О гильбертовых аксиомах связи

И. С. Чернушенко

I.

1. Аксиомы связи (Axiome der Verknüpfung) составляют у Гильберта (D. Hilbert. „Die Grundlagen d. Geometrie". Первое издание 1899 г. Пятое издание 1922 г. Я цитирую по русскому переводу: Д. Гильберт. „Основания геометрии". Пер. под ред. засл. проф. А. В. Васильева. Петроград, 1923 г.*) первую группу аксиом и устанавливают связь между понятиями „точка", „прямая", „плоскость" и „определяет" или понятиями синонимическими последнему, напр., „лежит на", „проходит через" и др. Указанные понятия являются у Гильберта основными; с ними не связывается не только никаких наглядных представлений, но и вообще никаких представлений. Мы мыслим просто три различных системы вещей: точек, прямых и плоскостей, находящихся между собою в известных отношениях, обозначаемых словом „определяет". Все, что о них нужно и можно знать, заключается в следующих аксиомах:

I 1. Две различных точки A и B всегда определяют прямую a.

I 2. Любые две различных точки прямой определяют эту прямую.

I 3. На прямой всегда существует по меньшей мере две точки, в каждой плоскости существуют всегда по меньшей мере три точки — не лежащие на одной прямой.

---

*) Пользуюсь случаем, чтобы отметить две небольшие неточности, вкравшиеся в этот в общем очень тщательно сделанный перевод: на стр. 64, стр. 17 св. (гл. V, § 23) говорится о „двойном" касании, в оригинале же сказано: „vierpunktige Berührung", т.-е. прикасание третьего порядка, — тем более, что 5-ю строками ниже тот же термин „двойное касание" верно передает термин „doppelte Berührung" оригинала. В приложенном в конце отзыве Пуанкаре (стр. 136, строки 8—9 св.) указано на доказательство Гильберта, что, кроме сферы, нет других замкнутых поверхностей такого рода (в оригинале у Пуанкаре говорится о поверхностях „de cette sorte"). Следовало бы указать, что Гильберт в мем. „Uber Flächen konstanter Gaussischer Krümmung", перепечатываемом в последних изданиях Grundlagen d. Geometrie, как Anhang V, доказывает, что шар есть единственная замкнутая поверхность постоянной положительной кривизны, н е и м е ю щ а я о с о б е н н о с т е й. Последнее свойство очень существенно, и это следовало бы отметить, хотя бы в примечании, тем более что в русском переводе этого мемуара нет.

I 4. Три не лежащие на одной и той же прямой точки А, В, С, всегда определяют плоскость α.

I 5. Любые три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, определяют эту плоскость.

I 6. Если две точки А и В прямой а лежат в плоскости α, то и всякая точка прямой а лежит в плоскости α.

В этом случае мы говорим: прямая а „лежит" в плоскости α.

I 7. Если две плоскости α и β имеют общую точку А, то они имеют по меньшей мере еще одну общую точку В.

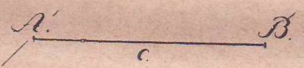
I 8. Существует по меньшей мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

Прежде всего заметим, что в приведенном перечне не 8, а 9 аксиом, т. к. I 3 состоит из двух частей, которые я, чтобы не изменять установившейся нумерации, буду обозначать I 3a и I 3b. Т. к. в дальнейшем речь будет итти только об аксиомах связи, то я буду опускать при номере аксиомы цифру I.

Гильберт называет аксиомы 1—3 плоскостными, а 4—8 пространственными Это так, если брать акс. 3 в целом. Если же разделить ее на две части то 3а—линейная аксиома.

2. Как уже было замечено, сначала мы мыслим точки, прямые и плоскости независимо друг от друга. Гильберт ничего не говорит о числе вещей в трех системах. Судя по § 1, можно думать, что их сколько угодно, но аксиомы 3 и 8 и аксиома II 2 как будто указывают на то, что Гильберт стремился обойтись наименьшим количеством вещей. Можно поэтому поставить вопрос о наименьшем числе вещей, достаточном для осуществления системы аксиом 1—8.

