Этюды по теории плоских кривых

Д. Синцов

I. Несколько замечаний по поводу книги G. Loria „Spezielle algebraische u. transscendente ebene Kurven"

1. Теория плоских кривых всегда привлекала с глубокой древности и до наших дней внимание исследователей. Чрезвычайное обилие и разнообразие уже открытых и изученных кривых делает в настоящее время желательным не столько установление новых и новых индивидуальных кривых, сколько более полную систематизацию уже изученного материала.

И в этом отношении нет недостатка как в более старых, так и в более новых сочинениях. Мы имеем обширную работу F. G. Teixeira „Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches", увенчанную в свое время Мадридской академией, появившуюся вторым изданием в 1908—1909 г. в 2-х томах, как 5-й и 6-й томы Собрания сочинений почтенного автора *). Gino Loria написал около того же времени свое упомянутое в заголовке сочинение, которое появилось в 1902 г. на немецком языке, и в 1910 г. появилось 2-ое издание 1-й части, пересмотренное и дополненное. Последнее обстоятельство доказывает вызванный им интерес равно как и интерес такой монографии, вызвавший также появление около того же времени двух книжек H. Wieleitner'a: „Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung" 1905 (Samml. Schubert № 43) u „Spezielle ebene Kurven" 1908 (Ib. № 56).

Поэтому я считаю уместным остановиться на работе G. Loria и сделать несколько замечаний, подтверждающих высказанное в начале положение. Это тем более уместно, что места, на которых я собираюсь указать, остались без изменения и во втором издании и, стало быть, не были в свое время отмечены.

2. Остановлюсь прежде всего на двух кривых 3 порядка, о которых G. Lovia говорит в n° 17 стр. 24 своей книги (1-е изд. и тоже 2-е изд.), а именно рассмотренную Korneck'ом (Progr. Oels, 1868) кубическую гиперболу

$$\prod_{1}^{3}{}_{i}\,(x \operatorname{Cos}\alpha + y \operatorname{Sin}\alpha_i - p_i) = a^3 \qquad (1),$$

---

*) В последнее время появился еще 3-й дополнительный том, но мне не удалось еще с ним ознакомиться.

геометрическое место точек, опущенные из которых на 3 данные прямые $x \operatorname{Cos} \alpha_i + y \operatorname{Sin} \alpha_i - p = 0$ ($i = 1, 2, 3$) (a) перпендикуляры дают постоянное произведение ($= a^3$). В том же самом параграфе приводится кривая, рассмотренная J. Alvera (Diss. Rostock, 1879): $xy\ (x + y) = a^3$ (2).

Обе кривые, как отмечает G. Loria, имеют 3 вещественные точки перегиба на бесконечности, и естественно ожидать тесной между ними связи, на что, однако, у G. Loria указаний нет. Нетрудно, однако, эту связь установить: кривая (2) есть предельный случай одного частного вида кривой (I). Действительно, если две из трех прямых (a) взаимно перпендикулярны, и мы примем их за оси координат, то (I) приводится к виду:

$$xy\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1\right) = a'^3 \qquad (1')$$

Если при том 3-я прямая делает на новых осях равные отрезки ($p = q$), то (I′) примет вид

$$xy\ (x + y - p) = a''^3 \qquad (1'')$$

Перейдем теперь к пределу $p = 0$. Уравнение (1″) переходит в (2), — результат, который получается сразу, если обратить внимание, что (2) соответствует тому частному случаю (1), когда все три прямые (a) проходят через одну точку, две из них взаимно-перпендикулярны и третья делает с ними равные углы.

3. Другой пример представляет кубическая дупликатриса (Cubique duplicatrice) $x^3 = l\,(x^2 + y^2)$ Gohiere de Longchamps *), которой вместе с параболическим листом G. Loria посвящает особую главу (отд II, гл. 13, с. 89 в 1-ом издании и гл. 14 с. 93 во втором). В примечании G. Loria указывает, что кривая встречается уже у Uhlhorn'a в его „Entdeckungen in d. höheren Geometrie", 1809 под именем Toxoïde. Если оставить в стороне построение, действительно весьма простое, но впрочем сразу ясное, если перейти к полярным координатам (и разделить на ρ^2) $\rho = l\operatorname{Cos}^{-3}\theta$ (3′) то нетрудно усмотреть, что кривая имеет гораздо большую давность. Действительно, если уравнение(3) переписать под видом $ly^2 = x_2\,(x - l)$, то ясно, что это одна из расходящихся парабол Ньютона, именно его parabola punctata.

