Об одном определении интеграла

А. К. Сушкевич

Раньше чем перейти к предмету, которому посвящается эта статья, я должен разъяснить одну вещь, которая может показаться многим читателям странной и даже несуразной: в то время как в настоящее время принято „обобщать“ понятие интеграла, я в настоящей статье, наоборот — „сужаю“ это понятие.

Причина этому та, что цель моя совершенно иная, чем цель тех, кто старается обобщить понятие интеграла: в настоящей моей статье я вовсе не стараюсь проникнуть в новые, еще неизвестные области: я остаюсь в области известной, уже „перейденной“, стараясь лишь установить связь между известными уже вещами. Дело в следующем: как известно, интеграл в смысле Riemann'a тесно связан с понятием меры Jordan, интеграл же Lebesgue'a связан с мерой Lebesgue'a и Borel'я; но связь эта в обоих случаях различна: ведь и определения интегралов Riemann'a и Lebesgue'a совершенно разнородны: в то время, как при определении интеграла Riemann'a делится на части интервал для независимого переменного, — при определении интеграла Lebesgue'a делится на части интервал для самой функции. Возникает вопрос: нельзя ли интеграл Riemann'a определить подобно Lebesgue'y, деля на части интервал для функции и применяя только вместо меры Lebesgue'a меру Jordan. Такому определению и посвящена настоящая статья; и вот оказывается, что определенный таким образом интеграл не совпадает с интегралом Riemann'a, а уже этого последнего. Следовательно, связь интеграла Riemann'a с мерой Jordan совершенно не та, что связь интеграла Lebesgue'a с мерой Lebesgue'a.

Мы начнем наше исследование с изложения свойств меры в смысле Jordan, — свойств по большей части уже известных. Затем введем понятие о функциях измеримых — в смысле Jordan, и, наконец, определим интеграл намеченным выше путем.

§ 1. Пусть A — данный линейный, ограниченный ансамбль точек, ограниченный, т.-е. целиком помещающийся на некотором конечном отрезке (a, b). Разделим (a, b) на конечное число частей m_1, затем каждую часть снова подразделим на части, так что весь отрезок (a, b) разделится на m_2 частей; и т. д.—повторяем эту операцию бесчисленное множество раз; при $n^{ом}$ таком делении отрезок (a, b) разделится на m_n частей. Пусть при этом эти деления таковы, что при $n \to \infty$ все части, на которые мы делим (a, b), стремятся (по длине) к нулю, так что при достаточно большом n длина каждой из m_n частей $n^{го}$ деления будет как угодно мала.

Введем такую терминологию: всю совокупность делений данного отрезка (a, b) назовем **сетью**, которую мы **накладываем** на (a, b).

Каждое отдельное деление назовем **решеткой**; решетки сети мы отличаем друг от друга номерами: 1 решетка есть деление (a, b) на m_1 частей; 2 решетка есть дальнейшее подразделение каждой части, приводящее к делению всего отрезка (a, b) на m_2 частей. Данная сеть состоит, таким образом, из исчислимого множества решеток.

Пусть данная решетка представляет собой деление отрезка (a, b) на m частей точками $x_1, x_2, \ldots x_{m-1}$; эти точки — **узлы** данной решетки; а часть $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots (x_{m-1}, b)$ — **петли** решетки.

Итак, наложим какую-нибудь сеть на (a, b).

В каждой решетке сети мы выбираем те петли, каждая из которых содержит по крайней мере одну точку из ансамбля A внутри себя или на границе; пусть S_n сумма длин этих выбранных петель.

Можно доказать (см., напр., Hobson: The theory of functions of a real variable 2_{nd} ed. vol. I, ch. III), что: с увеличением n, S_n не увеличивается, — существует $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$; этот предел один и тот же для всевозможных родов делений интервала (a, b) и является нижней границей всех сумм S_n для всевозможных делений интервала (a, b).

Этот предел S называется **внешней длиной** или **протяженностью** ансамбля A; обозначим его: $S = l_e A$.

Эта протяженность обладает следующими свойствами (см .Hobson — указанное выше сочинение и глава):

1. Если ансамбль A состоит из всех точек (замкнутого или незамкнутого) интервала (a, b) то $l_e A =$ длине этого интервала.

2. Для конгруэнтных ансамблей протяженность одна и та же.

3. Если $A_1, A_2, \ldots A_n$ — замкнутые ансамбли попарно, без общих точек, то:

$$l_e (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = l_e A_1 + l_e A_2 + \ldots + l_e A_n .$$

Это свойство иначе выражается словами: для замкнутых ансамблей протяженность — аддитивная функция.

Замечание. Если множество замкнутых ансамблей бесконечно, то свойство 3 может быть и неверно; это выражают словами: протяженность для замкнутых ансамблей — функция аддитивная, но не вполне.

4. Протяженность данного ансамбля та же, что и протяженность каждого из производных ансамблей:

$$l_e A = l_e A' = l_e A'' = \ldots = l_e A^{(n)},$$

где n любое конечное или трансфинитное число.

Следствие 1. Протяженность приводимого ансамбля $= 0$. (Приводимый ансамбль A — такой, для которого $A^{(n)} = 0$, начиная с некоторого числа n, 1-го или 2-го класса).

Следствие 2. Если ансамбль A везде густой в интервале (a, b), то $l_e A = b - a$.

5. Если A — ансамбль замкнутый, а B — ансамбль отрезков дополнительных к A в (a, b), сумма длин которых $= k$, то: $l_e A = b - a - k$.