Аксиома 1 устанавливает, что точки не существуют отдельно. Каждая точка лежит на прямой, определяемой этой точкой и какой-либо другой, причем не известно, лежат ли все точки на одной прямой или на других, если они есть. Эта аксиома привязывает точки к одной или нескольким прямым, но не обратно: прямые могут существовать независимо от точек. Акс. 1 требует существования по крайней мере двух точек А и В и одной прямой с (фиг. 1). Назовем эту систему № 1.



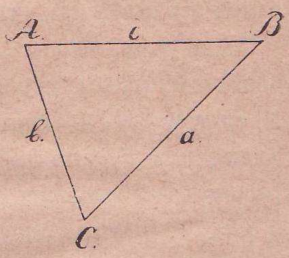
фиг. 1.

Аксиома 3а устанавливает обратную связь: она привязывает каждую прямую по крайней мере к двум точкам. Если прямая только одна, именно та, которая определяется 2 точками, постулируемыми акс. 1, то акс. 3а не имеет смысла, т. к. только повторяет акс. 1. Следовательно, акс. 3а требует по крайней мере еще одной прямой b, на которой могут быть те же точки А и В.

Аксиома 2 говорит о том, что прямая определяется любой парой своих точек. Мне кажется, что естественнее было бы поставить акс. 3а сейчас же после 1 и уже после нее 2. Ведь, бесполезно говорить о том, что любые две точки прямой определяют ее, если еще не установлено, есть ли на прямой хотя одна точка.

Аксиома 2 прежде всего требует, чтобы прямая b не проходила сразу через обе точки А и В, т. к. в противном случае А и В определяли бы две прямые с и q.

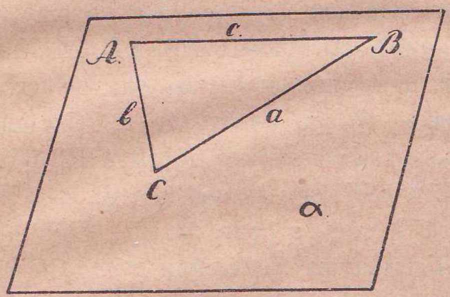
Оставляя точку A на прямой b, мы по 3a должны допустить на b еще одну точку C, не лежащую на c (акс. 2). В таком случае B не лежит на b (акс. 2), и, след., точки B и C определяют прямую a, отличную от b и c (акс. 1 и 2). Таким образом, акс. 1, 3a и 2 требуют 3 точек, не лежащих на одной прямой и трех прямых (фиг. 2). Эту систему обозначим № 2.



Фиг. 2.

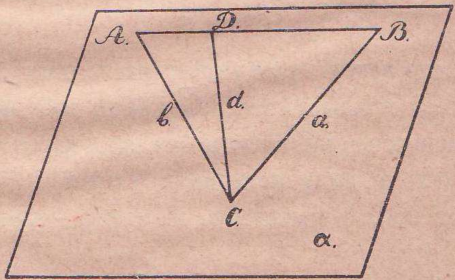
3. Аксиома 4 привязывает точки к плоскости, но не обратно. Те 3 точки, о которых идет речь в этой аксиоме, имеются уже в системе № 2. Теперь к этой системе присоединяется еще плоскость α. Вновь полученную систему обозначим № 3 (фиг. 3).

Аксиома 4 требует по крайней мере одной плоскости. Есть ли еще плоскости или нет, это неизвестно. Если есть, то они могут не иметь ни одной точки. Аксима 4 может быть поставлена сразу после 1, но не может быть поставлена перед 1, т. к. аксиома 4 говорит о прямой. При этом остается неизвестным, лежат ли прямые a, b, c в плоскости α или нет. Следует обратит внимание также и на то, что первые три аксиомы связывают только три основных понятия, между тем как аксиома 4 связывает уже четыре понятия.



Фиг. 3.

Можно было бы ожидать, что после акс. 4 должны следовать 3b и 5 совершенно аналогично первым трем, но это не так; такой порядок был бы уместен, если бы в указанных аксиомах не упоминалось о прямой. Упоминание о прямой заставляет точнее выяснить отношение прямой и плоскости. Тогда естественнее после акс. 4 поставить 6. Аксиома 6 предполагает, что хоть на одной прямой есть 3 точки. Пусть на прямой c, кроме A и B, есть еще точка D. Акс. 6 утверждает, что точка D прямой c лежит в плоскости α определяемой точками A, B и C. По акс. 2, пары A и D, B и D определяют ту же прямую c, но C и D определяют новую прямую d. Эту систему одной плоскости, 4 прямых и 4 точек, обозначим № 4 (фиг. 4).



