Геометрический метод определения и исследования деформации линейчатой поверхности

А. С. Вайнфельд

Определение линейчатой поверхности и исследование ее деформации я совершаю на основании трех теорем, для ясности формулировки которых я остановлю внимание читателя на нижеследующем.

Условимся называть классом данной линейчатой поверхности весь ансамбль линейчатых поверхностей, на нее наложимых. Всякую же совокупность линейчатых поверхностей, обладающих одним и тем же, всем им общим, геометрическим свойством,—абсолютным или относительным, безразлично,—и совершенно различных по другим своим геометрическим свойствам, условимся называть семейством поверхностей.

Уравнение всякой линейчатой поверхности можно писать в виде

$$x = y(u) + ve(u)$$

где $y(u)$ определяет директрису, а $e(u)$ орт, фиксирующий направление образующей.

Назовем функции $y(u)$ и $e(u)$, посредством которых это уравнение составлено,—непосредственно-определяющими поверхность функциями.

Другими словами, мы называем директрису и сферическую индикатрису образующих геометрическими элементами поверхности, ее непосредственно определяющими, при установленном помощью того же уравнения соответствии между точками рассматриваемых кривых.

Всякую функцию параметра директрисы, составленную из непосредственно-определяющих поверхность функций и их производных, назовем геометрической функцией поверхности, или ее геометрическим элементом — функцией, если приравнявши такую функцию постоянной, мы тем самым получим критерий особого класса или семейства линейчатых поверхностей. При этом мы всегда предполагаем поверхность отнесенной к ее геодезическим параметрам в системе, состоящей из образующих и их ортогональнных траекторий.

Согласно данному определению, функция

$$k(u) = \left|\, |ee'y'| \,\right| \tag{1}$$

где мы не принимаем в расчет знака тривектора, а лишь его абсолют, является геометрической функцией поверхности: приравнявши ее нулю, получим критерий всех поверхностей наложимых на плоскость (класса плоскости). Назовем этот элемент линейчатой поверхности ее дискриминантом.

Рассматривая только действительные линейчатые поверхности с действительными образующими и исключая совершенно из рассмотрения поверхность цилиндрическую, — тот случай, когда нет сферической индикатрисы образующих, как кривой,— мы всегда можем выбрать в качестве параметра, определяющего точки директрисы, соответствующую дугу индикатрисы, отсчитанную от некоторой на ней точки. При таком положении, $e'^2 = 1$, и для параметра распределения касательных плоскостей γ, входящего, как фактор, снабженный определенным знаком, в формулу Шаля, имеем $\gamma = - |ee'y'|$. (1′)

Я отделяю эти два элемента, параметр распределения, являющийся по численному значению своему алгебраическим количеством от дискриминанта поверхности, элемента существенно положительного. Когда две поверхности различаются друг от друга только лишь знаком при функции, определяющей их параметры распределения (симметричные поверхности *), то они, имея различные параметры распределения, в то же время имеют один и тот же дискриминант и являются тождественными, с точки зрения абсолютной геометрии, будучи наложимы друг на друга. Для абсолютного определения поверхности нет надобности знать ее параметр распределения, но необходимо знать ее дискриминант.

Перейдем теперь к рассмотрению функции $d(u)$, выражающей расстояние между соответствующими, по образующей, точками произвольно взятой директрисы поверхности и ее стрикционной линии. Эга функция, при принятом нами положении $e'^2 = 1$, определяется формулой: $d(u) = -y' . e'$ (2)

В статье моей „Стрикционные линии“ я подробно рассмотрел особое семейство линейчатых поверхностей, имеющее своих членов как среди развертывающихся, так и косых поверхностей, критерием которого в упомянутой геодезической системе координат является соотношение $d = \mathrm{const}$. (в)

Вся группа косых поверхностей этого семейства реализуется всеми поверхностями бинормалей всевозможных кривых двоякой кривизны, включая в число таковых и прямую линию. Вся группа развертывающихся поверхностей семейства реализуется всеми поверхностями коническими и плоскостью. Геометрически все поверхности семейства характеризуются тем, что у них стрикционная линия является ортогональной траекторией образующих. Вследствие возможности для всех поверхностей семейства совмещать директрису—ортогональную траекторию образующих со стрикционной линией, критерий (в) может всегда быть заменен равносильным ему критерием $d = 0$, и, наоборот (чего никак нельзя сказать относительно критерия $k = 0$).

Согласно определению, функция $d(u)$, определяемая формулой (2), есть геометрическая функция поверхности. Назовем этот элемент поверхности ее параметром удаления (директрисы от стрикционной).

---

*) Удерживаем для таких двух, всегда существующих (Beltrami, An. di Mat., VII, p. 105) поверхностей название симметричных, предложенное Bour'ом (J. E. P., c. 39, p. 45).

Обозначая функцию y'^2 через $c(u)$, мы, при нашем положении $e'^2 = 1$, имеем:

$$E(u, v) = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|^2 = v^2 - 2dv + c \tag{3}$$

особенность, характеризующую, при условии действительности прямолинейных образующих и выбора их параметрическими линиями (u), всякую линейчатую поверхность совместно со всяким возможным ее изгибанием, и состоящую в том, что для всякой такой поверхности основная величина первого порядка E всегда представляется многочленом второй степени относительно v, если исключить из рассмотрения, как было сказано, цилиндрическую поверхность и ее частный случай по способу образования — плоскость. *)

Так как в принятой нами геодезической системе координат вектор y' и два орта e' и $\|ee'|$, одновременно перпендикулярные к орту e, представляют систему трех компланарных векторов, то на основании формул $(1')$ и (2), имеем для касательного вектора директрисы — ортогональной траектории образующих

$$y' = -de' - \gamma\,|ee'| \tag{4}$$

Обозначая s дугу ортогональной траектории образующих, отсчитанную от некоторой на ней точки в том направлении, куда она возрастает вместе с параметром u, мы имеем $\frac{ds}{du} = \mathrm{mod}\,y'(u)$, и из (4) получим

$$c = \left(\frac{ds}{du}\right)^2 = d^2 + k^2 \tag{5}$$

Чтобы получить выражение для модуля касательного вектора общей кривой $y(u)$, пересекающей все образующие под углом χ, когда ее параметром примем дугу сферической индикатрисы поверхности, достаточно заметить, что при $e'^2 = 1$, $e.y' = c^{1/2}\,cs\chi$, $e'.y' = -d$, имеем $k^2 = c\,sn^2\chi - d^2$, откуда

$$c = \frac{k^2 + d^2}{sn^2\chi} \tag{5'}$$

соотношение, принимающее для ортогональной траектории образующих вид формулы (5).