6. Всякий ограниченный линейный ансамбль A имеет внешнюю длину, вполне определенную свойствами 1, 4 и 5.

§ 2. Совершенно аналогично внешней длине определяется и внутренняя длина или вместимость ограниченного ансамбля (линейного).

И здесь мы накладываем сеть на интервал (a, b), в котором содержится данный ансамбль A. Пусть $n^{я}$ решетка этой сети имеет m_n петель; выбираем из этих петель те, которые целиком состоят из точек ансамбля A (кроме, может быть, своих концов, которые могут и не принадлежать к A); пусть сумма длин этих петель есть S_n. Можно, как и в случае первой длины, доказать, что:

с увеличением n, S_n не уменьшается; существует $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s$; этот предел один и тот же для всевозможных сетей, накладываемых на интервал (a, b) и является верхней границей всех сумм S_n для всевозможных сетей, накладываемых на интервал (a, b).

Этот предел S и есть внутренняя длина или вместимость ансамбля A; обозначим его $S = l_i A$.

Вместимость обладает следующими свойствами:

1. Если ансамбль A состоит из всех точек (замкнутого или незамкнутого) интервала (a, b) то $l_i A =$ длине этого интервала.

2. Для конгруэнтных ансамблей и вместимость одна и та же.

3. Для открытых ансамблей вместимость — вполне аддитивная функция т.-е., если $A_1, A_2, A_3, \ldots$ конечное или исчислимое множество открытых ансамблей попарно без общих точек, то:

$$l_i(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots) = l_i A_1 + l_i A_2 + l_i A_3 + \ldots$$

Открытым (ouvert) называется ансамбль, состоящий только из внутренних точек. Можно доказать, что такой ансамбль есть сумма конечного или исчислимого множества открытых (незамкнутых) интервалов попарно без общих точек. Сумма конечного или исчислимого множества открытых ансамблей — тоже открытый ансамбль, т.-е., тоже состоит из открытых интервалов.

Доказательство свойства 3. Пусть все наши ансамбли заключены в интервале (a, b).

Для конечного множества открытых ансамблей попарно без общих точек теорема очевидна. Т.-е.:

$$l_i(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = l_i A_1 + l_i A_2 + \ldots + l_i A_n.$$

При $n \to \infty$ сумма правой части возрастает, но остается всегда $< b - a$, т.-е. ряд:

$$l_i A_1 + l_i A_2 + l_i A_3 + \ldots \text{ in inf.}$$

сходящийся; т.-е., при достаточно большом m, $l_i A_{m+1} + l_i A_{m+2} \ldots\ldots$ может быть сделано как угодно мало.

Наложим сеть на интервал (a, b). Возьмем одну решетку сети и выделим в ней те части (петли), которые целиком состоят из точек хоть одного из ансамблей $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$ При достаточно большом p, ни одна из этих петель не будет содержать точек из A_p, ибо при достаточно большом p, $l_i A_p$ очень мало.

Пусть взятые петли содержат только точки из $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$; если петли решетки, взятой нами, достоточно малы, т.-е. решетка имеет достаточно большой номер, то n может быть как угодно большим; для решеток с дальнейшими номерами, n увеличивается. Сумму длин взятых петель, состоящих из точек ансамблей $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$, обозначим чрез s. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное число. Возьмем m таким большим, чтобы было:

$$l_i A_{m+1} + l_i A_{m+2} + \ldots\ldots < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Возьмем теперь $n > m$ (это мы можем сделать, беря решетки с достаточно большим номером).

Пусть $s = s' + s''$ где s' сумма тех частей, которые целиком состоят из точек ансамблей $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ a s'' — сумма петель, состоящих из точек ансамблей $A_{m+1}, \ldots\ldots A_n$; очевидно, что:

$$s'' < l_i A_{m+1} + l_i A_{m+2} + \ldots\ldots,$$

т.-е. и подавно $s'' < \frac{\varepsilon}{3}$. С другой стороны, если мы продолжим деления интервала (a, b) достаточно далеко (т.-е. возьмем решетку с достаточно большим номером), то:

$$l_i A_1 + l_i A_2 + \ldots\ldots + l_i A_m - s' < \frac{\varepsilon}{3},$$

а также, как мы уже видели:

$$l_i A_{m+1} + l_i A_{m+2} + \ldots\ldots \text{in inf.} < \frac{\varepsilon}{3};$$

это нам дает:

$$A_1 + l_i A_2 + \ldots\ldots \text{in inf.} - s \leqq | l_i A_1 + \ldots\ldots + l_i A_m - s' | + | s'' | + | l_i A_{m+1} +$$

$$+ l_i A_{m+2} + \ldots\ldots \text{in inf.} | < \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon,$$

$$\text{т.-е. } \lim s = l_i A_1 + l_i A_2 + \ldots\ldots \text{in inf.};$$

но lims и есть $l_i(A_1 + A_2 + \ldots\ldots)$; т.-е. теорема доказана.

Замечание 1. Если ансамбль не имеет внутренних точек, то его вместимость, очевидно, $= 0$.

Такой ансамбль не может быть открытым, и для таких ансамблей свойство 3 неверно. Напр., ансамбль всех чисел в интервале (0,1) имеет вместимость $= 1$ и является суммой двух ансамблей: всех рациональных чисел в интервале (0,1) и всех иррациональных чисел в том же интервале; для каждого из этих ансамблей вместимость равна нулю.