Интересно, что и другая разбираемая в той же главе кривая

$$x^3 = a\ (x^2 - y^2) \qquad (4)$$

прямой параболический лист того же G. de Longchamps (там же n⁰ 121, с. 120 Loria, n° 51 с. 90 изд; и тот же n⁰, с. 93 2-го издания) оказывается также одною из расходящихся парабол Ньютона. Перепишем, действительно, (4) немного иначе:

$$-ay^2 = x^2\ (x - a) \qquad (4')$$

*) Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre. P. 1890.

и изменим положительное направление оси x-ов на противоположное (замена x на $-x$) уравнение примет вид:

$$ay^2 = x^2 \ (x + a), \tag{4''}$$

т.-е. кривая не что иное, как Ньютонова parabola nodata.

Заметим, что и косой параболический лист G. de Longchamps (n^0) 22 c. 121, G. Loria, n^0 51, с. 90—1-е изд. 94-5—2-е изд.), определяемый уравнением

$$x^3 = a \ (x^2 - y^2) + bxy \tag{5}$$

также оказывается очень близким к расходящимся параболам.

Действ., (5) м. б. приведено к виду:

$$a \ (y - \frac{b}{2a} x)^2 = - x^2 \ (x - c), \tag{5'}$$

где для краткости положено $c = a + \frac{b^2}{4a}$, и след., подстановкою $x' = -x$, $y' = = \frac{ay - bx}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, т.-е. поворотом оси y-ов на некоторый угол и обменом положительного и отрицательного направления оси x-ов приводится к тожественному с (4″) виду:

$$a'y'^2 = x'^2 \ (x' + c), \tag{5''}$$

но только в косоугольных координатах.

4. Небольшое замечание по поводу 1-ой кривой Krimphoff'а, (Loria, 1-е изд. с. 249, отд. IV, гл. 6n°114, 2-е изд. тот же отд., гл. 7,n°114, с. 296) уравнение которой в обоих изданиях Loria одинаково напечатано:

$$(2x + y) \ (x^2 + y^2)^4 + 2y \ (5y^4 + 10x^2y - 3y^4) - 2x + y = 0 \tag{6}$$

Средний член напечатан неверно,—он должен быть.

$$+ 2y \ (5x^4 + 10x^2y^2 - 3y^4).$$

Правильность такой замены бросается в глаза. Но было бы вряд ли уместно приводить необходимые для проверки довольно продолжительные вычисления.

5. Мое последнее замечание касается кривой, которую в указателе чертежей (табл. VI, n° 43) и в 1-ом и во 2-ом издании Loria называет Doppel-Herz-Kurve, в тексте же самой книги для кривой фиг. 43 совершенно правильно дается уравнение

$$2y = \sqrt{x \ (2a - x)} + \sqrt{x \ (4a - x)}$$

(у G. Cramer, а в его Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, Gén. 1750, стр. 435 — 6, фиг. 134. табл. XVIII) или в рациональном виде по Cramer'у:

$$y^4 + y^2x^2 - 6ay^2x + a^2x^2 = 0$$

(у Cramer'а под 1-ым корнем стоит $x(8a - x)$, т.-е. у G. Loria (с. 180—1-е изд. 190—2-е изд.) заменено 2a через a.

Вышеупомянутое название (Doppel-Herz-K.) Loria придает в тексте (стр. 180, resp. 194) другой кривой, также построенной Cramer'ом (там же, стр. 436—438, табл. XVIII, n° 135), основываясь на словах Cramer'а, не совсем точно переданных у Loria: On voit par là, et on verrait encore plus clairement par un détail, mais un peu long, que la courbe a la figure de deux coeurs qui se pénétrent l'un l'autre par la pointe, et se croisent en B et en b qui sont les deux points doubles que nous a donné le calcul. Ее уравнение:

$$y^4 + x^4 - 2a^2y^2 - 2b^2x^2 + b^4 = 0$$

При $a = b$ кривая распадается, как замечает Cramer, на два эллипса:

$$x^2 + y^2 - a^2 \pm xy\sqrt{2} = 0$$

и имеет 4 двойные точки.