В силу (3) и (5), линейный элемент линейчатой поверхности, отнесенной к нашей геодезической системе ,определяется формулой $d\sigma^2 = dv^2 + \{(v - d)^2 + k^2\}\,du$ (f), где v — геодезическое расстояние какой нибудь точки A поверхности от соответствующей, по образующей, точки директрисы — ортогональной траектории $v = 0$, и, следовательно, $v - d(u)$ — расстояние точки A от центральной точки образующей, на которой A лежит.

Исходя из известной формулы для Гауссовой кривизны C линейчатой поверхности, заключаем, что дискриминант ее, определяемый сохраняющейся при изгибании функцией

$$\kappa = |E\sqrt{-C}| \tag{$\times$}$$

является ее инвариантом при всяком изгибании. С целью точно установить, в чем

*) Из конвексных поверхностей 2-го порядка на эллиптическом параболоиде указанная особенность не выполняется (Bour, J. Ec. Pol., cah. 39, p. 77).

состоит определяемое дискриминантом абсолютное свойство линейчатой поверхности, сохраняющееся для всего ее класса, примем во внимание 1) что ориентация бивектора $|ee'|$ определяет ориентацию асимптотической плоскости линейчатой поверхности, или, что то же самое, ориентацию касательной плоскости ее направляющего конуса и 2) что, при принятом нами положении считать параметром директрисы дугу сферической индикатрисы образующих, вектор $\|ee'|$, определяя направление нормали направляющего конуса поверхности, является ортом. Поэтому, при изгибании поверхности, остающейся постоянно линейчатой, дискриминант ее определяет неизменяющуюся при этом длину проекции касательного вектора директрисы поверхности на нормаль ее направляющего конуса. Когда дискриминант равен нулю, то для всех точек одной и той же образующей обе касательные плоскости, как поверхности так и ее направляющего конуса, совпадают, векторы e, e', y' везде по всей поверхности компланарны, что и сохраняется при ее изгибании. На основании же $(\times)$ мы, пользуясь известной теоремой Эннепера, получим, что дискриминант линейчатой поверхности выражает неизменяемую при всяком изгибании длину радиуса кручения асимптотических на стрикционной линии, в то время как параметр распределения выражает радиус кручения кривых асимптотических на стрикционной линии,— неизменяемый при непрерывной деформации поверхности *) и знаком своим классифицирует косые поверхности, разбивая их на два типа, правых и левых. В случае стрикционной линии — ортогональной троектории образующих, имеем,— как следствие из той же теоремы и известного положения о кручениях геодезической и ее геодезических нормалей,— что кручение кривых асимптоматических на такой стрикционной определяется той же функцией места, как кручение самой стрикционной, а потому в этом случае параметр распределения выражает радиус кручения указанной линии, сохраняющийся при непрерывной деформации поверхности.

Рассматривая поверхность переменной Гауссовой кривизны, на которой линии постоянной кривизны являются геодезически - параллельными, назовем для краткости ту из этих линий, на которой Гауссова кривизна переходит через абсолютный maximum по абсолюту, экватором поверхности. Все такие поверхности, имеющие экватор, представляют собою ансамбль гораздо более общего характера, чем ансамбль поверхностей вращения и их изгибаний, содержа последний как частный случай, потому что экватор и его параллели,— в том общем определении их, которое нами дано, — будучи линиями постоянной Гауссовой кривизны, могут и не быть, на основании формулы Liouville'я (Bianchi, Vorl. 10, s. 150) линиями постоянной геодезической кривизны. Когда две поверхности, имеющие экваторы, развертываются одна на другой, эти линии необходимо являются соответственными при наложении. Чтобы найти критерий существования экватора на косой поверхности, достаточно лишь: 1) заметить, что, на основании формул (f) и (x), линией на этой поверхности, где Гауссова кривизна достигает maximum'а по абсолюту $\frac{1}{k^2}$ является ее стрикционная

*) Cesàro, Natürl. Geom., s. 225; Knoblauch, Krum. Fl., s. 257.

$v - d = 0$ и 2) рассмотреть особенное свойство на косых поверхностях системы линий $v - d(u) = \text{const}$. В силу тех же формул (f) и (x) и известного критерия параллельности линий какой-нибудь системы на всякой поверхности, заключаем, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы упомянутая система состояла из линий постоянной кривизны, одновременно между собой геодезически-параллельных, является выполнение $k = \text{const} \neq 0$. На этом основании, экватор реализуется на косой поверхности ее стрикционной, когда последняя является линией постоянной Гауссовой кривизны, или, еще иначе, когда геодезические нормали стрикционной представляют собою на поверхности ее линии наибольшего изменения Гауссовой кривизны. Искомым критерием существования экватора на косой поверхности является, поэтому, условие $k = \text{const} \neq 0$, или, одновременно с последним существующее, $\gamma = \text{const} \neq 0$, и мы приходим к следующему результату:

Критерий $\gamma = \text{const} \neq 0$ выделяет семейство косых поверхностей (косой геликоид, однополый гиперболоид вращения, все линейчатые геликоиды, кроме развертывающегося, и др.), на которых стрикционная является линией постоянной Гауссовой кривизны, максимальной по абсолюту (тем самим, экватором поверхности, в смысле данного нами общего определения последнего понятия). Необходимым условием наложимости линейчатой поверхности R на какую-нибудь поверхность S, имеющую экватор, является принадлежность R к семейству $\gamma = \text{const} \neq 0$, причем экватору поверхности S необходимо соответствует при наложении стракционная линия повесхности R (A).

Исходя из рассмотрения известного уравнения стрикционной линии любого семейства кривых на какой-угодно поверхности (Kommerell, Raumk. und Flächen 21, Bd. 2, s. 177), получим, что стрикционная линия семейства параметрических линий $u = \text{const}$ на любой поверхности, при каком угодно семействе $v = \text{const}$, определится уравнением

$$\left(\frac{G}{EG - F^2}\right)_v = 0 \qquad (\times)$$

где E, F, G основные величины I порядка рассматриваемой поверхности и где поэтому в левой части находится сохраняющаяся при изгибании функция, Применяя ($\times$) к определению уравнения стрикционной линии линейчатой поверхности, пользуясь для этого (f), легко получим для такового:

$$v - d(u) = 0 \qquad (\times\times)$$

откуда заключаем об инвариантности при всяком изгибании линейчатой поверхности функции $d(u)$, как необходимом и достаточном условии инвариантности функции, стоящей в левой части ($\times\times$). Принимая, дальше, во внимание, что в правой части формулы (5′) имеем функцию только от элементов инвариантных при всяком изгибании линейчатой поверхности, и условившись принимать на изгибании директрисы за начало дуг точку, соответственную при изгибании началу дуг на самой директрисе, заключаем, что соотношение (5′) сохраняется при всяком изгибании линейчатой поверхности, определяя параметр изгибания директрисы в той функции его дуги, в какой функции дуги директрисы определена дуга сферической индикатрисы образующих. На этом основании приходим к следующему результату: на всяком возможном изгибании линейчатой поверхности 1) ее стрикционной линии соответствует стрикционная линия изгибаний прямолинейных образующих и 2) отрезки кривых последнего семейства, между их стрикционной линией и изгибанием произвольной линии, пересекающей все образующие, вычисляются той же самой функцией d от определенного соотношением (5') параметра изгибания упомянутой линии, какой функцией от дуги сферической индикатрисы образующих исчислялись на линейчатой поверхности расстояния между соответствующими, по образующей, точками ее стрикционной и упомянутой линии — ее директрисы (B).