Замечание 2. Вместимость всякого исчислимого ансамбля равна нулю, ибо исчислимый ансамбль не имеет внутренних точек,

4) Совокупность внутренних точек всякого ансамбля A образует открытый ансамбль A_1 — „внутреннюю часть“ ансамбля A.

Если A не имеет внутренних точек, то можно считать $A = 0$.

Доказательство. Ясно, что все точки, лежащие вблизи внутренней точки из A, тоже суть внутренние точки из A; след., A — открытый ансамбль.

Ясно также, что при определении вместимости A принимаются во внимание только точки из A_1.

Пусть $A = A_1 + B$, где B не содержит ни одной внутренней точки из A; т.-е. ансамбль B и сам не имеет внутренних точек, т.-е. $l_i B = 0$.

5) Очевидно, что всякая внутренняя точка для A является в то же время и предельной точкой для A; сл.: $A_1 < (A')$, след. $l_i A \leqq l_i A'$.

Если A — замкнутый ансамбль, то $A > A'_1$ след. $A_1 > (A')_1$, т.-е. в этом случае $l_i A = l_i A'$.

Так как все производные ансамбли замкнуты, то $l_i A' = l_i A'' = \ldots\ldots = l_i A^{(n)}$ для всякого конечного n.

Далее, т. к. $(A')_1 = (A'')_1 = \ldots\ldots$ то эта же внутренняя часть $(A')_1$, общая всем $A^{(n)}$, входит и в $A^{(\omega)}$, т.-е. $(A')_1 < (A^{(\omega)})_1$; с другой стороны, очевидно $(A')_1 > (A^{(\omega)})_1$; след. $(A')_1 = (A^{(\omega)})_1$; $l_i A' = l_i A^{(\omega)}$. Итак:

Теорема: Вместимость ансамбля $A \leqq$ вместимости ансамбля A'; все производные для данного ансамбля — конечного и трансфинитного порядков — имеют одну и ту же вместимость. Если A — замкнутый ансамбль, то $l_i A = l_i A'$.

Следствие. Вместимость приводимого ансамбля равна нулю.

6) Вместимость открытого ансамбля A равна сумме длин тех открытых интервалов, из которых A состоит. Это — следствие из 3-м свойства.

7) Всякий ограниченный линейный ансамбль имеет внутреннюю длину, вполне определенную свойствами 1, 5 и 6.

§ 3. Из определения протяженности и вместимости следует, что для данного ансамбля A, всегда:

$$l_e A \geqq l_i A.$$

Через CA будем обозначать ансамбль дополнительный к A относительно (a, b).

Теорема. $l_e CA = b - a - l_i A$; $l_i CA = b - a - l_e A$.

Доказательство. Наложим сеть на интервал (a, b); в каждой решетке выделим, напр., те петли, где находится, по крайней мере, одна точка из A; сумму длин этих петель назовем s_1; остальные петли целиком состоят из точек принадлежащих CA. Сумму длин обозначим через s_2; $s_1 + s_2 = b - a$; но $\lim s_2 = l_e A$; $\lim s_2 = l_i(CA)$; сл. $l_e A + l_i(CA) = b - a$; и т. п.

§ 4. Если $l_e A = l_i A$, то говорят, что ансамбль A измерим в смысле Jordan, или измерим (J).

Обозначим в этом случае: $l_e A = l_i A = lA$; это количество есть мера (J), или длина ансамбля A.

Из этого определения вытекают след. свойства:

Если ансамбль A измерим (J), то и CA тоже, и $l(CA) = b - a - lA$; это следует из теоремы § 3.

Ансамбль без внутренних точек измерим (J) тогда и только тогда, если его протяженность $= 0$; в этом случае и его мера $(J) = 0$. Эго следует из того, что вместимость такого ансамбля $= 0$.

Свойства меры (J):

1. Ансамбль состоящий из всех точек (замкнутого или открытого) интервала (a, b), измерим (J); его мера (J) равна его длине.

2. Если один из этих конгруэнтных ансамблей измерим (J), то и другой — тоже, и их меры (J) равны.

3. Мера (J) — аддитивная функция от ансамбля, но не вполне. Иначе: если ансамбли $A_1, A_2, \ldots . A_n$ — попарно без общих точек, и каждый из них измерим (J), то сумма их измерима (J), и:

$$l(A_1 + A_2 + \ldots . + A_n) = lA_1 + lA_2 + \ldots . + lA_n.$$

Лемма 1. Если $B_1, B_2 \ldots . B_n$ замкнутые ансамбли, содержащиеся в интервале (a, b), то:

$$l_e M(B_1, B_2, \ldots . B_n) \leqq l_e B_1 + l_e B_2 + \ldots . + l_e B_n.$$

(M — знак общего наименьшего кратного).

Доказательство. Заметим, что общее наименьшее кратное замкнутых ансамблей — тоже замкнутый ансамбль.

