Исследования из области теории геодезических линий и геодезических кругов

Геодезические круги и геодезически параллельные кривые [1])

Т. Котов (†)

В теории поверхностей термин „геодезический круг" употребляется различными авторами в различном смысле.

Как известно, круги в плоскости являются ортогональными траекториями пучка прямых, проходящих через некоторую точку; вместе с тем круги могут быть определены, как кривые постоянной кривизны.

Беря первое свойство кругов за основное, Bianchi называет геодезическими кругами кривые, которые получаем, если отложим на всех геодезических линиях, проходящих через некоторую точку поверхности, длину, называемую им радиусом геодезического круга, и соединим концы; подобно кругам, эти кривые всегда замкнуты и пересекают под прямым углом все геодезические линии однако, в общем случае геодезическая кривизна их непостоянна.

Darboux, исходя из второго свойства кругов, называет геодезическими кругами кривые постоянной геодезической кривизны. В дальнейшем я буду называть геодезическими кругами кривые постоянной геодезической кривизны. В настоящей работе я занимаюсь исследованием некоторых свойств ортогональных траекторий семейства геодезических линий, причем попутно разбираю случай, когда свойства геодезических кругов Bianchi и Darboux имеют место одновременно.

Рассмотрим геодезически полярную или геодезически параллельную систему геодезических линий и их ортогональных траекторий. Геодезически параллельные кривые я буду называть параллельными. Примем геодезические линии за координатные линии $v = \text{const.}$, а ортогональные траектории за $u = \text{const.}$ В указанной системе координат линейный элемент поверхности имеет вид

$$ds^2 = du^2 + C^2 dv^2.$$

Геодезическая кривизна $\frac{1}{\rho_u}$ кривых $u = \text{const.}$ для линейного элемента

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$$

---

[1]) Доложено в заседании Харьковского Математического Общества 26 марта 1922 г.

дается формулой [1]
$$\frac{1}{\rho_u} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},$$
которая в нашем случае напишется
$$\frac{1}{\rho_u} = -\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial u}.$$

Для того, чтобы кривые $u = \text{const.}$ были кривыми постоянной геодезической кривизны, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{1}{\rho_u}$ было функцией только от u:
$$\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial u} = \varphi(u)$$

Интегрируя, получим условие, налагаемое на коэффициенты линейного элемента
$$C = U.V,$$
где U — функция только от u, V — функция только от v.

Форма линейного элемента
$$ds^2 = du^2 + U^2.\, dv^2_1$$
где $Vdv = dv_1$, показывает, что поверхность наложима на поверхность вращения и что геодезические линии $v = \text{const.}$ и их ортогональные траэктории образуют изотермическую систему.

Таким образом, необходимым и достаточным условием для того, чтобы ортогональные траэктории геодезических линий были геодезическими кругами, является их изотермичность.

Можно доказать, что условием, необходимым для того, чтобы параллельные кривые были геодезическими кругами, является постоянная кривизна поверхности вдоль каждой параллельной кривой.

В самом деле
$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\frac{\partial C}{\partial u}}{C}\right] = \frac{\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}}{C} - \left(\frac{\frac{\partial C}{\partial u}}{C}\right)^2$$

Из условия, что $\dfrac{\frac{\partial C}{\partial u}}{C}$ есть функция только от u, вытекает, что
$$\frac{\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}}{C}$$
есть функция только от u. Но по формуле Гаусса, кривизна поверхности K выражается формулой:
$$K = \frac{\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}}{C}$$

[1]) Bianchi. Vorlesungen über Differentialgeometrie. 2-e Auflage, 1910 г., стр. 147.

следовательно, K есть функция только от u, т.-е. кривизна поверхности вдоль каждой параллельной кривой — геодезического круга — постоянна.

Обратное заключение, вообще говоря, несправедливо. Параллельные кривые при постоянной кривизне поверхности вдоль каждой из них могут не быть геодезическими кругами.

Однако, можно показать, что если кривизна поверхности вдоль каждой параллельной кривой семейства постоянна, и если хоть одна из них — геодезический круг, то все остальные параллельные кривые этого семейства — также геодезические круги.

Иначе говоря, в семействе параллельных кривых с постоянной кривизной поверхности вдоль каждой кривой или все кривые — геодезические круги или ни одна не является геодезическим кругом.

Гауссово уравнение дает при нашем предположении $K = U$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = -CU \text{ или } \frac{d^2 C}{du^2} = -CU.$$

Выберем два линейно независимых решения этого дифференциального уравнения: $\varphi(u)$ с начальными условиями $\varphi(0)=1$, $\varphi(0)=)$ и $\psi(u)$ с начальными условиями $\psi(0) = 0$, $\psi(0) = 1$.

Общий интеграл дифференциального уравнения имеет вид:

$$C = V\varphi(u) + V_1\psi(u),$$

где V и V_1 — функции только v.