Пользуясь уравнением стрикционной (××), мы из (f) легко найдем элемент ее дуги и следовательно для модуля ее касательного вектора

$$\frac{ds}{du} = +\sqrt{d'^2 + k^2} \qquad (r)$$

Принимая стрикционную директрисой поверхности $x = y(u) + (v - d)\, e(u)$ и отождествляя составленное таким путем выражение для ее линейного элемента с (I), мы после легкой выкладки ($y' . e' = o$ и в силу (r) $y'^2 = d'^2 + k^2$), найдем

$$y' . e = d'(u) \qquad (s)$$

Так как векторы y', e, $\| ee' |$, лежа постоянно вдоль стрикционной в центральной плоскости образующей, компланарны, то, на основании (s) и (l'), получим для касательного вектора стрикционной линейчатой поверхности:

$$y' = d'\, e - \gamma \| ee' | \qquad (C)$$

Найденными результатами (A) (B) и (C) мы в дальнейшем воспользуемся.

Параметр удаления и дискриминант поверхности, — единственные инварианты, входящие в состав выражения ее линейного элемента, когда отнесем ее к указанным параметрам, — назовем простейшими дифференциальными инвариантами линейчатой поверхности.

В дальнейшем условимся называть определение поверхности, связанное с определенной ее формой так, что одинаковое определение имеют только конгруентные поверхности, ее индивидуальным определением, и отличать таковое от абсолютного определения линейчатой поверхности, для расмотрения которого перейдем к формулировке теоремы 1-ой.

Теорема 1-ая. Класс всякой линейчатой поверхности вполне и взаимно-однозначно определяется заданием двух функций для ее простейших дифференциальных инвариантов, и только в случае плоскости класс ее характеризуется одним только заданием для дискриминанта $k = 0$, при произвольном задании функции, определяющей параметр удаления.

Для доказательства нам достаточно показать, что длина линейного элемента поверхности, с одной стороны, и функции, выражающие простейшие дифференциальные инварианты — с другой, определяя друг друга, находятся во взаимно-однозначном соответствии. Когда заданы определенными функциями элементы d и k, то, на основании формулы пятой получится определенная функция для элемента c (u), и тем самым, на основании формулы (3), основная величина E (u, v) запишется определенным полиномом 2-ой степени относительно v; следовательно, однозначно определится и длина линейного элемента. На основании же доказанной инвариантности, при изгибании поверхности, функций определяющих ее дискриминант и параметр удаления,— данной длине линейного элемента, характеризующей весь ансамбль изгибаний и в частности класс поверхности, соответствует только одна пара порознь определенных функций для элементов d и k. Таким образом, геометрические функции поверхности, ее дискриминант и параметр удаления, представляют собою те элементы, которыми линейчатая поверхность в абсолютной геометрии характеризуется.

Для доказательства второй части теоремы, достаточно показать, чем существенно отличается плоскость, рассматриваемая как поверхность линейчатая от всех остальных линейчатых, и разыскать класс этой поверхности.

Изучая линейчатую поверхность вообще, мы отнесли ее к ортогональной системе параметрических линий, состоящей из прямолинейных образующих и их ортогональных траекторий. Плоскость отличается от всех остальных линейчатых тем, что она покрыта бесчисленным множеством таких систем, причем каждой такой системе соответствует один вполне определенный способ рассмотрения ее, как линейчатой поверхности. Все эти способы сводятся только к двум основным типам: плоскость можно рассматривать 1) как поверхность, образованную нормалями какой-нибудь на ней лежащей кривой — ее директрисы и 2) как образованную прямыми, исходящими из какой-нибудь ее точки. Как при том, так и при другом способе рассмотрения, сферической индикатрисой e (u) образующих плоскости является окружность, на ней лежащая, векторы e, e′, y′ постоянно компланарны, и дискриминант плоскости

$$\pm \left| e e' y' \right| = 0 \tag{g}$$

Так как, в случае плоскости, сферическая индикатриса образующих совпадает со сферической индикатрисой касательных к директрисе, то на основании формул (5) и (g) имеем $d(u) = \rho(u)$ (h), где ρ есть радиус кривизны директрисы.

Следовательно, стрикционной линией плоскости, при каждом способе рассмотрения, является эволюта взятой директрисы, которая будет действительной кривой при способе 1-го типа, и точкой при способе 2-го типа.

Возьмем определенный способ рассмотрения 1-го типа, т.-е. рассмотрим данную кривую A плоскости, как ее директрису, а эволюту последней B, как ее определенную стрикционную линию. Из рассмотрения линейного элемента плоскости, отнесенной к геодезической системе этого типа, непосредственно заключаем о наложимости на нее группы поверхностей касательных любой кривой двоякой кривизны, изгибанием которой на плоскости служит кривая B. Для всей этой группы поверхностей, наложимых на плоскость, если директрисой ее рассматривать кривую A,— параметр удаления, на основании найденного мною результата (B), определяется одной и той же функцией по формуле (h).

Легко показать, что вся эта группа характеризуется заданием кривой В, как стрикционной линии плоскости; при таком задании, функция, аналитически характеризующая группу, выражающая параметр удаления всех поверхностей группы, определится формулой

$$d(u) = \int \rho_1(u)\, du \quad (k),$$

где ρ_1 радиус кривизны кривой В, эволюты кривой А, выраженный в функции параметра u эвольвенты. Варьируя кривую В, т.-е. выбирая стрикционными линиями плоскости различные кривые на ней лежащие, мы получим различные группы наложимых на плоскость поверхностей, так называемых развертывающихся, каждая из которых аналитически характеризуется функцией, определяемой по формуле (k), а геометрически характеризуется задаваемой кривой, как стрикционной линией плоскости.

При 2-ом способе рассмотрения плоскости, как линейчатой поверхности, мы из соответствующей формулы для линейного элемента непосредственно обнаружим наложимость на нее всякой конической поверхности. Если мы, в качестве стрикционной линии, обращающейся при этом способе рассмотрения в точку, возьмем какую-нибудь точку бесконечно-удаленной прямой плоскости, то обнаружим наложимость на нее всякой цилиндрической поверхности. В случае конических $d = \mathrm{const}$, в случае цилиндрических $d = \infty$. Таким образом, функция, определяющая параметр удаления, характеризуя каждую отдельную группу поверхностей, наложимых на плоскость, не характеризует ее класса, вполне и единственно определяемого, согласно формуле (g), заданием для дискриминанта $k = 0$.