Фиг. 4.

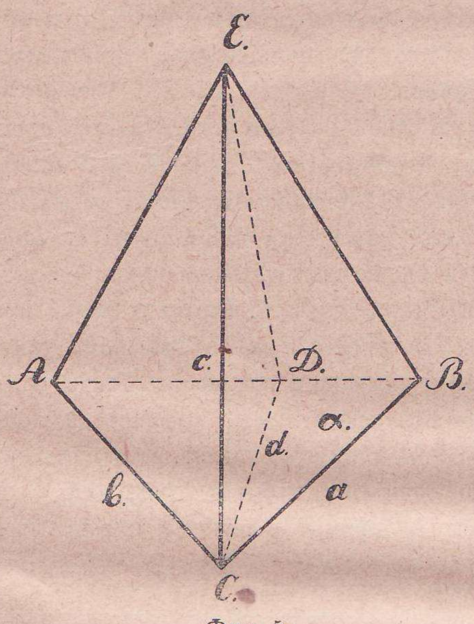
К сказанному можно добавить, что акс. 6 придает слову „прямая“ как будто иной смысл, чем акс. 1, 3a и 2. Здесь прямая понимается, повидимому, как класс точек, тогда как раньше она мыслилась независимо от точек. Такому пониманию способствует и сделанное после акс. 6 пояснение к ней. Впрочем, намек на понимание прямой, как класса точек, можно видеть уже в акс. 2.

Все же мне кажется, что Гильберт в основе понимал прямую, не как класс точек, и что двойственное впечатление создается только вследствие не совсем точной редакции аксиом 2 и 6. Теперь уже можно плоскость связать с точками. Акс. 3b привязывает каждую плоскость к 3 точкам, не лежащим на одной прямой, так что уже невозможно существование плоскости без точек.

Для того, чтобы акс. 3b давала что-нибудь новое сравнительно с акс. 4, необходимо постулировать либо еще одну плоскость, либо новую тройку точек. В системе № 4, кроме тройки точек A, B и C, определяющих плоскость α, имеются и другие тройки точек, не лежащих на одной прямой, след. нового расширения системы № 4 не требуется. Также удовлетворяется системой № 4 и акс. 5, которая требует, чтобы любая тройка точек ADC, BDC определяла ту же плоскость α.

4. Приведенные аксиомы требуют существования хотя бы одной плоскости; поэтому возможно, что все существующие точки, а след. и все существующие прямые, лежат в одной плоскости α.

Акс. 8 утверждает, что существует по меньшей мере 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Следовательно, требуется новое расширение системы. Пусть точка E не лежит в плоскости α системы № 4. В таком случае она не лежит ни на одной из прямых AB, BC, AC, CD, т. к. в противном случае она, по акс. 6, лежала бы в плоскости α. Следовательно, каждая тройка точек ABE, BCE, ACE и CDE определяет по акс. 4 плоскости β, γ, δ, ε (фиг. 5).



Фиг. 5.

Каждая из последних плоскостей имеет с плоскостью α и между собою по 2 общих точки, чем и удовлетворена акс. 7. Аксиому 8 естественно поставить перед 7, т. к., пока существует только одна плоскость, бесполезно говорить об отношении 2 плоскостей. Полученную систему 5 плоскостей, 8 прямых и 5 точек обозначим № 5. Это и есть наименьшее число вещей, требуемых аксиомами 1—8.

В предыдущем изложении мне приходилось говорить о более естественном расположении аксиом, но это касалось только поставленной задачи. Гильберт имел в виду построить систему независимых аксиом, для которой порядок конечно, безразличен. К этому вопросу я теперь и перехожу.

II

5. В § 10 „Grundlagen der Geometrie“ Гильберт говорит, что легко доказать независимость аксиом одной и той же группы между собою, но этих доказательств не приводит. В первом издании 1899 г. в этом месте Гильберт

сослался на свои литографированные лекции по евклидовой геометрии (зимний семестр 1898—1899 г.), изданные Шапером, но эта ссылка уже не повторилась ни в одном из следующих изданий. В своих же литографированных лекциях, которые я имел в руках в рукописной копии проф. Д. М. Синцова, по вопросу о независимости аксиом 1 — 8 Гильберт ограничился тремя примерами. Он доказывает независимость 2 от 1 и независимость 6 и 7 (в лит. лекц. 5 и 6) от всех остальных аксиом I группы.

