У. С. Р. Р.

НАРОДНІЙ КОМІСАРІЯТ
ОСВІТИ
авління Науковими Установами

République
Socialiste des Soviéts de l'Ukraïne

COMMISSARIAT DE L'INSTRUCTION
DU PEUPLE
Office des Institutions Scientifiques

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

НАУКОВО-ДОСЛІДЧИХ МАТЕМАТИЧНИХ КАТЕДР УКРАЇНИ

Редактор АКАДЕМИК С. БЕРНШТЕЙН

Т. III

1928 г.

ANNALES SCIENTIFIQUES

DES INSTITUTIONS MATHÉMATIQUES DE L'UKRAÏNE

RÉDACTEUR PROF. S. BERNSTEIN

T. III

ДЕРЖАВНЕ ВИДАВНИЦТВО УКРАЇНИ

У. С. Р. Р.

НАРОДНІЙ КОМІСАРІЯТ ОСВІТИ
УПРАВЛІННЯ НАУКОВИМИ УСТАНОВАМИ

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

НАУКОВО-ДОСЛІДЧИХ МАТЕМАТИЧНИХ КАТЕДР УКРАЇНИ

Редактор АКАДЕМИК С. БЕРНШТЕЙН

Т. III

ДЕРЖАВНЕ ВИДАВНИЦТВО УКРАЇНИ
1928

RÉPUBLIQUE SOCIALISTE DES SOVIÉTS DE L'UKRAINE

COMMISSARIAT DE L'INSTRUCTION DU PEUPLE

OFFICE DES INSTITUTIONS SCIENTIFIQUES

ANNALES SCIENTIFIQUES

DES INSTITUTIONS MATHÉMATIQUES DE L'UKRAÏNE

Rédacteur PROF. S. BERNSTEIN

T. III

UKRAÏNE, ÉDITION d'ÉTAT

1928

51(061) (47.71.05)2 „1926“

Главлит № 5665
Заказ № 1975—500 экз.

„ОДЕСПОЛИГРАФ“
Первая Гостипография
имени Карла Маркса
Стурдзовский пер, № 3-а
Телеф. 2-50, 21-46

Ц. РУССЬЯН

Метод интегрирования дифференциального уравнения Pfaff'a.

Хотя вопрос об интегрировании дифференциального уравнения Pfaff'a:

$$\omega = \sum_{1}^{p} {}^k X_k \, dx_k = 0,$$

где X_k $k = 1 \ldots p$ — данные функции переменных $x_1 \ldots x_p$, не нов, однако до сих пор нет наиболее простого метода его решения. Метод, развитый трудами преимущественно немецких математиков (*), основывается на рассмотрении так называемой канонической формы дифференциального выражения ω и зависит поэтому от ее четности. E. Cartan (****) дал помощью результатов из теории символических дифференциальных выражений метод приведения дифференциального выражения ω к виду, заключающему, вообще, наименьшее число дифференциалов:

$$\omega = \sum_{1}^{n} {}^i U_i \, du_i. \tag{a}$$

Отсюда вытекает метод интегрирования дифференциального уравнения $\omega = 0$, не зависящий от четности класса дифференциального выражения ω. E. Goursat (**) дал подобный же метод, но в его изложении эта мысль проводится в тесной связи с рассмотрением канонической формы, а самый метод интегрирования требует, кроме интеграций, еще и последовательных преобразований дифференциального выражения ω.

Я дал в 1899 г. (***) в общих чертах метод интегрирования, основывающийся на рассмотрении „простейшей" формы (a) дифферен-

(*) Pfaff, Abh. d. Kön.-Preus. Akad. d. Wiss. aus dem Jahre 1814—1815, стр. 76—136. Gauss, Götting. gelehr. Anz., 1815. Jacobi, J. Crelle, Bd. 2, 1827. Natani, J. Crelle, Bd. 58, 1861. Clebsch, J. Crelle, Bde 60, 61; 1862—1863. Hamburger, Arch. d. Math. von J. Grunert, 1877. Frobenius, J. Crelle, Bd. 82, 1877. S. Lie, Ark. for Math. og Nat., 1877.