Рассмотрим функцию, определяемую формулой

$$p(u) = -\,|\,ee'e''\,| \qquad (6)$$

выражающую геодезическую кривизну сферической индикатрисы образующих. Так как равенство $p = \mathrm{const}$ является критерием семейства поверхностей,— при $p = 0$, поверхностей с направляющей плоскостью (гиперболический параболоид, плоскость, косой геликоид), либо при $p = \mathrm{const} \neq 0$ семейства таких, у которых направляющий конус есть конус вращения (линейчатые геликоиды, однополые гиперболоиды вращения),— то функция, определяемая формулой (6), есть геометрическая функция поверхности. Покажем, что заданием функции для одного этого элемента поверхности по форме своей однозначно определяется сферическая индикатриса образующих, если только задаваемая функция однозначна, непрерывна и имеет производную также однозначную и непрерывную. Обозначивши φ, ρ_1, ρ_2, соответственно угол между главной нормалью индикатрисы и нормалью сферы, радиусы первой и второй кривизны индикатрисы, мы из равенств $\varphi = \mathrm{arctg}\, p$; $\rho_1 = \mathrm{cs}\,\varphi$; $\dfrac{1}{\rho_2} = \dfrac{d\varphi}{du}$ получим для определения ее первой и второй кривизны: $\dfrac{1}{\rho_1} = \sqrt{1 + p^2}$; $\dfrac{1}{\rho_2} = \dfrac{p'}{1 + p^2}$ формулы, которыми индикатриса, как своими двумя натуральными уравнениями, по форме своей однозначно определится.

Дискриминант поверхности, элемент пригодный и необходимый для абсолютного ее определения, не может фигурировать при ее индивидуальном определении. Две симметричные линейчатые поверхности, являясь тождественными в абсолютной геометрии поверхности, в то же время не конгруентны, не могут получаться одна из другой помощью непрерывной деформации какой-либо одной из них только оттого, что различаются знаком параметра распределения, неизменного при такой деформации, и представляют собою, поэтому, две отдельные поверхности, индивидуально характеризующиеся знаком параметра распределения. На этом основании, при индивидуальном определении поверхности, дискриминант ее должен быть заменен ее параметром распределения касательных плоскостей.

Назовем элемент поверхности p, определяющий сферическую индикатрису образующих, а следовательно и направляющий конус поверхности, ее направляющим параметром, а три элемента поверхности,— направляющий параметр p, параметр удаления d и параметр распределения γ,— основными ее параметрами. Всякую функцию, составленную из основных параметров и их производных, представляющую собою геометрическую функцию поверхности, назовем ее параметром связи. Согласно определению, таким элементом линейчатой поврхности является функция, определяемая формулой:

$$q = e . \{ \| y'' e' | + \| e'' y' | \} \tag{7}$$

В самом деле, в силу равенств $\| e e'' | = p e'$, $| y' e e'' | = - p d$ и результата дифференцирования ($1'$), мы, из формулы (7) имеем соотношение, выполняющееся при всякой директрисе поверхности:

$$q(u) = \gamma' - 2dp \tag{8}$$

Дифференцируя по p равенство $\gamma' - 2dp = 0$ найдем необходимые и достаточные условия обращения в нуль функции $q(u)$, при неизменении функций — элементов $d(u)$, $\gamma(u)$, инвариантных при изгибании поверхности: $\gamma = \text{const}$; $d = 0$ ($\times$).

Так как соотношениями ($\times$), при $\gamma = \text{const} \neq 0$, в принятой нами геодезической системе, характеризуется весь ансамбль поверхностей наложимых на косой геликоид, то приходим к заключению: 1) что критерием $q = 0$ выделяется семейство поверхностей, к которому принадлежит весь класс косого геликоида, и, кроме того, отдельно, плоскость и группа на нее наложимых поверхностей конических ($\gamma = 0$; $d = 0$) и 2), что функция $q(u)$ (7), удовлетворяя вполне данному определению, есть параметр связи линейчатой поверхности.

Обозначая 1) e_α, e_β, e орты, фиксирующие соответственно направления касательной, главной нормали любой директрисы $y(u)$ и нормали к поверхности, 2) s, ρ, χ и ψ соотвественно дугу директрисы, радиус ее первой кривизны, угол между нею и образующей, и угол между главной ее нормалью и нормалью к поверхности, мы, в силу равенств

$$y'' = \frac{d^2 s}{du^2} e_\alpha + \left(\frac{ds}{du}\right)^2 \frac{1}{\rho} e_\beta; \quad e_n = \frac{1}{\mathrm{sn}\chi \ \mathrm{mod} y'} \| y' e |; \quad y'' . e_n = \left(\frac{ds}{du}\right)^2 \frac{\mathrm{cs}\psi}{\rho}$$

получим для нормальной кривизны любой директрисы поверхности:

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{|\, y'' \, y' \, e \,|}{\operatorname{sn}\chi \; c^{3/2}} \tag{9}$$

где c есть квадрат модуля касательного к директрисе вектора. Функция, определяемая формулой

$$r(u) = |\, y'' \, y' \, e \,| \tag{10}$$

является вторым параметром связи линейчатой поверхности.

Помимо данной мною формулы для нормальной кривизны общей кривой на линейчатой поверхности (9), формулы весьма простой по своему составу,— известна для той же величины следующая (Darboux, Surfaces, t. III, p. 308):

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{d\varphi}{ds} + p\,\frac{du}{ds}\right)\operatorname{sn}\chi + \operatorname{cs}\varphi \operatorname{cs}\chi \frac{du}{ds} \tag{9'}$$

где φ есть угол, определяемый по формуле Шаля.

Из двух формул (9) и (9′), написанных для случая директрисы-ортогональной траектории образующих, на основании соотношений

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\gamma d' - d\gamma'}{c^{3/2}}\,; \quad \frac{du}{ds} = \frac{1}{c^{1/2}}$$

получим

$$r(u) = cp + \gamma d' - d\gamma' \tag{11}$$

формулу, устанавливающую, что r(u) (10) есть определенная функция от трех основных параметров поверхности.

Так как условие $r = 0$ в нашей геодезической системе означает, что асимптотические линии поверхности составляют на ней ортогональную сеть,— явление, возможное только на косом геликоиде и на плоскости,— то критерием $r = 0$ выделяется семейство, к которому принадлежат только плоскость и косой геликоид. Функция r(u), будучи геометрической функцией—элементом поверхности согласно определению есть ее параметр связи.

Назовем три элемента линейчатой поверхности, направляющий параметр p и два параметра связи q и r ее индивидуальными параметрами.

Теорема 2-я. Всякая линейчатая поверхность получает свое индивидуальное определение заданием ее параметров удаления и распределения и одного из трех ее индивидуальных параметров.