Назовем „точками" целые положительные числа p_1, p_2, „прямыми" — целые отрицательные числа вида $-E\left(\frac{p_1, \ p_2,}{2}\right)$, где E означает „наибольшее целое число". Тогда 1 удовлетворена, а 2 нет. Пусть $p_1 = 1$, $p_2, = 2$, $p_3 = 3$. Тогда „точки" 1 и 2 определяют „прямую" — 1, 1 и 3 — тоже, а 2 и 3 — „прямую" 3.

Этот же пример показывает, что 2 независима и от 3a. В самом деле, любая прямая — $g = -E\frac{p_1, p_2}{2}$. Всегда можно положить $p_1 = 1$ и тогда $p_2 = 2g$ или $2g+1$. Во избежание неясности, добавим, что нуль в эти примеры не входит.

Легко также показать, что 1 не зависит от 2 и 3a. Назовем „точками" прямые евклидовой плоскости, а „прямыми" — точки. Тогда каждая точка определяется любыми двумя прямыми, через нее проходящими, след. 2 удовлетворяется, и через каждую точку проходит по крайней мере две прямых, след., 3a удовлетворена. Но 1 не удовлетворена, т. к. две прямых не всегда определяют точку.

6. Для доказательства независимости акс. 6 от остальных I группы, Гильберт строит особую систему вещей. Подразумевая под „точкой" тройку вещественных чисел, под „окружностями" и „плоскостями" соответствующие системы пропорциональных чисел и выражая связь между ними обычными уравнениями декартовой геометрии, Гильберт называет „точками" обычные точки, кроме одной точки 0, которая исключается, „плоскостями" — обычные плоскости и „прямыми" — окружности, проходящие через точку 0, и говорит, что в этой геометрии, очевидно, удовлетворяются все аксиомы группы I, кроме 6.

Это утверждение неверно, как оказывается при подробной проверке аксиом в отдельности.

Аксиома 1 удовлетворяется. В том случае, когда 2 точки лежат на обычной прямой, проходящей через 0, они и определяют эту прямую, т. к. коэффициент при квадратах обращается в нуль. Есть разница с обычной геометрической точки зрения, — кажется, что в этом случае прямая определяется одной точкой, но с аналитической точки зрения все в порядке, т. к. именно вторая точка и дает равенство нулю коэффициентов при квадратах переменных.

Аксиомы 2, 3a и 3b, очевидно, удовлетворяются.

Аксиома 4 не удовлетворяется. Возьмем 3 точки на обычной прямой, не проходящей через 0. Эти три точки не лежат на одной „прямой" в новом смысле и в то же время не определяют плоскости. В то же время 3 точки, лежащие на одной „прямой", т.-е. окружности, определяют плоскость, за исключением случая, когда окружность обращается в прямую, проходящую через 0.

Аксиома 5 также не удовлетворяется, т. к. на всякой плоскости можно выбрать прямую в обычном смысле, не проходящую через O, и на ней 3 точки. Эти точки плоскости не определяют.

Аксиома 6 не удовлетворяется, т. к. окружность, если не лежит в плоскости, имеет с нею не более двух общих точек. Аксиомы 7 и 8, очевидно, удовлетворяются.

Вероятно, Гильберт и сам заметил несовершенство своего примера и поэтому не поместил его в печатном издании, а, начиная со 2-го издания, уничтожил и ссылку на свои литографированные лекции.

Для доказательства независимости 7 от остальных Гильберт берет обыкновенное евклидово пространство, за исключением в нем одной прямой a и всех ее точек, кроме только одной точки O.

Действительно, все аксиомы удовлетворены, кроме 7, т. к. плоскости, пересекающиеся по исключенной прямой a, имея общую точку O, других общих точек не имеют.