Докажем сначала нашу лемму для случая, когда $n = 2$. Ансамбль B_1 получается исключением из (a, b) конечного или исчислимого множества открытых интервалов, сумма длин которых $= k_1$; подобно же для ансамбля B_2 сумма длин дополнительных интервалов $= k_2$; тогда для ансамбля $M(B_1, B_2)$ сумму длин дополнительных интервалов обозначим через $D(k_1, k_2)$, (ансамбль этих дополнительных интервалов есть общий наибольший делитель ансамблей CB_1 и CB_2); если чрез $M(k_1, k_2)$ обозначим сумму длин интервалов ансамбля $M(CB_1, CB_2)$, то имеем:

$$k_1 + k_2 = M(k_1, k_2) + D(k_1, k_2).$$

Теперь имеем:

$$l_e B_1 + b - a - k_3;\ l_e B_2 = b - a - k_2;\ l_e M(B_1, B_2) = b - a - D(k_1, k_2).$$

Мы должны показать, что: $l_e B_1 + l_e B_2 \geqq l_e M(B_1, B_2)$; или: $2(b - a) - - (k_1 + k_2) \geqq b - a - D(k_1, k_2)$;
это равносильно следующему: $b - a \geqq k_1 + k_2 - D(k_1, k_2)$,

или: $b - a \geqq M(k_1, k_2)$; это неравенство верно; след. верны и предыдущие, и лемма для $n=2$ доказана.

Применим метод полной индукции: пусть наша лемма верна, если число ансамблей $< n$. Обозначения оставим те же, имеем:

$$l_e B_k = b - a - k_k \quad (k = 1, 2, \ldots . n);$$

$$l_e M(B_1, B_2, \ldots . B_n) = b - a - D(k_1, k_2, \ldots . k_n);$$

но

$$D(k_1, k_2, \ldots\ldots k_n) = D[D(k_1, k_2, \ldots\ldots k_{n-1}), k_n];$$

$$\sum_{k=1}^{n} l_e B_k = n(b-a) - (k_1 + k_2 + \ldots\ldots + k_n);$$

мы должны доказать, что:

$$n(b-a) - (k_1 + k_2 + \ldots\ldots + k_n) \geqq b - a - D(k_1, k_2, \ldots\ldots k_n);$$

мы считаем доказанным, что:

$$(n-1)(b-a) - (k_1 + k_2 \ldots\ldots + k_{n-1}) \geqq b - a - D(k_1, k_2, \ldots\ldots k_{n-1});$$

след., наша лемма будет доказана, если мы выведем, что:

$$2(b-a) - D(k_1, k_2, \ldots\ldots k_{n-1}) - k_n \geqq b - a - D(k_1, k_2, \ldots\ldots k_n);$$

но это неравенство верно, ибо оно выражает нашу лемму для двух ансамблей: $M(B_1, B_2, \ldots\ldots B_{n-1})$ и B_n, а для двух ансамблей наша лемма доказана. Сл., лемма доказана вполне.

Лемма 2. Протяженность суммы $\geqq$ суммы протяженностей слагаемых (это верно только для конечного числа слагаемых).

Док. Так как $l_e A = l_e A'$, то для определения протяженности достаточно принять во внимание только предельные точки для A. Но, как известно:

$$(A_1 + A_2 + \ldots\ldots A_n)' = M(A_1', A_2', \ldots\ldots A_n'),$$

а для замкнутых ансамблей $A_1', A_2', \ldots\ldots A_n'$ по лемме I:

$$l_e M(A_1', A_2', \ldots\ldots A_n') \geqq l_e A_1' + l_e A_2' + \ldots\ldots + l_e A_n'.$$

Замечание. Для исчислимого множества слагаемых эта теорема не верна. Напр., ансамбль всех рациональных чисел в интервале (0,1) имеет протяженность $= 1$ и может быть рассматриваем, как сумма исчислимого множества ансамблей, каждый из которых состоит из одной точки, т.—е. имеет протяженность равную нулю.

Лемма 3. Вместимость суммы $\geqq$ суммы вместимостей слагаемых. (Это верно и для исчислимого множества слагаемых).

Док. Это следует из того, что внутренняя часть суммы заключает в себе внутренние части каждого из слагаемых, из которых никакая пара не имеет общей внутренней части.

Доказ. свойства 3. Оно непосредственно следует из лемм 1 и 2 и из того, что $l_e A \geqq l_i A$.

Дополнение. Мера (J)—аддитивная ф-ция, но не вполне; т.-е. свойство 3 может быть и неверно для исчислимого множества слагаемых; т. - е. в этом случае сумма может быть и неизмерима (J), несмотря на то, что каждое слагаемое измеримо (J).

Но если каждое из исчислимого множества слагаемых $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$

измеримо (J) и сумма $A_1 + A_2 + A_3 \ldots\ldots$ тоже измерима (J), то в этом случае верна формула:

$$l(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots) = l A_1 + l A_2 + l A_3 + \ldots\ldots$$

(конечно, предполагается, что $A_1 . A_2, A_3, \ldots\ldots$ попарно без общих точек).

Именно ансамбли, измеримые (J), измеримы и в смысле Lebesgue'а или меры (J) те же, что и меры (L); а для меры (L) приведенная формула верна

4) Если ансамбль A измерим (J), то его внутренняя часть A_1 тоже измерима (J) и $l A = l A_1$.

Док.: $l A = l_e A \geqq l_e A_1$; $l A = l_i A = l_i A_1$;

След.: $l_e A_1 \leqq l_i A_1$ т.-е. $l_e A_1 = l_i A_1 = l A_1 = l A$.

Замечание. Но может случиться, что A_1 измерим (J), а A нет.

5) Если ансамбль A измерим (J), то и его производный ансамбль A' измерим и (J) и $l A = l A_1$;

Доказ. $l A = l_e A = l_e A'$; $l_e A \geqq l_e A_1$; $l A = l_i A \leqq l_i A'$.