Далее возможны два предположения:

1) Кривая $u = 0$ представляет правильную кривую линию — геодезический круг. По свойствам геодезически параллельной системы координат

$$C(0, v) = 1,$$

так как дуга вдоль кривой $u = 0$ измеряется приращением параметра v.

Подставляя $u = 0$ в выражение общего интеграла, получаем

$$V = 1.$$

Так как кривая $u = 0$ геодезический круг, то

$$\left[\frac{\frac{\partial C}{\partial u}}{C}\right]_{u=0} = \text{const},$$

т.-е.

$$\left[\frac{\varphi(u) + V_1\psi(u)}{\varphi(u) + V_1\psi(u)}\right]_{u=0} = \text{const}$$

при всяком значении v, откуда:

$$V_1 = \text{const}.$$

Но тогда

$$C = \varphi(u) + \text{const}\,\psi(u),$$

т.-е. все линии $u = \text{const}$ геодезические круги.

Линейный элемент показывает, что поверхность в этом случае наложима на поверхность вращения так, что $u = \text{const}$ совпадают с параллелями, $v = \text{const}$ с меридианами поверхности вращения.

2) Предположим, что геодезические линии $v = \text{const}$ проходят все через неподвижную точку P, которая служит полюсом геодезически полярной системы координат и соответствует $u = 0$.

Тогда по свойствам полярной системы

$$C(0, v) = 0 \qquad \left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)_{u=0} = 1$$

т.-е. имеем по первому свойству условие

$$V = 0.$$

Отсюда

$$C = V_1\psi(u) \qquad \frac{\partial C}{\partial u} = V_1\psi'(u)$$

и по второму свойству C, принимая во внимание выбранную функцию $\psi(u)$

$$V_1 = 1$$

$$C = \psi(u).$$

Этот вид коэффициента C линейного элемента указывает, что кривые $u = \text{const}$ являются геодезическими кругами; поверхность наложима на поверхность вращения.

В случае геодезически полярной системы координат, полюс можно считать за предельную кривую — геодезический круг, на котором кривизна поверхности постоянна. Таким образом, теорема доказана.

2-ой случай можно выделить особо.

Если через точку P проведем геодезические линии и отложим на них от P постоянные длины *u*, то, если вдоль кривых $u = \text{const}$ кривизна поверхности постоянна, эти кривые являются геодезическими кругами (кривыми постоянной геодезической кривизны).

Мы видим, что высказанное раньше необходимое условие, чтобы параллельные кривые были геодезическими кругами, является достаточным, если хоть одна параллельная кривая есть геодезический круг. Вместе с тем, чтобы на поверхности существовала ортогональная система геодезических линий и параллельных геодезических кругов, необходимо и достаточно, чтобы поверхность была наложима на поверхность вращения.

На поверхности, наложимой на поверхность вращения переменной кривизны, только линии, соответствующие меридианам и параллелям, образуют ортогональную систему геодезических кривых и геодезических кругов.

На поверхности постоянной кривизны, все кривые, геометрическое место точек, равноудаленных геодезически от какой-либо точки, обладают постоянной геодезической кривизной.

Таким образом, на поверхностях постоянной кривизны, и только на них, все геодезические круги Bianchi являются геодезическими кругами Darboux. Однако, не все круги Darboux являются кругами Bianchi (напр., на псевдосфере кривизны $-\frac{1}{R^2}$ кривые геодезической кривизны $<\frac{1}{R}$ не имеют центра.

Рассмотрим на поверхности, наложимой на поверхность вращения, ортогональное семейство геодезических линий $v = \mathrm{const}$ и геодезических кругов $u = \mathrm{const}$. Пусть $K = f(u)$ кривизна поверхности задана. Найдем, какому закону подчинена $\frac{1}{\rho_u}$ геодезическая кривизна кривых $u = \mathrm{const.}$, соответствующих параллелям.

Воспользуемся формулой Liouville'я [1]) из теории поверхностей для ортогональной системы координат:

$$K = \frac{\partial}{\partial s_v}\left(\frac{1}{\rho_u}\right) + \frac{\partial}{\partial s_u}\left(\frac{1}{\rho_v}\right) - \left(\frac{1}{\rho_u}\right)^2 - \left(\frac{1}{\rho_v}\right)^2,$$

где $\frac{\partial}{\partial s_u}$ представляет производную, взятую по дуге параметрической линии $u = \mathrm{const.}$, аналогично $\frac{\partial}{\partial s_v}$ производную, взятую по дуге линии $v = \mathrm{const.}$

Подставляя в правую часть $ds_v = du$, $\frac{1}{\rho_v} = 0$, $\frac{1}{\rho_u} = U$, получим:

$$K = \frac{dU}{du} - U^2, \tag{α}$$

обыкновенное дифференциальное уравнение искомой функции U от независимой переменной u.

Рассмотрим сначала поверхности постоянной кривизны.