За исключением поверхности цилиндрической, индивидуально характеризующейся неопределенностью своего направляющего параметра, этот элемент определен на всех поверхностях; кроме того, на тех поверхностях, где $d = 0$, всегда возможно получить, выбравши для этого директрисой ортогональную траекторию образующих, не совпадающую с ее стрикционною линией,— $d = \text{const} \neq 0$, а потому при задании, совместно с параметрами удаления и распределения, одного из двух индивидуальных параметров q либо r, направляющий параметр поверхности всегда определится на основании формул (8) и (11).

Следовательно, для доказательства теоремы нам надлежит лишь показать. что поверхность вполне и единственным образом определяется заданием трех основных ее параметров γ, d и p.

Исходя из общих формул для геодезической кривизны и геодезического кручения координатных линий (v) любой поверхности, отнесенной к любой ортогональной системе координат, и замечая, что для линейчатой поверхности, отнесенной к ее гедезическим параметрам в принятой нами системе, основная величина второго порядка D_1 определяется формулой

$$D_1 = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \cdot e_n = \frac{|ee'\,y'|}{\sqrt{E}},$$

получим для геодезической кривизны $\frac{1}{\rho_g}$ и кручения $\frac{1}{\tau_g}$ директрисы — ортогональной траектории образующих

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{d}{d^2+\gamma^2}; \qquad \frac{1}{\tau_g} = \frac{\gamma}{d^2+\gamma^2} \tag{12}$$

а из общей формулы (9), на основании соотношения (11), для нормальной кривизны этой линии

$$\frac{1}{\varsigma_n} = \frac{cp + \gamma d' - d\gamma'}{c^{3/2}}, \text{ где } c = d^2+\gamma^2 \tag{13}$$

Формулами (12) и (13) директриса поверхности по форме своей вполне и однозначно определяется. Так как задание функции для направляющего параметра p, само по себе, вполне и однозначно определяет форму сферической индикатрисы образующих, то элементы, непосредственно определяющие поверхность, ее директриса и сферическая индикатриса образующих, оказываются оба вполне и однозначно определенными по форме заданием функций для трех основных параметров поверхности.

Так как при задании функций — элементов линейчатой поверхности p, γ, d — мы можем написать уравнение ее асимптотических линий 2-го семейства — не прямолинейных образующих:

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{2\gamma}(pv^2 + qv + r) \tag{$\times$}$$

где q и r имеют указанное (8) и (11) значение, то, предположивши д в е поверхности, определенные этими заданиями, мы, на основании теоремы I-й должны заключить, что они наложимы друг на друга, и при том, на основании ($\times$), с соответствием при наложении асимптомических 2-го семейства, т.-е. что эти две поверхности (Bianchi, Vorl 10, s. 217; Darboux, Surfaces, t. III, p. 287) либо конгруентны, либо симметричны. Но последнее предположение отпадает на том основании, что у обеих поверхностей один и тот же параметр распределения γ. Принимая, наконец, во внимание, что способ образования линейчатой поверхности вполне определен, когда даны по форме своей ее директриса и сферическая индикатриса при установленном формулой (5) соответствии между точками этих кривых, приходим к заключению, что трем заданным функциям — элементам p, γ, d соответствует единственная вполне индивидуально-определенная линейчатая поверхность.

Чтобы составить себе определенное понятие о природе изгибания поверхности, остающейся или не остающейся линейчатой, о том, что происходит при этом с различными кривыми, по ней проведенными,— перейдем к рассмотрению теоремы 3-й.

Если мы условимся называть типом линии двоякой кривизны или косой поверхности присущее каждой из этих фигур свойство быть правой либо левой, а родом косой поверхности — присущее ей абсолютное определение, совместно рассматриваемое с ее типом, то эту теорему можно формулировать следующим образом:

Теорема 3. Необходимыми и достаточными условиями непрерывной деформации косой поверхности, остающейся линейчатой как до изгибания, так и после него, является сохранение ее рода при непрерывном варьировании какого-либо одного из трех ее индивидуальных параметров. Класс косой поверхности состоит из двух групп поверхностей противоположного типа, одинакового для всех поверхностей каждой группы, причем переход, непрерывной деформацией одной поверхности класса, от нее к другой возможен только в случае принадлежности их к одной и той же группе, а каждые две поверхности различных групп всегда возможно, достаточным непрерывным изгибанием одной из них, превратить в поверхности симметричные. Непрерывный переход от косой поверхности S к наложимой на нее нелинейчатой поверхности T реализуется либо одним, либо двумя непрерывными рядами поверхностей, исходящими из косой поверхности U, образованной касательными к геодезическим G на T, соответственным образующим S, вдоль какой-нибудь асимптотической A на T того же типа, что и асимптотические 2-й системы на S.

Сохраняя все прежние обозначения, имеем $y' . e = c^{1/2} \operatorname{cs}\chi$, а потому, на основании $(1')$ и (2), для касательного вектора любой директрисы $y(u)$ косой поверхности получим:

$$y' = c^{1/2} \operatorname{cs}\chi e - de' - \gamma \,\|\, ee' \,| \tag{4'}$$

Фиксируя направления прямых пересечения центральной плоскости и касательной плоскости в какой-нибудь точке образующей с нормальной плоскостью последней соответственно ортами $\| ee' |$ и e_γ так, чтобы угол $\alpha = (\| ee' |, e_\gamma)$, отсчитанный от первого орта, выражал по величине отклонение касательной плоскости от центральной плоскости, определяемое по формуле Шаля, определяя sens орта e' условием конгруентности обоих триедров $(e, e', \| ee' |)$, (e, e_n, e_γ) с триедром координатных осей, — мы всегда при этом будем иметь $e_n . e' = \operatorname{cs} \alpha$, $e_n . \| ee' | = \operatorname{sn} \alpha$, а потому, дифференцируя по u $(4')$ и геометрически умножая результат на вектор $\| y' e | = c^{1/2} \operatorname{sn}\chi e_n$, легко получим выражение для параметра связи $r = | y'' y' e |$ в самом общем его виде:

$$r = cp \operatorname{sn}^2\chi + \gamma d' - d\gamma - \gamma c^{1/2} \operatorname{cs}\chi \tag{11'}$$

На основании (11′), определивши дальше помощью формулы двойного векториального произведения орт $e_\delta = \| e_n \, e_\alpha \|$, фиксирующий направление, лежащей в касательной плоскости, нормали директрисы, легко получим для ее геодезического кручения:

$$\frac{I}{\tau_g} = \frac{de_n}{ds} \cdot e_\delta = \frac{\gamma}{\gamma^2 + d^2} + \frac{r\, cs\chi}{(d^2+\gamma^2)c^{1/2}} \tag{15}$$