(**) E. Goursat, „Leçons sur le problème de Pfaff", 1922.

(***) Записки Новороссийского Университета, 1899.

(****) „Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff". (Ann. de l'Ec. Norm. Sup, 1899).

циального выражения ω; он отличается от упоминутых выше методов E. Cartan'a и E. Goursat'a тем, что он прямой, не требует последовательных преобразований, так что уравнения, определяющие переменные U_i, u_i $i=1\ldots n$ простейшей формы (a), устанавливаются непосредственно по коэффициентам данного выражения ω, чего нельзя сказать про методы E. Cartan'a и E. Goursat'a; наконец, он весьма прост, так как требует знания только необходимых и достаточных условий приводимости выражения ω к четной, или к нечетной канонической форме. Я намерен здесь развить предлагаемый мною метод. Все формулы упрощены введением корня квадратного косого симметрического определителя четной степени.

Я пользуюсь в последующем некоторыми вспомогательными формулами, которые я выведу прежде всего.

Все рассматриваемые функции предполагаются конечными, однозначными и непрерывными в соответствующих областях значений $x_1\ldots x_p$.

§ 1

1. Если дифференциальное выражение ω приводится к n-членной форме $\omega=\sum_1^n{}^i U_i du_i$, так что $X_k=\sum_1^n{}^i U_i\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}$ $k=1\ldots p$, то косой симметрический определитель степени $2n$:

$$\Delta_{x_r\ldots x_s}=\begin{vmatrix}(rr)\ldots(sr)\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ (rs)\ldots(ss)\end{vmatrix}$$

где $(\alpha\beta)=\dfrac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta}-\dfrac{\partial X_\beta}{\partial x_\alpha}$ $\alpha,\ \beta=r\ldots s$, имеет вид:

$$\Delta_{x_r\ldots x_s}=\left(\frac{\partial(u_1\ldots u_n U_1\ldots U_n)}{\partial(x_r\ldots x_s)}\right)^2. \tag{a}$$

2. Косой симметрический определитель четной степени $\sqrt{2n}$:

$$\begin{vmatrix}\sum_1^m{}^i t_i(rr)_i\ldots\sum_1^m{}^i t_i(sr)_i\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \sum_1^m{}^i t_i(rs)_i\ldots\sum_1^m{}^i t_i(ss)_i\end{vmatrix},$$

где $(\alpha\beta)_i=\dfrac{\partial X_{i\alpha}}{\partial x_\beta}-\dfrac{\partial X_{i\beta}}{\partial x_\alpha}$ $i=1\ldots m$, $\alpha,\ \beta=r\ldots s$, а $t_1\ldots t_m$, $x_r\ldots x_s$ — переменные независимые, и функции X_{i_k} $i=1\ldots m$, $k=r\ldots s$ не зависят от $t_1\ldots t_m$, есть алгебраическая форма степени $2n$ относительно $t_1\ldots t_m$. Его квадратный корень есть алгебраическая форма степени n.

Если $\Delta_{r\ldots s}^{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ означает символический определитель степени $2n$:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_r}\ldots\dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_{1r}\ldots X_{1s} \end{vmatrix}\alpha_1 \qquad \alpha_1+\cdots+\alpha_m=n,$$
$$\begin{vmatrix} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r}\ldots\dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_{mr}\ldots X_{ms} \end{vmatrix}\alpha_m$$

где символы $|\alpha_1\ldots|\alpha_m$ указывают, что соответствующая пара горизонталей входит $\alpha_1\ldots\alpha_m$ раз, и что элементы каждой из них не подчиняются коммутативному закону, то можно показать, что этот квадратный корень имеет вид:

$$\pm\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_m}\frac{1}{\alpha_1!\ldots\alpha_m!}\Delta_{r\ldots s}^{\alpha_1\ldots\alpha_m}t_1^{\alpha_1}\ldots t_m^{\alpha_m}. \tag{b}$$

Я сделаю только краткое указание на доказательство, так как оно элементарно: мы убеждаемся в справедливости этого утверждения при $n=1$ и доказываем его общность путем заключения от n к $n+1$.