След: $l_e A' \leqq l_i A'$ т.-е.: $l_e A' = l_i A' = l A' = l A$.

Замечание. Но может случиться, что A' измерим (J), а A — нет.

6). Ансамбль A в интервале ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$) тогда и только тогда измерим (J), если: $l_e A + l_e CA = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$; это непосредственное следует из теоремы § 3.

§ 5. Теорема 1. Если ансамбль $A = B + B_1$, причем A и B измеримы (J), то и B_1 измерим (J), и $l B_1 = l A - l B$.

Доказ. $C B_1 = C (A - B) = C A + B$ измерим (по свойству 3 § 4)

$$l(C B_1) = l(C A) + l B = \mathfrak{b} - \mathfrak{a} - l A + l B_1$$

сл. и B_1 измерим (J) (см. начало § 4), и:

$$l B_1 = \mathfrak{b} - \mathfrak{a} - l(CB_1) = l A - l B.$$

Теорема 2. Если ансамбль A и B измеримы (J) — то и ансамбль: $D = D(A, B)$ тоже измерим (J) (D — знак общего наибольшего делителя).

Доказ. Пусть A и B лежат в интервале ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$).

Наложим сеть на (a, в). В каждой решетке выделим петли, содержащие точки из D; сумму их обозначим чрез k. Из этих петель возьмем петли, целиком состоящие из точек D; их сумму обозначим через k_1. Остальные взятые петли, кроме точек из D, заключают и другие точки — из A, из B и из $P = C[M(A, B,)]$; выделим из этих петель те, которые содержат только точки из A (но не из B) и из D; их сумму обозначим через k_2; сумму длин петель, содержащих точки из B (но не из A) и из D обозначим через k_3; наконец, сумму остальных петель, входящих в k, обозначим через k_4.

Тогда: $k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$. Имеем: $\lim k = l_e D$; $\lim k_1 = l_i D$; $\lim k_4 = 0$, ибо ансамбли A и B измеримы.

Пусть $\lim k_2 > 0$; $\lim k_2$ есть часть $l_i A$, но также и часть $l_e B$, не входящая в $l_i B$; это невозможно, т. к. ансамбль B измерим; след. $\lim k_2 = 0$; подобно же, $\lim k_3 = 0$, т.-е. $\lim k = \lim k_1$, или $l_e D = l_i D$ и D измерим (J).

Следствие 1. Доказанная теорема верна вообще для конечного числа ансамблей: если $A_1, A_2, \ldots A_n$ измеримы (J), то и $D(A_1, A_2, \ldots A_n)$ тоже. Это следует из того, что, напр.,

$$D(A_1, A_2, A_3) = D(D(A_1, A_2), A_3); \text{ и т. д.}$$

Следствие 2. Ансамбли $A - D(A, B)$ и $B - D(A, B)$ тоже измеримы (J).

Следствие 3. Если $A_1, A_2, \ldots A_n$ измеримы (J), то и $M(A_1, A_2, \ldots A_n)$ тоже. Это следует из того, что:

$$M(A_1, A_2, \ldots A_n) = C\,D(C\,A_1, C\,A_2, \ldots C\,A_n).$$

Следствие 4. Если ансамбль A находится в интервале (a, b) и измерим (J), и (c, d) — интервал, целиком заключающийся в (a, b), то часть ансамбля A, лежащая в (c, d), тоже измерима (J), ибо эта часть есть $D[A, (c, d)]$.

§ 6. Какое же строение ансамбля A, измеримого (J)? Мы знаем, что $A = A_i + B$, где A_i внутренняя часть A, а $l_i B = 0$.

Но если A измерим (J), то (см. § 4, 4) и A_1 измерим (J), и $l\,A = l\,A_1$.

По § 5, теореме 1 отсюда следует, что и ансамбль B измерим (J), и $l\,B = l\,A - l\,A_1 = 0$.

Обратно: если A_1 открытый ансамбль измеримый (J), а B измеримый (J) ансамбль с длиной $= 0$, и A_1 и B не имеют общих точек, то $A = A_1 + B$ тоже измерим (J).

Т.-е. это есть общий вид всякого ансамбля, измеримого (J). След. дело сводится к рассмотрению ансамблей A_1 и B.

Открытый ансамбль A_1 в (a, b) измерим (J) тогда и только тогда, если $l_i A_1 + l_i (C\,A_1)_1 = b - a$, т. е. другими словами сумма длин интервалов из A_1 и из CA_1, должна быть равна длине всего интервалла (a, b). В частности, если A везде густой в (a, b), то сумма длин интервалов из A должна быть равна $a - b$.

Рассмотрим теперь ансамбль B, измеримый (J), с длиной $= 0$. Имеем $lB = lB' = 0$, но B' замкнутый; если $lB' = 0$, то B' нигде не густой в (a, b), и, кроме того, $l_i(CB') = b - a$, т.-е. сумма длин дополнительных к B интервалов должна быть $b - a$. Это условие необходимое и достаточное для того, чтобы B' был измерен (J) с мерой $= 0$. Но если $lB' = 0$, то и ансамбль B измерим с длиной $= 0$, ибо:

$$l_e B = l_e B' = lB' = 0 \text{ (см. начало § 4).}$$

$B = D(B, B') + P$, где P ансамбль изолированных точек.

§ 7. Измеримые функции.