На основании найденого нами результата (B), функция, определяющая модуль касательного вектора любой директрисы косой поверхности

$$c^{1/2} = \left| \frac{\sqrt{k^2+d^2}}{sn\chi} \right| \tag{16}$$

является ее инвариантом при всяком изгибании, а потому, принимая во внимание, что геодезическая кривизна любой директрисы поверхности не изменяется от всякой ее деформации, и что такими же инвариантами являются ее элементы d и χ, мы из непосредственного рассмотрения формул (9), (11′) и (15) заключаем, что непрерывное изменение как нормальной кривизны, так и геодезического кручения любой директрисы косой поверхности, — являющееся необходимым и достаточным условием ее непрерывной деформации, — зависит, при сохранении γ, исключительно от непрерывного варьирования функции — элемента поверхности p. Следовательно, непрерывно варьируя этот элемент, при сохранении рода поверхности, мы произведем непрерывную ее деформацию. На основании же формул (8) и (11′), мы заключаем, что непрерывно варьируя какой-нибудь из двух параметров связи косой поверхности, при сохранении ее рода, мы тем самым непрерывно варьируем тот же элемент p, и результат, поэтому, получается тот же самый. Геометрическое значение такого варьирования элемента p выразится только лишь в производстве соответствующего непрерывного ряда направляющих конусов, — следовательно, образующие деформируемой поверхности, от такого варьирования p, никогда, сколько бы мы его ни продолжали, не искривятся, и всякое получаемое изгибание является, по этому, поверхностью линейчатой. Интерпретируя формулу (16), предварительно представивши ее в виде:

$$du = \left| \frac{sn\chi}{\sqrt{\kappa^2+d^2}} \right| ds$$

найдем, что угол смежности образующей сохраняется при всяком изгибании поверхности, остающейся линейчатой как до изгибания, так и после него Применяя данную нами интерпретацию формулы (16) к только что раньше сказанному, мы придем к заключению: непрерывно варьируя элемент p индивидуально определенной поверхности $S\,(p, d, \gamma)$, мы производим ее непрерывную деформацию, при которой она остается постоянно линейчатой; в полученном непрерывном ряде индивидуально определенных косых поверхностей все члены его имеют тот же род, а потому и тип, что поверхность S; образующие каждого члена ряда являются линиями, соответственными при наложении образующим S.

Полагая в формуле (15) $r = 0$ и принимая то определение линий нулевой нормальной кривизны, которое дает Scheffers (Th. der Flächen, 13, S. 552), заключаем, что знак параметра распределения определяет знак кручения любой директрисы — асимптотической линии, который должен сохраняться при непрерывной деформации поверхности (Bianchi, Vorl. 10, S. 222). Следовательно, параметр распределения должен сохраняться при требуемом условии непрерывной деформации поверхности. Поэтому, изложенный нами способ непрерывной деформации косой поверхности, — при указанном условии, когда она после изгибания остается линейчатой, — является для нее единственно-возможным, и первая часть теоремы доказана.

Так как класс всякой косой поверхности, на основании 1-й теоремы, вполне и единственным образом определяется заданием ее параметра удаления и дискриминанта, представляющего абсолют параметра распределения, то он содержит в себе поверхности двух, и только двух, родов: поверхности рода (γ, d) и поверхности рода $(-\gamma, d)$. Непрерывно варьируя направляющий параметр p_1 какой-нибудь поверхноси $T(p_1, d, -\gamma)$, принадлежащей к классу поверхности $S(p, d, \gamma)$, мы, на основании вышеизложенного, получим вторую непрерывную группу косых поверхностей типа, противоположного типу поверхностей 1-й группы. Если мы условимся называть кривую правой, когда ее кручение отрицательно, а косую поверхность правой, когда ее асимптотические 2 семейства, — не образующие поверхности, — являются левыми кривыми, то правые либо левые поверхности будут определяться по своему типу соответственно положительным или отрицательным знаком своего параметра распределения. Предположивши у всех наших поверхностей, происшедших от непрерывного изгибания S, $\gamma < 0$, имеем в 1-й группе левые косые поверхности, тогда как во второй все поверхности являются правыми. Ясно, на основании 1-й теоремы, что обе группы составляют весь класс любой поверхности любой из двух групп. — Когда направляющие параметры двух каких-нибудь поверхностей S_3 и S_4 из этих двух групп определяются соответственно функциями $\varphi_1(u)$ и $\varphi_2(u)$, то непрерывно варьируя направляющий параметр поверхности S_3, определяя его функциями из ряда:

$$\varphi_1(u) + \varepsilon \left\{ \varphi_2(u) - \varphi_1(u) \right\},$$

где ε непрерывно изменяется в закрытом интервале $[0,1]$, — мы получим, на основании вышеизложенного, при значении $\varepsilon = 1$, поверхность S_5, — непрерывное изгибание поверхности S_3, — которая либо совпадает, на основании 2-й теоремы, с поверхностью S_4, когда последняя принадлежит к той же группе, что и S_3, — либо, в противном случае, находясь в другой группе и имея с поверхностью S_4 одно и то же абсолютное определение и один и тот же направляющий параметр, отличается от нее только по своему типу, знаком своего параметра распределения, т.-е. поверхности S_5 и S_4 в этом случае симметричны.

Когда указанная в последней части теоремы поверхность S представляет собою единственно-возможное непрерывное изгибание T при неискривлении ее асимптотической A и ректификации ее геодезических G, то S конгруентна U, обладающей, по теореме Chieffi (Giornale di Matem., v. 43, p. 9 — 13) тем же свойством, и непрерывный переход, поэтому, от T к S в этом случае устанавливается одним рядом нелинейчатых поверхностей, последним членом которого является рассматриваемая косая поверхность S. В противном случае, когда S не конгруентна U, эти две поверхности, будучи, первая — по условию, другая — по указанной теореме, наложимы на T, имеют одинаковое абсолютное определение и, кроме того, согласно самому способу построения U, принадлежат к одной и той же группе косых поверхностей. Поэтому поверхность U, представляя собою непрерывное изгибание T, в этом случае, на основании предыдущего, является также непрерывным изгибанием S, — и, следовательно, при указанном условии, непрерывный переход от S к T реализуется рядом, от S до U включительно, косых поверхностей одного и того же рода и дальнейшим рядом нелинейчатых поверхностей, последним членом которого являются рассматриваемая поверхность T, чем теорема полностью доказана. *)

Прежде чем перейти к следствиям, заметим: 1) что при таком вариировании данной функции $\varphi_1(u)$ можно от нее непрерывно перейти к произвольно заданной функции $\varphi_2(u)$, котороя вместе с функциями $d(u)$ и $\gamma(u)$, на основании 2-й теоремы, определит индивидуально косую поверхность, и 2) что направление нормали направляющего конуса рассматриваемой поверхности является образующей другой косой поверхности, имеющей с рассматриваемой общую стрикционную линию и названной P. Serret (Th. n. géométrique, p. 144) сопряженной поверхностью. Угол смежности $d\beta$ орта, фиксирующего это направление, определится из $d\beta = \mathrm{mod}\ d \,\|\, ee' \,| = |\, e'\ ee'' \,|\, du = p\,du$. Поэтому в дальнейшем мы можем интерпретировать $p\,du$ либо как угол смежности нормали направляющего конуса рассматриваемой поверхности, либо как угол смежности образующей сопряженной поверхности.