3. Косой симметрический определитель четной степени $2n$:

$$\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & Y_{1r} & \ldots & Y_{1s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & Y_{m'r} & \ldots & Y_{m's} \\ -Y_{1r} & \ldots & -Y_{m'r} & \sum_1^m{}^i t_i(rr)_i & \ldots & \sum_1^m{}^i t_i(sr)_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -Y_{1s} & \ldots & -Y_{m's} & \sum_1^m{}^i t_i(rs)_i & \ldots & \sum_1^m{}^i t_i(ss)_i \end{vmatrix},$$

где $2m'\leqslant 2n$ и функции Y_{ik} $i=1\ldots m'$ $k=r\ldots s$ не зависят от $t_1\ldots t_m$, есть алгебраическая форма степени $2(n-m')$ относительно $t_1\ldots t_m$, если $n>m'$, а его квадратный корень есть форма степени $n-m'$. Если $\Delta_{1\ldots m', m'+r\ldots m'+s}^{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ означает символический определитель степени $2n-m'$

$$\begin{vmatrix} Y_{1r}\ldots Y_{1s} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Y_{m'r}\ldots Y_{m's} \\ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_r}\ldots\dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_{1r}\ldots X_{1s} \end{vmatrix}\alpha_1 \\ \cdot \\ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_r}\ldots\dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_{mr}\ldots X_{ms} \end{vmatrix}\alpha_m \end{vmatrix} \qquad \alpha_1+\cdots+\alpha_m=n-m'$$

можно показать, что этот квадратный корень имеет вид

$$\sum_{a_1\ldots a_m} \frac{1}{a_1!\ldots a_m!} \Delta^{a_1\ldots a_m}_{1\ldots m',\, m'+r\ldots m'+s} t_1^{a_1}\ldots t_m^{a_m}. \qquad \text{(c)}$$

Мы убеждаемся в справедливости этого помощью формулы (b) при $m'=1$ и доказываем общность ее путем заключения от m' к $m'+1$. Если $n=m'$, рассматриваемый косой симметрический определитель равен:

$$\begin{vmatrix} Y_{1r}\ldots Y_{1s} \\ Y_{m'r}\ldots Y_{m's} \end{vmatrix}^2,$$

а его квадратный корень:

$$\pm \begin{vmatrix} Y_{1r}\ldots Y_{1s} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Y_{m'r}\ldots Y_{m's} \end{vmatrix}.$$

Этот случай можно рассматривать, как частный предыдущего, полагая в нем $n \geqslant m'$, так как $0!=1$. Итак, формула (c) верна для $n \geqslant m'$.

4. Пусть будет дано дифференциальное выражение:

$$\Omega = t_1\omega_1 + \cdots + t_m\omega_m,$$

где $\omega_i = \sum_1^{p}{}^k X_{i_k}\, dx_k \;\; i=1\ldots m$; $t_1\ldots t_m$, $x_1\ldots x_p$ — независимые переменные, и функции X_{i_k} $i=1\ldots m$, $k=1\ldots p$ не зависят от $t_1\ldots t_m$. Если x_k $k=1\ldots p$ обозначить чрез t_{m+k}, выражение Ω примет вид:

$$\Omega = \sum_1^{p+m}{}^k T_k\, dt_k,$$

где

$$T_1 = \cdots = T_m = 0, \quad T_{m+k} = \sum_1^{m}{}^i t_i X_{i_k} \quad k=1\ldots p.$$