Пусть $f(x)$ данная ограниченная реальная ф-ция реального переменного x; x изменяется в (замкнутом) интервалле (a, b); для ф-ции имеем нижнюю и верхнюю границы α и β, т.-е. ансамбль значений ф-ции лежит в интервале (α, β). Назовем нашу функцию измеримой (J) в интервале (a, b), если:

1) Измерим ансамбль значений x в (a, b), для которых $f(x) = \alpha$ (обозначим этот ансамбль $E(f = \alpha)$;

2) Измерим ансамбль $E(f = \beta)$ (то же обозначение);

3) Если $\alpha \leqq \alpha_1 < \beta_1 \leqq \beta$, то измерим ансамбль значений x, для которых $\alpha_1 \leqq f(x) \leqq \beta_1$ [обозначим этот ансамбль так: $E(\alpha_1 \leqq f \leqq \beta_1)$].

Примечание. Если, наприм., наша ф-ция f совсем не принимает значений, лежащих между α_1 и β_1 (со включением α_1 и β_1), то мы считаем, что: $E(\alpha_1 \leqq f \leqq \beta_1) = 0$ и $lE(\alpha_1 \leqq f \leqq \beta_1) = 0$.

Из определения измеримых (J) ф-ций следует:

1) При $\alpha < \xi < \beta$ измерим (J) ансамбль $E(f = \xi)$, ибо: $E(f = \xi) = D\,[E(\alpha \leqq f \leqq \xi),\ E(\xi \leqq f \leqq \beta)]$ (см. § 5, теорема 2).

2) При $\alpha < \xi < \beta$ измеримы (J) ансамбли $E(f \geqq \xi)$, $E(f \leqq \xi)$, ибо это только иное обозначение для ансамблей $E(\xi \leqq f \leqq \beta)$, $E(\alpha \leqq f \leqq \xi)$.

3) При $\alpha < \xi < \beta$ измеримы (J) ансамбли $E(f > \xi)$, $E(f < \xi)$, ибо $E(f > \xi) = CE(f \leqq \xi)$, $E(f < \xi) = CE(f \geqq \xi)$.

4) При $\alpha \leqq \alpha_1 < \beta_1 \leqq \beta$ измеримы ансамбли: $E(\alpha_1 < f < \beta_1)$, $E(\alpha_1 \leqq f < \beta_1)$ $E(\alpha_1 < f \leqq \beta_1)$, ибо $E(\alpha_1 < f < \beta_1) = (a, b) - E(f \leqq \alpha_1) - E(f \geqq \beta_1)$; и т. д.

Теорема. Если ф-ция f(x) измерима (J) в интервале (a, b), то она измерима (J) и во всякой части (a_1, b_1) интервала (a, b).

Док. Ансамбль значений x в (a, b), для которых $\alpha_1 \leqq f \leqq \beta_1$, есть общий наибольший делитель ансамбля таких же значений x во всем интервале (a, b) и всех значений x в интервале (a_1, b_1) (см. § 5, теорему 2).

§ 8. Теорема. Всякая ограниченная измеримая (J) ф-ция — точечно-прерывна.

Док. Интервал (α, β) для ф-ции разделим на конечное число частей; по крайней мере для одной из таких частей (α_1, β_1), будем иметь: $lE(\alpha_1 < f < \beta_1) > 0$.

Возьмем такую часть (α_1, β_1), которую можно выбрать всегда так, чтобы $\beta_1 - \alpha_1$ было как угодно мало. Итак, пусть $A_1 = E(\alpha_1 < f < \beta_1)$. Так как $lA_1 > 0$, то A_1 имеет внутренние точки; если x—одна из них, то можно взять интервал (a_1, b_1), внутри которого лежит x и который целиком, включая и его границы, состоит из внутренних точек A_1. При этом можно еще взять: $a_1 > a$, $b_1 < b$. Берем теперь (a_1, b_1) вместо (a, b). Соответствующий интервал для функции (α_1, β_1); делим его на части и берем одну из них (α_2, β_2) такую, чтобы ансамбль $A_2 = E(a_2 < f < \beta_2)$ точек x, лежащих в интервале (a_1, b_1) имел бы длину > 0. С A_2 мы поступаем так же: берем интервал, состоящий целиком (вместе в границами) из точек ансамбля A_2; и т. д. Получаем ряд интервалов (α_n, β_n), из которых каждый последующий ложится в предыдущем; от нас зависит выбрать их так, чтобы было: $\lim(\beta_n - \alpha_n) = 0$, т.-е. $\lim \alpha_n = \lim \beta_n$; этот общий предел обозначим через y_0. Интервалам (α_n, β_n) соответствуют интервалы (a_n, b_n) для x, из которых каждый последующий лежит целиком внутри предыдущего. Интервалы (a_n, b_n) определят „предельный“ интервал (a_ω, b_ω), лежащий целиком внутри всех предыдущих. Конечно, может случиться, что будет $a_\omega = b_\omega$. Возьмем одну из точек x_0 интервала (a_ω, b_ω); докажем, что $f(x_0) = y_0$. Пусть $f(x_0) = y_0 + k$; пусть n так велико, что $|\beta_n - \alpha_n| < |k|$: в интервале (a_n, b_n) функция $f \geqq \alpha_n$ и $\leqq \beta_n$; x_0 лежит в интервале (a_n, b_n), след. $\alpha_n \leqq f(x_0) \leqq \beta_n$, т.-е. $\alpha_n \leqq y_0 + k \leqq \beta_n$, но также и $\alpha_n \leqq y_0 \leqq \beta_n$, что невозможно, если $|\beta_n - \alpha_n| < |k|$. Итак, $k = 0$ и $f(x_0) = y_0$.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ произвольно мало. При достаточно большом n, интервал (α_n, β_n) лежит целиком внутри $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$; интервалу (α_n, β_n) соответствует интервал (a_n, b_n) для x, внутри которого лежит x_0, так что при