Следствия: I. Переписавши формулу (9′) в виде

$$\frac{ds}{\rho_n} = d(\alpha + \beta)\,\mathrm{sn}\chi + \mathrm{cs}\alpha\,\mathrm{cs}\chi du \qquad (\times)$$

замечая, что угол α, точно определяемый на директрисе формулой $\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{d}{\gamma}$ (Lilienthal, Vorl 13, Bd 2, S. 95), в правой части которой находится функция, инвариантная при непрерывной деформации, является инвариантом при изгибании поверхности, остающейся постоянно линейчатой, — а также инвариантен в точно указанных при интерпретации ф. (16) случаях угол смежности образующей du, и интерпретируя (×), придем к заключению:

При изгибании поверхности, остающейся постоянно линейчатой, угол смежности всех нормальных сечений поверхности и геодезических ее линий, проведенных под углом χ вдоль одной и той же образующей, изменяется на величину,

---

*) Указанный переход от S к T, всегда возможный, не является едиственным. Когда S — минимальная поверхность, а T — к ней присоединенная, то непрерывный переход реализуется союзными поверхностями; переход от косого геликоида к катеноиду минимальными винтовыми поверхностями является непосредственным, в отличие от перехода через поверхность U.

равную изменению угла смежности соответствующей нормали к направляющему конусу, помноженному на sn χ.

Положивши $\chi = \frac{\pi}{2}$, получим:

II. Угол смежности всех сечений поверхности, перпендикулярных к одной и той же образующей, изменяется, при изгибании, на величину, равную изменению угла смежности соответствующей нормали к направляющему конусу.

III. Интерпретируя формулу (15), предварительно помножив обе части ее на элемент дуги ds директрисы, мы, на основании ф. (5′) и равенств $ds = c^{1/2} du$, $pdu = d\beta$, легко придем к следующему результату:

При изгибании поверхности, остающейся постоянно линейчатой, угол кручения всех геодезических, проведенных под углом χ вдоль одной и той же образующей, изменяется на величину, численно равную изменению угла смежности образующей сопряженной поверхности, помноженному на cs χ.

IV. Направляющий конус поверхности, определяемый исключительно элементом p, может быть,—на основании существования только двух соотношений (8) и (11′) между тремя индивидуальными параметрами p, q, r,—совершенно произвольным для поверхности, наложимой на данную абсолютно-определенную поверхность, т.-е. всегда возможно индивидуально определить, и притом, на основании 2-ой и 1-й теоремы, двояким образом, линейчатую поверхность, одновременно удовлетворяющую двум требованиям: 1) быть наложимой на какую-нибудь данную линейчатую поверхность и 2) иметь данный произвольно-выбранный направляющий конус.

V. Следовательно, всегда возможно произвести двумя способами такое изгибание данной косой поверхности, при котором образующие станут параллельными образующим наперед заданного конуса.

VI. Положивши для рассматриваемой косой поверхности и для ее симметричной $p = 0$, получим две индивидуально определенных поверхности $S_1 (0, \gamma, d)$ и $S_2 (0, -\gamma, d)$, образующие которых параллельны некоторой, одной и той же для обеих поверхностей, плоскости. Следовательно, всегда возможны две поверхности, наложимые на данную косую, образующие которых параллельны некоторой, единственной для данной косой поверхности, плоскости.

VII. На данной косой поверхности S_1, индивидуально-определенной тремя функциями, заданными для ее основных параметров γ, d и p, назовем какую-нибудь ортогональную траекторию образующих-кривой A. Не изменяя функций, определяющих параметры γ и d, и непрерывно варируя функцию, определяющую направляющий параметр p поверхности S_1, составим для этого элемента линейчатой поверхности новую функцию

$$p_1 (u) = \frac{\gamma' d - \gamma d'}{c} \tag{$\times$}$$

вполне определенную, так как во всяком случае, даже когда кривая A есть стрикционная линия поверхности S_1, на ней, как на косой,

$$c = \gamma^2 + d^2 \neq 0.$$

Исходя из соображений, изложенных после доказательства 3-й теоремы, мы можем утверждать, что существует определенная линейчатая поверхность S_2 (γ, d, p_1),—непрерывное изгибание поверхности $S_1(\gamma, d, p)$, на которой кривая В,—изгибание кривой А, — есть ортогональная траектория ее образующих. Вычисляя ее нормальную кривизну по формуле (13), находим, на основании $(\times)$, что В является асимптотической линией поверхности S_2. Обозначая e_α, e_β, e орты, фиксирующие соответственно направления касательной, главной нормали кривой, В и образающей поверхности S_2, и принимая во внимание ориентацию соприкасающейся плоскости кривой В, определяемую бивектором $| e_\alpha e_\beta |$ и ориентацию касательной плоскости к поверхности S_2 вдоль кривой В, определяемую бивектором $| e_\alpha e |$, мы, из совпадения этих плоскостей и равенств $e_\alpha . e_\beta = 0$, $e_\alpha . e = 0$, заключаем $e = e_\beta$ т.-е. образующая поверхности S_2, вдоль всей кривой В, совпадает с ее главной нормалью.

Следовательно, всегда существует такое изгибание косой поверхности при котором она деформируется в поверхность главных нормалей какой-нибудь одной, произвольно на ней выбранной, ортогональной траектории ее образующих.

VIII. Определение и изгибание минимальной линейчатой поверхности. Средняя кривизна линейчатой поверхности, в нашей системе положений и обозначений, дается формулой

$$C_m = -\frac{pv^2 + qv + r}{2\, E^{3/2}},$$

откуда найдем необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяют элементы поверхности p, q и r, в случае поверхности с нулевой средней кривизной

$$p = 0;\ q = 0;\ r = 0 \qquad (\times)$$

Из $(\times)$, на основании формул (8) и (11), получим

$$\gamma = \text{const};\ \gamma d' = 0,$$

что и определит две поверхности с нулевой средней кривизной:

1] $\gamma = \text{const} \neq 0;\ d = \text{const};\ p = 0$ косой геликоид,

2] $\gamma = 0;\ d(u)$ — произвольная функция; $p = 0$ плоскость.