6. В заключение укажу еще на несколько опечаток, не исправленных во 2-ом изд. с. 95—1-е изд. (99 — 2-е изд.) вм. $I^3 - 6I^2 = 0$ д. б. $I^3 - 6J^2 = 0$. Наконец в уравнении Muschellinie A. Dürer'а (228 с., ур. 13—во 2-ом изд., 212 с в 1-ом) вм. $(a^2 - y^2)$ должен стоять множитель $(b^2 - y^2)$.

Отсюда страницы по 1 изданию:

Стран.	Строка	Напечатано	Должно быть
49	3 св.	$b - ctg\ \omega$	$a - c\ .\ tg\ \omega$
49	8 „	$b\ .\ \sin\omega$	$a\ .\ \sin\omega$
49	10 „	$= y(bx - cy)$	$= y(ax - cy)$
49	15 „	$y^2 = 2cx$ и $(0, \frac{a}{2}$	$y^2 = 4cx$ и $(0,a)$
81	11 сн.	$x + a = 0$	$x - a = 0$
182	17 св.	$a\,x^2 =$	a^2x^2
212	13 „	Кривая 55a не на табл. VIII, а на табл. VII	
212	21 „	$+\frac{y}{a-1}$	$+\frac{y}{a-z}$
246	13 сн.	$x^2 + y^2 = 1 + \sin^2 2\varphi$	$x^2 + y^2 = r^2\ (1 + \sin^2\ 2\varphi)$
310	3 „	в формуле (4) после x^4 должно стоять $= 0$,	
366	14 „	$Y = \varphi\ (x,y)$	$Y = \psi\ (x,y)$
481	11 „	в выражении y при $R - v$ пропущен множитель $\sin\varphi$	

II. Об одной любопытной циссоидальной кривой

Предыдущему м. б. несколько противоречит, что следующий за 1-ым этюд я посвящаю одному частному случаю, не вполне м. б. новому, но который привлекает к себе внимание некоторыми своими особенностями и удобством для приложений.

1. Закон образования. Как известно (см., напр., H. Wieleitner „Spez. Kurven", Ав. I) циссоидою или киссоидою называют вообще кривую, построенную при помощи двух данных кривых Γ и Γ′ и точки О, лежащей или не лежащей на них, по такому условию, что из О проводим секущие до пересечения с Γ и Γ′ в точках M и M′ и на том же радиусе OMM′ от O откладываем $ON = \overline{MM'}$. Геометрическое место точки N и есть искомая кривая.

Применим это построение к такому случаю: за Γ′ возьмем параболу $y^2 = 2px$(a) за Γ — ее круг кривизны в вершине (имеющий с кривою прикосновение 3-го порядка и лежащий целиком внутри параболы) $(x - p)^2 + y^2 = p^2$ или $x^2 + y^2 - 2px = 0$(в), а за точку 0 — общую точку этих кривых.

В полярных координатах уравнение параболы:

$$r = 2p \frac{\operatorname{Cos}\Theta}{\operatorname{Sin}^2\Theta},$$

круга кривизны в вершине $r = 2p \operatorname{Cos}\Theta$.

Таким образом, полярное уравнение искомой кривой

$$r = 2p \frac{\operatorname{Cos}^3\Theta}{\operatorname{Sin}^2\Theta}$$

или в прямоугольных координатах (O начало).

$$(x^2 + y^2)\, y^2 - 2p\, x^3 = 0 \tag{1}$$

Это кривая 4. порядка, циркулярная и уникурсальная. Ее уравнение в параметрической форме $(x = ty)$:

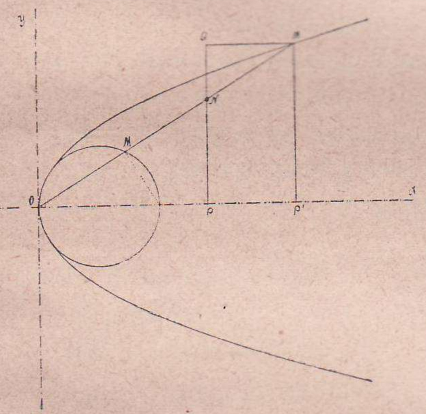
$$x = \frac{2pt^4}{1+t^2}, \qquad y = \frac{2pt^3}{1+t^2} \tag{2}$$

2. Приближенное построение кривой. Написавши уравнение кривой под видом $x^2(y^2 - 2px) + y^4 = 0$, заключаем, что не м. б. точек кривой в той части плоскости, где $y^2 - 2px > 0$, т. е. вне производящей параболы. Написав же под видом $(x^2 + y^2 - 2px)\, y^2 + 2px\ (y^2 - x^2) = 0$, видим, что проведя через начало биссектрису осей $y = \pm x$ выделим еще две области, где нет точек кривой: *вне* круга (в) при $y^2 > x^2$ и внутри его при $y^2 < x^2$.

3. Асимптоты. Касательною на безконечности является безконечно удаленная прямая; две другие асимптоты мнимые и суть изотропные прямые Но интересно, что кривая имеет *криволинейную асимптоту*, которой служит

производящая парабола (Γ'), и притом в этом можно убедиться чисто геометрическими соображениями. Действительно, если из точки M' параболы (а), соотв. углу Θ, опустить перпендикуляр $M'Q$ на продолженную ординату соотв. точки N кривой (1), то $NM' = OM = 2p \operatorname{Cos}\Theta$ и $\angle QM'N = \Theta$, а потому $NQ = p \sin 2\Theta$. Ясно, что $\lim NQ = 0$ при $\Theta \to 0$ и так как лежащая на той же ординате точка параболы (а) лежит между N и Q, *ибо ордината* (1) *менее* ординаты (а), то тем более их расстояние имеет своим пределом 0 для $\Theta \to 0$. Можно было бы, конечно, вычислить непосредственно и самую разность ординат.

Ордината кривой (1):



$$N'P = y = 2p \frac{\operatorname{Cos}^3\Theta}{\operatorname{Sin}\Theta},$$

Ордината параболы (а) соотв. тому же x:

$$N'P = y = 2p \frac{\operatorname{Cos}^2\Theta}{\operatorname{Sin}\Theta}$$

$$PQ : y = 2p \frac{\operatorname{Cos}\Theta}{\operatorname{Sin}\Theta}$$

Поэтому разность $N'N'$, о которой идет речь

$$\overline{NN'} = \frac{p \operatorname{Sin}2\Theta . \operatorname{Cos}\Theta}{1 + \operatorname{Cos}\Theta}$$

N' на чертеже не показано.

Примеры криволинейных асимптот не так обильны и частью несколько искусственны, и с этой стороны рассматриваемая кривая довольно интересна.

4. Тангенциальное уравнение кривой. *1-й прием.* Исключение σ, x, y, z из уравнений: $\sigma u = 2xy^2 - 6px^2z$, $\delta v = 2x^2y + 4y^3$, $\sigma w = -2px^3$ $ux + vy + wz = 0$ дает в результате (для упрощения вычислений полагаем $\sigma = 2$ и сокращаем)

$$v^2 (27p^2v^2 - 72 puw + w^2) - \frac{2uw}{p}(8pu - w)^2 = 0 \tag{3}$$

уравнение 4-й степени относительно u, v, w.

2-й прием. Из параметрического уравнения кривой находим:

$$u = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(1 + 3t^2)\,t}{2\,(1 + 2t^2)},\quad v = y - x\frac{dy}{dx} = \frac{p}{t\,(1 + 2t^2)}$$

Исключая t, приходим к уравнению

$$[27p^2 - 72puv + u^2] - \frac{2uv}{p}(v - 8pu)^2 = 0. \tag{3'}$$

уравнение совпадающее с предыдущим, если между координатами установить связь: переменным u, v, w в (3) соответствуют: $u, -1, v$ в (3').

Итак наша кривая есть кривая 4-го класса.