Косой симметрический определитель четной степени $2n$ вида $\Delta_{t_{m+r}\ldots t_{m+s}}$ (№ 1), где $2 \leqslant 2n \leqslant p$ равен:

$$\Delta_{t_{m+r}\ldots t_{m+s}} = \Delta_{x_r\ldots x_s} = \begin{vmatrix} \sum_1^m{}^i t_i(rr)_i \ldots \sum_1^m{}^i t_i(sr)_i \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum_1^m{}^i t_i(rs)_i \ldots \sum_1^m{}^i t_i(ss)_i \end{vmatrix},$$

а его квадратный корень имеет вид:

$$\pm \sum_{a_1\ldots a_m} \frac{1}{a_1!\ldots a_m!} \Delta^{a_1\ldots a_m}_{r\ldots s} t_1^{a_1}\ldots t_m^{a_m},$$

где

$$\Delta_{r\ldots s}^{a_1\ldots a_m} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_r} \ldots \frac{\partial}{\partial x_s} \\ X_{1r} \ldots X_{1s} \end{vmatrix} a_1 \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_r} \ldots \frac{\partial}{\partial x_s} \\ X_{mr} \ldots X_{ms} \end{vmatrix} a_m \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} a_1 + \cdots + a_m = n, \\ r \ldots s = 1 \ldots p. \end{matrix}$$

Если какое-либо из дифференциальных выражений ω_i $i=1\ldots m$, например, ω_q есть полный дифференциал, так что $\frac{\partial X_{q\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial X_{q\beta}}{\partial x_\alpha} = 0$ α, $\beta = 1\ldots p$, тогда определитель $\Delta_{x_r \ldots x_s}$ и его квадратный корень не заключают t_q. Символические определители $\Delta_{r\ldots s}^{a_1\ldots a_m}$ не заключают пары горизонталей:

$$\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x_r} \ldots \frac{\partial}{\partial x_s}, \\ X_{qr} \ldots X_{qs} \end{matrix}$$

и $a_q = 0$.

Если $m=1$ и $\omega_1 = \omega$, квадратный корень косого симметрического определителя степени $2n$, где $2 \leqslant 2n \leqslant p$

$$\begin{vmatrix} (rr) \ldots (sr) \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ (rs) \ldots (ss) \end{vmatrix}$$

имеет вид:

$$\pm \frac{1}{n!} \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_r} \ldots \frac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \quad\; X_s \end{vmatrix} n \right|. \tag{b$_1$}$$

Если дифференциальное выражение ω приводится к n-членной форме:

$$\omega = \sum_1^n {}_i U_i \, du_i,$$

так что

$$\begin{vmatrix} (rr) \ldots (sr) \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ (rs) \ldots (ss) \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial (u_1 \ldots u_n \; U_1 \ldots U_n)}{\partial (x_r \ldots x_s)} \right)^2$$

(формула (a)), то

$$\frac{1}{n!} \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_r} \cdots \frac{\partial}{\partial x_r} \\ X_r \ldots X_s \end{vmatrix} n \right| = \pm \frac{\partial (u_1 \ldots u_n \; U_1 \ldots U_n)}{\partial (x_r \ldots x_s)}. \tag{b$_2$}$$

5. Косой симметрический определитель степени $2n$, где $2m \leqslant 2n \leqslant \leqslant p+m$, $\Delta_{t_1\ldots t_m x_r \ldots x_s}$ дифференциального выражения Ω имеет вид:

$$\Delta_{t_1\ldots t_m x_r\ldots x_s} = \begin{vmatrix} 0 \ldots & 0 & X_{1r} & \ldots X_{1s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 \ldots & 0 & X_{mr} & \ldots X_{ms} \\ -X_{1r} \ldots & -X_{mr} & \sum_1^m i\, t_i (rr)_i & \ldots \sum_1^m i\, t_i (sr)_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -X_{1s} \ldots & -X_{ms} & \sum_1^m i\, t_i (rs)_i & \ldots \sum_1^m i\, t_i (ss)_i \end{vmatrix},$$

