système (I_1) ne contient pas x_p et le système (c) correspondant ne contient que r équations indépendantes.

En appliquant le-même raisonnement par rapport au systeme (I_1) nous obtiendrons aprés la deuxième transformation le deuxiéme système de Pfaff (I_2) équivalent au donné (I) qui ne contient pas de deux variables x_p et p. ex. y_{p-1} et pour lequel le susteme d'équations (c), libre de y_{p-1}, x_p ne contient que r équations indépendantes et ainsi de suite. Nous obtiendrons après p—r telles transformations le (p—r)-ième système de Pfaff (I_{p-r}) équivalent au système donné (I) qui ne contient que r variables et pour lequel le système correspondant (c) ne contient que r équations indèpendantes. Le dernier système de Pfaff (I_{p-r}) contient donc le nombre minimum r de variables. Le nombre donc r d'equaitons indépendantes du système d'équations (c) est classe du système donné de Pfaff (I). Le théorème est démontré.

Si les variables du dernier système de Pfaff (I_{p-r}) sont $z_1 \ldots z_r$ le dernier système d'equations (c) correspondent à ce système de Pfaff est équivalent an systéme

$$dz_1 = O_1 \ldots dz_r = O \qquad (d)$$

Le système donc (c) initial, correspondant au systéme de Pfaff donné (I), équivalent au système (d) est complètement intéqrable. Mais cette propriéte du système (c) ne joue dans notre exposition aucun rôle.

Nous avons dit que classe du système de Pfaff donné (I) ne surpasse pas p. Quant à sa borne inférieure, il est évident que le nombre r ne peut pas être moindre que celui d'équations indépendantes du système (b) diminué de m. Autrement, si 2q est le plus haut dégré des mineurs principaux du détérminant symmétrique gauche

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0, & X_{11} & \ldots & X_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0_1 & \ldots & 0, & X_{m1} & \ldots & X_{mp} \\ -X_{11}, & \ldots & -X_{m1}, & \sum_1^m {}^i t_i (1\,p)_i, & \ldots & \sum_1^m {}^i t_i (p\,1)_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -X_{1p}, & \ldots & -X_{mp}, & \sum_1^m {}^i t_i (1\,p)_i, & \ldots & \sum_1^m {}^i t_i (pp)_i, \end{vmatrix}$$

qui ne sont pas identiquement nues, $2q - m \geqslant r$, où évidemment $2q \geqslant 2m$.

On peut démontrer que $2q$ est aussi le plus haut dégré de ces mineurs principaux, qui ne sont pas nuls identiquement et qui contiennent les éléments des m premières lignes (et des m premières colonnes) du déterminant $\triangle$. On peut considérer au lieu de ces mineurs principaux leurs racines carrées. On peut démontrer de même que la racine carrée du détérminant symmétrique gauche du dégre paire $2k \geqslant 2m$

$$\begin{vmatrix} O_1 & \dots & O_1 & X_{1\rho} & \dots & X_{1\sigma} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_1 & \dots & O_1 & X_{m\rho} & \dots & X_{m\sigma} \\ -X_{1\rho} & \dots & -X_{m\rho} & \sum_1^m {}^i t_i(\rho\,\rho)_i & \dots & \sum_1^m {}^i t_i(\sigma\,\rho) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -X_{1\sigma} & \dots & -X_{m\sigma} & \sum_1^m {}^i t_i(\rho\,\sigma)_i & \dots & \sum_1^m {}^i t_i(\sigma\,\sigma)_i \end{vmatrix}$$

$$\rho \dots \sigma = 1 \dots p$$

est:

$$\pm \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_m!}\, t_1^{\alpha_1} \dots \; t_m^{\alpha_m} \quad \triangle_{\rho \dots \sigma}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}$$

où $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = k - m$ et

$$\triangle_{\rho \dots \sigma}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} = \begin{vmatrix} X_{1\rho} & \dots & X_{1\sigma} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{m\rho} & \dots & X_{m\sigma} \\ \frac{\partial}{\partial x_\rho} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \\ X_{1\rho} & \dots & X_{1\sigma} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_\rho} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \\ X_{m\rho} & \dots & X_{m\sigma} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \alpha_1 \\ \\ \\ \alpha_m \end{matrix}$$

les signes $|\alpha_1 \dots | \alpha_m$ désignont que la paire correspondante de lignes figure $\alpha_1 \dots \alpha_m$ fois et que les éléments de chacune de ces paires ne sont pas assujettis à la loi commutative.

La borne donc inférieure de la classe r du système de Pfaff donné (I) est $2q - m$, $2q - m$ étant le plus haut dégré des déterminants symboliques du type indiqué qui ne sont pas nuls identiquement.

Dans le cas d'une e'quation de Pfaff et dans le cas du système (I) complètement intéqrable la classe est égale à sa borne inférieure $2q - 1$ et m. La condition donc nécéssaire et suffisante pour qu'une équation de Pfaff

$$\omega = \sum_1^p {}^s X_s \, dx_s = 0$$

soit reductible à l'équaton équivalente contenant le nombre 2q — 1 minimum de variables. ou pour qu'elle soit integragle par le nombre minimum q d'intégrales complètes est que le dégré le plus haut des déterminants

$$\left|\begin{array}{ccc} X_\rho & \dots\dots\dots & X_\sigma \\ \frac{\partial}{\partial x_\rho}, & \dots\dots\dots & \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \\ X_\rho & \dots\dots\dots & X_\sigma \end{array}\right|_k$$

qui ne sont pas nuls identiqument, soit égal à 2q — 1.

La condition nécéssaire et suffisante pour que le système de Pfaff (I) soit complètement intégrable est que les déterminants

$$\left|\begin{array}{ccc} X_{1\rho} & \dots\dots\dots & X_{1\sigma} \\ & \dots\dots\dots & \\ X_{m\rho} & \dots\dots\dots & X_{m\sigma} \\ \frac{\partial}{\partial x_\rho}; & \dots\dots\dots & \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \\ X_{i\rho} & \dots\dots\dots & X_{i\sigma} \end{array}\right| \quad i = \dots m, \quad \rho \dots \sigma = 1 \dots p$$

soient nuls identiquement. [1])

---

[1]) J'ai donné deux démonstrations de ce théorème en 1898 (Annales de l'Université de la Nouvelle Russie).