$a_n < x < b_n$ будет $\alpha_n < f(x) < \beta_n$; пусть δ наименьшее из чисел $x_0 - a_n$, $b_n - x_0$, тогда при $|x - x_0| < \delta$ будет $\alpha_n < f(x) < \beta_n$, т.-е. и подавно $y_0 - \varepsilon < f(x) < y_0 + \varepsilon$, т.-е. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, т.-е. при $x = x_0$ $f(x)$ непрерывна.

Вместо всего интервала (a, b) мы можем с самого начала взять любую, как угодно малую, его часть; след., $f(x)$ точечно прерывна.

§ 9. Пусть попрежнему $f(x)$ ограничена и измерима (J) в интервале (a, b), и пусть там $\alpha \leqq f(x) \leqq \beta$. Разделим (α, β) на части, каждая из которых длиною $< \frac{\varepsilon}{2}$, где $\varepsilon > 0$ произвольное число; пусть (α_1, β_1) одна из таких частей; $\beta_1 - \alpha_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим ансамбль: $E(\alpha_1 \leqq f \leqq \beta_1)$; он измерим (J); если x_0 его внутренняя точка, то для всякой точки x вблизи x_0: $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

След., если $\alpha_1 \leqq f(\xi) \leqq \beta_1$ и в точке ξ $f(x)$ делает скачек $\geqq \varepsilon$, то ξ не внутренняя точка для $E(\alpha_1 \leqq f \leqq \beta_1)$; если $E(\alpha_1 \leqq f \leqq \beta_1) = A_1 + B$, где A_1 внутренняя часть ансамбля, а $IB = 0$, то $\xi < B$. Это верно для всякой части (α_1, β_1), на которые разделен интервал (α, β); число этих частей конечно.

След., все точки x, где $f(x)$ делает скачок $\geqq \varepsilon$, принадлежат к конечному множеству ансамблей с мерой $(J) = 0$; сумма этих ансамблей тоже имеет меру $(J) = 0$.

Итак:

Теорема. Если $f(x)$ измерима (J) в интервале (a, b) и ограничена, то те точки x, где ф-я $f(x)$ делает скачек $\geqq \varepsilon$, при любом $\varepsilon > 0$, образуют ансамбль с протяженностью $= 0$.

Но это свойство необходимо и достаточно для существования интеграла в смысле Riemann'a.

Следствие. Всякая ограниченная и измеримая (J) ф-я интегрируема (R).

§ 10. Теорема. Если $f(x)$ ограничена и измерима (J), и $C = \text{Const.}$, то и $Cf(x)$ и $f(x) + C$ измеримы (J); в частности, и $f(x)$ измерима (J).

Доказ. Имеем:

$$E(\alpha_1 \leqq Cf(x) \leqq \beta_1) = E\left(\frac{\alpha}{C} \leqq f(x) \leqq \frac{\beta_1}{C}\right)$$

(при $C = 0$; при $C = 0$ дело совсем просто);

$$E(\alpha_1 \leqq f + C \leqq \beta_1) = E(\alpha_1 - C \leqq f \leqq \beta_1 - C) \text{ и т. д.}$$

Теорема. Монотонная функция измерима (J).

Доказ. Пусть, напр., $f(x)$ не убывающая; всякому интервалу $\alpha_1 \leqq f \leqq \beta_1$ соответствует интервал (или точка) для x: $a_1 \leqslant x \leqslant b_1$, который измерим.

Следствие 1. Частично-монотонная ф-ция измерима (J).

Следствие 2. Всякая аналитическая ф-ция измерима (J) во всяком интервале для x, где она регулярна и реальна, ибо она там и частично-монотонна.

В частности, все функции, рассматриваемые в элементарном анализе, как то: рациональные, целые и дробные, алгебраические, показательные, логарифмические, тригонометрические, измеримы (J).

Примечание. Но нельзя доказать, что сумма двух или нескольких измеримых (J) функций также измерима (J); это здесь неверно.

Функция ограниченной вариации тоже может и не быть измеримой (J). Наконец, не всякая непрерывная функция измерима (J). Ниже мы дадим этому пример.

§ 11. Пусть $f(x)$ ограниченная измеримая (J) функция в замкнутом интервале (a, b). Пусть в (a, b) $\alpha \leqq f(x) \leqq \beta$. Разделим интервал (α, β) на n частей точками $\alpha_0 = \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n = \beta$; обозначим:

$$E(\alpha_{k-1} \leqq f \leqq \alpha_k) = A_k$$

и возьмем суммы:

$$s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k-1}\, lA_k; \quad S = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, lA_k.$$

При $k = n$, мы обозначаем $A_n = E(a_{n-1} \leqq f \leqq \beta)$.

Будем увеличивать число точек деления интервала (α, β), уменьшая до нуля длину каждой части; $(\alpha_{k-1}\, \alpha_k)$; от этого, как легко видеть, s увеличивается, а S уменьшается. Но так как $s < S$, то существуют: $\lim s \leqq \lim S$.