Стрикционная линия косого геликоида, являясь $(r = 0)$ асимптотической линией поверхности, в то же время есть $[d = \text{const}]$ ортогональная траектория ее образующих, а следовательно и ее геодезическая. Косой геликоид, поэтому, есть коноид, образующие которого ортогонально пересекают его ось. Весь ансамбль линейчатых поверхностей, на геликоид наложимых, определяется формулами

$$\gamma = \text{const} \neq 0;\ d = \text{const} \qquad (\times\times)$$

из которых усматривается, на основании раньше изложенного, что клас его реализуется всеми поверхностями бинормалей любой кривой с постоянным кручением, равным $\frac{1}{\gamma}$.

IX. Разыщем, не прибегая к обычным способам, среди поверхностей вращения поверхность, наложимую на данный косой геликоид с параметром γ.

На всякой поверхности вращения ее параллели суть линии постоянной геодезической кривизны. Поэтому, если какая-нибудь поверхность S_1 наложима на какую-нибудь поверхность вращения S_2, то геодезические линии поверхности S_1, соответственные меридианам поверхности S_2, необходимо имеют своими ортогональными траекториям линии с постоянной геодезической кривизной, соответственные параллелям поверхности S_2. При равенстве радиусов геодезической кривизны этих последних соответственных линий, упомянутое необходимое условие становится и достаточным для наложения рассматриваемых поверхностей.

Из рассмотрения формулы для Гауссовой кривизны линейчатой поверхности

$$C_t = -\frac{\gamma^2}{\{(v-d)^2+\gamma^2\}^2} \tag{$\times\times\times$}$$

и из существования на линейчатой поверхности стрикционной линии, как места центральной точки образующей, где Гауссова кривизна в своем изменении на последней линии переходит через maximum по абсолюту, вытекает, что всякая, с действительными образующими, неразвертывающаяся линейчатая поверхность есть поверхность *) переменной, вообще говоря, повсюду отрицательной Гауссовой кривизны, и наложима только на поверхность вращения, имеющую горловую параллель. Согласно той же формуле ($\times\times\times$), стрикционная линия $v = d(u)$ линейчатой поверхности является на ней местом точек, где Гауссова кровизна приобретает максимум по абсолютному значению $\frac{1}{\gamma^2}$. Следовательно, стрикционная линия косого геликоида, где $\gamma = \text{const} \neq 0$, и горловая параллель наложимой поверхности, как линии с одинаковой — для всех точек каждой в отдельностей — максимальной Гауссовой кривизной, на основании нашего результата (A), должны соответствовать при наложении.

Изгибая, поэтому, данный геликоид с параметром γ так, чтобы его стрикционная линия, ортогональная траектория образующих, совпала с горловой параллелью, а образующие, следовательно, с меридианами какой-нибудь поверхности вращения указанного типа, мы, принимая во внимание, что указанное выше необходимое условие наложимости для геликоида выполняется,—так как на нем существует требуемая система, состоящая из образующих и их ортогональных траекторий — гелисов, являющихся, на основании формул (12) и ($\times\times$), линиями с постоянной геодезической кривизной, — приходим к заключению, что необходимым и достаточным условием наложения является равенство радиусов геодезической кривизны любого гелиса и соответственной ему параллели, удаленных от экватора своей поверхности, каждая линия в отдельности, на одинаковое геодезическое расстояние d.

Обозначая t величину отрезка касательной к искомому меридиану, заключающегося между точкой касания и точкой встречи с осью вращения, и выражая

*) G. Scheffers. „Th. der Fläshen", 13, s. 151, 278, 287.

критерий помощью формулы (12), получим $t = d + \frac{\gamma^2}{d}$ соотношение, характеризующее, при указанном значении d и γ, исключительно цепную линию, вершина которой отстоит от ее направляющей на расстоянии γ, а потому искомой поверхностью вращения, наложимой на данный косой геликоид, яляется катеноид с параметром γ.

X. В заключение определим все косые поверхности с действительными образующими, наложимые на поверхности вращения.

Было уже сказано, что косая поверхность наложима только на поверхность вращения имеющую горловую параллель. Существование этой последней, как места точек на поверхности вращения, где Гауссова кривизна достигает по абсолюту своего максимума, для всех их одинакового, влечет за собою необходимость существования таковой же линии на поверхности наложимой. Принимая во внимание найденный нами результат (A), заключаем, что горловой параллели должна соответствовать только стрикционная линия наложимой линейчатой поверхности, принадлежащей к семейству $\gamma = \text{const} \neq 0$, при необходимом условии для стрикционной быть геодезической линией линейчатой поверхности, т.-е. траекторией ее образующих, так как горловая параллель является геодезической линией поверхности вращения.

Согласно найденному выражению для касательного вектора стрикционной линии y (u)

$$y' = d'e - \gamma \,|| e\, e' |,$$

поверхности со стрикционными линиями—траекториями образующих характеризуются соотношением

$$\operatorname{tg} \varkappa = \frac{\gamma}{d'} = \text{const} \neq 0 \text{ или } \infty \tag{$\times$}$$

где $\varkappa$ угол между образующей и стрикционной.

Следовательно, для искомого ансамбля линейчатых поверхностей имеем два необходимых условия:

$$\gamma = \text{const} \neq 0; \quad d'(u) = \text{const} \tag{17}$$

которыми поверхности этого ансамбля вполне, согласно теореме 1-й, абсолютно определяются.

Чтобы убедиться в достаточности условий (17) для абсолютного определения поверхностей искомого ансамбля, следует лишь принять во внимание 1), что параметр удаления d вполне определяется заданиями $d' = 0$ либо $d' = \text{const} \neq 0$, так как произвольную постоянную интегрирования всегда можно принять равной нулю, в виду произвольности выбора той либо иной ортогональной траектории образующих в качестве директрисы поверхности и 2) что дискриминант поверхности, которым достаточно ограничиться при рассмотрении вопроса о простой наложимости какой-нибудь линейчатой поверхности на всякую другую, определяется абсолютным значением ее параметра распределения.

Так как, согласно $(\times)$, d' может принимать значение любого определенного числа, равное нулю и конечному числу, то формулой (17) определяются два, и только два, класса линейчатой поверхности:

$$\text{класс } (\gamma = \mathrm{const} \neq 0,\ d' = 0) \text{ и класс } (\gamma = \mathrm{const} \neq 0,\ d' = \mathrm{const} \neq 0).$$

Среди поверхностей этого ансамбля, как частные определенные члены его, находятся геликоиды с направляющей плоскостью ($\gamma = \mathrm{const} \neq 0$, $d' = 0$, $p = 0$), наложимые на соответствующие катеноиды, и линейчатые геликоиды ($\gamma = \mathrm{const} \neq 0$, $d' = \mathrm{const} \neq 0$, $p = \mathrm{const} \neq 0$), наложимые на однополые гиперболоиды вращения. Считая косые геликоиды частным случаем линейчатых и исключая из счета развертывающийся геликоид, приходим к заключению, что весь искомый ансамбль реализуется, на основании (17), всевозможными линейчатыми геликоидами и всеми линейчатыми поверхностями, на них наложимыми.