5. Особенные точки и касательные. Начало координат (0,0) есть тройная точка, — в уравнении (I) отсутствует не только свободный член, но

и члены 1-го и 2-го измерения в x, y, и потому при $x=0$, $y=0$ уничтожаются как сама f так и ее производные 1-го и 2-го порядка; из производных же 3-го порядка $f'''_{x^3} = -12p \neq 0$, и потому уравнение касательных в этой точке

$$-12p. \; X^3 = 0.$$

Все три касательные совпадают, (0,0) есть точка затупления (Spitzpunkt). Кривая вся лежит по одну сторону касательной в этой точке.

Других особенных точек кривая не имеет ни конечных, ни в бесконечности. Интересно, что для этой кривой можно проверить справедливость разложения присущей ей особенности высшего порядка на элементарные особенности.

Определим с этою целью сначала точки перегиба. Приведя (I) к однородному виду, составляем Гессіену, которая будет:

$$-72p^2x^4(x^2+6y^2)=0. \tag{5}$$

Значению $x=0$ соответствует особенная точка (0,0), и для точек перегиба остается один множитель $x^2+6y^2=0$, приводящий к 2 мнимым точкам перегиба.

Тогда по формулам Плюккера $i = 3m(m-2) - 6d - 8r$ приходим к уравнению:

$$3d+4r=11, \tag{6}$$

целочисленные решения которого суть $d=1$, $r=2$, как это и дается, напр. у H. Wieleitner'a для точки затупления (Spez. Kurven, 165).

Полученные характеристики особенной точки надо, однако, проверить на выражении для класса кривой $n = m(m-1) - 2d - 3r$.

Получаем $n=4$, — как мы действительно и получили, составляя на самом деле тангенциальное уравнение кривой.

Род кривой

$$p = \frac{(m-1)\ (m-2)}{2} - d - r$$

также получается при этом равным 0, как и д. б, так как наша кривая, как мы уже видели, уникурсальная.

До сих пор ничто не указывает на существование каких-либо еще особенностей нашей кривой. Но если обратимся к двойственным Плюккеровским формулам

$$p = \frac{(n-1)\ (n-2)}{2} - \delta - \rho$$
$$m = n(n-1) - 2\delta - 3\rho$$
$$\nu = 3n\ (n-2) - 6\delta - 8\rho$$

где δ — число двойных касательных, и ρ число возвратных касательных (т.-е. точек перегиба), то при подстановке уже найденных m, n, r и ρ, мы приходим к $\rho = 1$ что указывает на присутствие у кривой двойной касательной.

Для определения последней обращаемся к уравнению (3), в котором полагаем $w=1$. Тогда условия $\varphi'_u = 0$; $\varphi'_v = 0$ приводят к единственному решению $v=0$, $8pu-1=0$, т. е. прямая $x+8p=0$ есть двойная касательная кривой (1). Действительно, подставляя в (1) значение $x = -8p$ получаем для y уравнение

$$(y^2 + 32p^2)^2 = 0, \tag{7}$$

т.-е. прямая $x + 8p = 0$ есть уединенная касательная и $(-8p, \pm 4pi\sqrt{2})$ — ее мнимые точки прикосновения.

6. Радиус кривизны. Обращаясь к параметрической форме (2), составляем выражение радиуса кривизны $R = \pm p t^2 \frac{(9 + 4t^2)^{3/2}}{6 + t^2}$; (8)

при $t = 0$, $R = 0$: в точке затупления радиус кривизны обращается в 0. К тому же результату придем, исходя из полярного уравнения кривой.

7. Эволюта. Уравнение эволюты кривой (1) получим, исходя из уравнения (4), в параметрической форме под видом:

$$X = \frac{3pt^2(9 + 2t^2)}{6 + t^2}, \qquad Y = -\frac{8pt^3(3 + t^2)}{6 + t^2} \tag{9}$$

Эволюта проходит через точку затупления. При t безконечно малом кривая ведет себя, как кривая

$$\xi = \frac{3pt^2 9}{6}, \qquad \eta = -\frac{8pt^3 . 3}{6},$$

т.-е. как полукубичная парабола $p\eta^2 = \frac{128}{729}\xi^3$

Она, т. о., имеет в начале координат точку возврата 1-го рода с радиусом кривизны равным нулю.