Пусть длины всех интервалов $(\alpha_{k-1}, \alpha_k) < \varepsilon$; имеем

$$S - s = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \alpha_{k-1})\, lA_k < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} lA_k = \varepsilon\,(b - a);$$

это показывает, что $\lim(S - s) = 0$, т.-е. $\lim S = \lim s$.

Назовем этот общий предел интегралом (J) функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначим:

$$\lim s = \lim S = \int_{a(J)}^{b} f(x)\, dx.$$

Докажем, что значение этого интеграла не зависит от способа деления интервала (a, b), лишь бы длина каждой части деления стремилась к нулю. Пусть мы делим двумя способами интервал (α, β). Первому способу соответствуют суммы s, S и предел $\lim s = \lim S = J$. Второму способу соответствуют суммы s', S' и предел $\lim s' = \lim S' = J'$. „Наложим“ эти два деления друг на друга, т.-е. возьмем третье смешанное деление, производимое точками как первого, так и второго деления; этому делению соответствуют суммы s'', S''. Пусть первое и второе деления продолжены так далеко, что:

$$S - s < \frac{\varepsilon}{2}; \quad S' - s' < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\varepsilon > 0$ произвольное число. Имеем всегда: $S > S'' > s'' > s$; $S > S' > s' > s$; тогда, след, $|S'' - J| < \frac{\varepsilon}{2}$; $|S'' - J'| < \frac{\varepsilon}{2}$, т.-е. $|J - J'| < \varepsilon$, а так как ε произвольное число, то $J = J'$, что и требовалось доказать.

§ 12. **Свойства интеграла** (J)

1) Из определения интеграла (J) следует:

$$\alpha(b-a) \leqq \int_{a(J)}^{b} f(x)\,dx \leqq \beta(b-a), \quad \text{т.-е.} \quad \int_{a(J)}^{b} f(x)\,dx = \gamma(b-a),$$

где γ некоторое среднее значение между α и β. (Теорема о среднем значении).

В частности, если $f(x)$ непрерывна, то:

$\int_{a(J)}^{b} f(x)\,dx = f(x_1)(b-a)$, где x_1 некоторое значение x в интервале (a,b).

2) Если $C = \text{const.}$, то из определения же следует:

$$\int_{a(J)}^{b} C\,dx = C(b-a);$$

в частности:

$$\int_{a(J)}^{b} dx = b-a.$$

3) Если $C = \text{Const.}$, то:

$$\int_{a(J)}^{b} Cf(x)\,dx = C\int_{a(J)}^{b} f(x)\,dx; \quad \int_{a(J)}^{b} [f(x)+C]\,dx = \int_{a(J)}^{b} f(x)\,dx + C(b-a);$$

в частности:

$$\int_{a(J)}^{b} [-f(x)]\,dx = -\int_{a(J)}^{b} f(x)\,dx.$$

Это все непосредственно следует из определения.

4) Если $a < c < b$, то:

$$\int_{a(J)}^{b} f(x)\,dx = \int_{a(J)}^{c} f(x)\,dx + \int_{c(J)}^{b} f(x)\,dx;$$

эта формула непосредственно обобщается на конечное число слагаемых.

Можно определить:

$$\int_{b(J)}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a(J)}^{b} f(x)\,dx.$$

Но теорема об интеграле суммы здесь неверна.

Из § 9, следствия, следует, что, если для ф-ции $f(x)$ существует интеграл (J), то существует и интеграл (R); докажем, что эти интегралы равны. Разделим (a, b) на части точками $x_0 = a$, $x_1, x_2, \dots x_n = b$; пусть l_k и λ_k верхняя и нижняя границы ф-ции $f(x)$ в интеграле (x_{k-1}, x_k). Применяя свойства (1) и (4), найдем:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\lambda_k \leqq \int_{a(J)}^{b} f(x)\,dx \leqq \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\,l_k\,;$$

но крайние части этого двойного неравенства стремятся к одному и тому ж пределу — интегралу (R) от $f(x)$; это и доказывает наше предложение.

§ 13. Пример непрерывной функции, не измеримой (J).

Возьмем совершонный, нигде не густой, ансамбль в интервале (0,1) с положительной мерой в смысле Lebesgue'а. Этот ансамбль B получается исключением из отрезка (0,1) исчислимого множества открытых интервалов, которых сумма длин $l < 1$. Точки всех этих интервалов образуют открытый ансамбль A дополнительный к B. Ансамбль A не измерим (J) ибо $l_e A = 1$; но $l_i A = l < 1$, сл., и ансамбль B не измерим (J). Определим теперь функцию $f(x)$ следующим образом: во всех точках ансамбля B $f(x) = 0$; если (α, β) — один из интервалов ансамбля A, то в нем пусть:

$$f(x) = \frac{2(x-\alpha)(x-\beta)}{\alpha-\beta}$$

(т.-е. кривая, представляющая ф-цию $f(x)$ в (α, β), есть парабола с вершиной:

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad y = \frac{\beta-\alpha}{2}).$$

Во всех точках ансамбля A $f(x) > 0$; во всем интервалле (0,1) $f(x)$ непрерывна. Но ансамбли $E(f > 0)$ и $E(f = 0)$ не измеримы (J), т.-е. ф-ция $f(x)$ не измерима (J).

Заметим, что определенная здесь функция $f(x)$ — ограниченной вариации в интервале (0,1); ее положительная вариация равна отрицательной вариации $= \frac{1}{2}$.