1) Пусть $K = \frac{1}{R^2}$ постоянная положительная величина. Уравнение (α) напишется:

$$\frac{dU}{du} = U^2 + \frac{1}{R^2}.$$

[1]) Bianchi, стр. 150.

Интегрируя, получим

$$U=\frac{1}{R}\operatorname{tang}\frac{u-c}{R},$$

где c произвольная постоянная, которая существенного значения не имеет. При $u=c$, имеем $U=0$, т.-е. геодезический круг является геодезической линией. При $u=R.\,\frac{\pi}{2}+c$ геодезический круг обращается в точку; имеем полярную геодезическую систему, как на шаре.

2) Пусть поверхность постоянной отрицательной кривизны $K=-\frac{1}{R^2}$. Уравнение (α) напишется

$$\frac{dU}{du}=U^2-\frac{1}{R^2}.$$

Интегрируя, получаем

$$U=\frac{1}{R}\,\frac{1+C\,e^{\frac{2u}{R}}}{1-C\,e^{\frac{2u}{R}}}$$

откуда при $C>0$, можем написать, полагая $C=e^{-\frac{2}{R}c}$

$$\text{(1-й тип)}\qquad U=\frac{1}{R}\,\frac{1+e^{\frac{2}{R}(u-c)}}{1-e^{\frac{2}{R}(u-c)}}=-\frac{1}{R}\operatorname{cotgh}\frac{u-c}{R};$$

при $C<0$, перепишем U в виде:

$$\text{(2-й тип)}\qquad U=\frac{1}{R}\,\frac{1-e^{\frac{2}{R}(u-c)}}{1+e^{\frac{2}{R}(u-c)}}=-\frac{1}{R}\operatorname{tangh}\frac{u-c}{R}.$$

При $C=0$ и $C=\infty$, имеем

$$\text{(3-й тип)}\qquad U=\frac{1}{R}\quad,\quad U=-\frac{1}{R}.$$

Произвольная постоянная c существенного значения не имеет: она фиксирует начало счета для u.

Так как

$$\operatorname{ctgh}\,0=\infty\,,\ \operatorname{ctgh}\,\infty=1\,,\ \operatorname{ctgh}\,(-x)=-\operatorname{ctgh}x,$$

то первая форма U соответствует геодезически полярной системе с полюсом в $u=c$. При $u=\infty$ получаем предельный геодезический круг с $U=-\frac{1}{R}$.

Вторая форма U соответствует геодезически параллельной системе с геодезической линией $u=c$; при $u=\infty$ имеем предельный геодезический круг $U=-\frac{1}{R}$ (как известно $\operatorname{tgh} 0=0$, $\operatorname{tgh}\infty=1$, $\operatorname{tgh}(-x)=-\operatorname{tgh}x$).

Третий тип соответствует геодезическим кругам постоянного радиуса $\pm\frac{}{R}$

Пример первого типа геодезических кругов дают параллели поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны эллиптического типа с конической точкой. Второй тип дают параллели поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны гиперболического типа. На псевдосфере параболического типа параллели имеют постоянную геодезическую кривизну $\frac{1}{R}$ третьего типа.

Края поверхности, состоящие из особенных линий, обрывают систему геодезических кругов. Таким образом, на поверхности существует вообще только часть рассмотренных нами систем геодезических кругов до пересечения с краями поверхности.

3) На развертывающихся поверхностях

$$\frac{dU}{du}=U^2,$$

откуда

$$-\frac{1}{U}=u-c \text{ или } U=\frac{1}{c-u},$$

решение, соответствующее пучку концентрических окружностей плоскости.

Кроме того, имеем решение

$$U=0,$$

соответствующее двум ортогональным семействам геодезических линий, которые по теории Liouville'a существуют только на развертывающихся поверхностях.

В общем случае поверхности, наложимой на поверхность вращения переменной кривизны, дифференциальное уравнение (α) дает геодезическую кривизну системы параллельных геодезических кругов с постоянной кривизной поверхности вдоль каждого круга.

Уравнение (α) типа Riccati. При заданном K, оно определяет геодезическую кривизну семейства параллельных геодезических кругов ∞^1 различных поверхностей вращения, неналожимых друг на друга.

Если известно U на одной из этих поверхностей, то для всех остальных мы найдем U при помощи квадратур.

Sur les courbes parallèles et les cercles géodésiques

par T. Kotoff (Kharkoff).

Résumé.

L'auteur examine les propriétés des courbes parallèles de la surface. Il démontre que si une famille de courbes parallèles à courbure de surface constante le long de chaque courbe contient un cercle géodésique, toutes ses courbes sont des cercles géodésiques (au sens de M. Darboux).

L'auteur examine la relation entre la courbure géodésique des parallèles et la courbure de la surface de revolution

$$\frac{dU}{du} = U^2 + K$$

et s'arrête principalement sur les surfaces à courbure constante.