7. E. H. Moore в своей статье „О проективных аксиомах геометрии" (Trans. of the Amer. Math. Soc. 1902 г.) дает доказательство независимости 4 и 6 от остальных I группы. Он говорит, что „геометрия для случая (1) обыкновенная трехмерная евклидова геометрия с опущением одной плоскости; для случая (2) служит обыкновенная евклидова двухмерная геометрия с тем видоизменением, что обыкновенная плоскость ABC—совокупность точек прямых AO, BO, CO, за исключением точки O, где точка O центр круга, вписанного в трехугольник ABC".

Ясно, что во (2) примере Мур ошибается. Ни одна прямая, кроме AO, BO и CO, не имеет у него более двух точек,— следовательно, самое условие аксиомы 6 не выполнено. Не удовлетворяется 3a, т. к. прямые, проходящие через O, за исключением AO, BO и CO, совсем не имеют точек; не удовлетворяется 7, т. к. плоскость одна, и 8, т. к. вне плоскости ABC нет точек.

Повидимому, Мур не придавал особого значения своим примерам, т. к. поместил их в подстрочном примечании на странице 145.

Для доказательства независимости 1, 3a, 3в и 4 от остальных достаточно взять обычное евклидовское пространство, с опущением в нем некоторых вещей.

Назовем точками тройки вещественных чисел (x, y, z), плоскостями — четверки пропорциональных чисел $(A:B:C:D)$ при условии, что A, B, C не нули одновременно. Пусть существование уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$ выражает, что точка (x, y, z) лежит в плоскости $(A:B:C:D)$. Назовем, наконец, прямыми совокупности точек, лежащих одновременно в двух плоскостях с различными $(A:B:C)$, т.-е. пары четверок пропорциональных чисел $(A:B:C:D,\ A':B':C':D')$. Как известно, эта пара четверок может быть заменена любой парой из трех следующих: $(a:b:o:d)$, $(a':o:c':d')$ и $(o:b'':c'':d'')$. Если две точки имеют не более одной равной координаты, то совершенно безразлично, какую из трех пар четверок выбрать для определения прямой; если же две координаты равны, напр. x и y, то одну четверку, в данном случае первую придется исключить, т. к. $(a:b:d)$ не определяется. Теперь перейдем к доказательству независимости.

Независимость 1. Присоединим условие, что исключается прямая ось z-ов, т.-е. $(0:1:0:0,\ 1:0:0:0)$, и тогда удовлетворены все аксиомы, кроме 1, потому что, напр., точки (0,0,0) и (0,0,k) никакой прямой уже не определяют.

Независимость 3a. Если мы оставим все прямые, но исключим, например, все точки вида (0,0,k), то ось z-ов, прямая (1 : 0 : 0: 0, 0 : 1 : 0 : 0) не имеет ни одной точки, так что удовлетворяются все аксиомы, кроме 3a.

Независимость 3b. Если исключим все точки одной плоскости, напр., плоскости XOY, т.-е. все тройки вида (x, y, 0), то плоскость XOY (0 : 0 : 1 : 0) не будет иметь ни одной точки, т.-е. не имеет места акс. 3b, а все остальные удовлетворяются.

Независимость 4. Исключим из построенной системы вещей одну плоскость, напр. (0 : 0 : 1 : 0), плоскость XOY, и аксиома 4 не имеет места, т. к. тройки вида (x, y, 0) никакой плоскости не определяют, тогда как остальные аксиомы удовлетворяются. Этот пример был дан и Муром.

8. A. Розенталь показал в Math Ann. Bd. 69, что в 3b достаточно постулировать одну точку, если ограничиться остальными аксиомами первой группы; если же присоединить и аксиомы II группы, то и в 3a достаточно постулировать тоже одну точку.

Мне кажется, что аксиома 8 является следствием остальных I группы.

Возьмем три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, и определяемую ими плоскость α (акс. 4). Акс. 7 требует существования по крайней мере еще одной плоскости β, отличной от α. В плоскости β есть три точки D, E, F, не лежащие на одной прямой (акс. 3b), которыми β определяется (акс. 5). Из этих трех точек одна по крайней мере, напр. D, не лежит в плоскости α, иначе плоскости α и β совпадали бы (акс. 5). Следовательно, есть 4 точки A, B, C и D, не лежащие в одной плоскости, что и т. д.

26 декабря 1923 г. Харьков.