а его квадратный корень по формуле (c) при $m = m'$, $Y_{i_k} = X_{i_k}$ $i=1\ldots m$ $k=1\ldots p$ вид:

$$\pm \sum_{a_1\ldots a_m} \frac{1}{a_1!\ldots a_m!} \Delta^{a_1\ldots a_m}_{r\ldots s}\, t_1^{a_1}\, t_m^{am}, \qquad (c_1)$$

где

$$\Delta^{a_1\ldots a_m}_{r\ldots s} = \begin{vmatrix} X_{1r} \ldots X_{1s} & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ X_{mr} \ldots X_{ms} & \\ \frac{\partial}{\partial x_r} \ldots \frac{\partial}{\partial x_s} & a_1 \\ X_{1r} \ldots X_{1s} & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ \frac{\partial}{\partial x_r} \ldots \frac{\partial}{\partial x_r} & a_m \\ X_{mr} \ldots X_{ms} & \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} a_1 + \cdots + a_m = n - m \\ r \ldots s = 1 \ldots p. \end{matrix}$$

Если $m=1$ и $\omega_1 = \omega$ квадратный корень косого симметрического определителя степени $2n$, где $2 \leqslant 2n \leqslant p+1$,

$$\begin{vmatrix} 0, & X_r & \ldots & X_s \\ -X_r & (rr) & \ldots & (sr) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ -X_s & (rs) & \ldots & (ss) \end{vmatrix}$$

имеет вид;

$$\pm \frac{1}{(n-1)!} \begin{vmatrix} X_r \ldots X_s & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ \frac{\partial}{\partial x_r} \ldots \frac{\partial}{\partial x_s} & n-1 \\ X_r \ldots X_s & \end{vmatrix}. \qquad (c_2)$$

Если $\omega_1 = \omega$, и $\omega_2 = du_1 \ldots \omega_m = du_{m-1}$, так что

$$\Omega = t_1\omega + t_2 du_1 + \cdots + t_m du_{m-1}$$

то косой симметрический определитель $\Delta_{t_1\ldots t_m x_r \ldots x_s}$ степени $2n$, где $2m \leqslant 2n \leqslant p+m$, имеет вид:

$$\left|\begin{array}{cccccc} 0, & 0\ldots & 0, & X_r & \ldots & X_s \\ 0, & 0\ldots & 0, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0\ldots & 0, & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} \\ -X_r & -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_r}\ldots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r}, & t(rr) & \ldots & t(sr) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -X_s & -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_s}\ldots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s}, & t(rs) & \ldots & t(ss) \end{array}\right|,$$

а его квадратный корень имеет вид:

$$\pm\frac{1}{(n-m)!}t^{n-m}\left|\begin{array}{ccc} X_r & \ldots & X_s \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r & \ldots & X_s \end{array}\right| n-m \Bigg|,$$

если для удобства $t_1 \ldots t_m$ означены через $t\, t_1 \ldots t_{m-1}$. Таким образом квадратный корень косого симметрического определителя степени $2n$, где $2m \leqslant 2n \leqslant p+m$,

$$\left|\begin{array}{cccccc} 0, & 0\ldots & 0, & X_r & \ldots & X_s \\ 0, & 0\ldots & 0, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0\ldots & 0, & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} \\ -X_r & -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_r}\ldots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r}, & t(rr) & \ldots & t(sr) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -X_s & -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_s}\ldots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s}, & t(rs) & \ldots & t(ss) \end{array}\right|$$

имеет вид:

$$\pm\frac{1}{(n-m)!}\left|\begin{array}{ccc|c} X_r & \ldots & X_s & \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} & \\ \cline{1-3} \dfrac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} & n-m \\ X_r & \ldots & X_s & \end{array}\right|. \tag{c$_3$}$$

6. Если дифференциальное выражение ω приводится к n-членной форме:

$$\omega=\sum_1^n{}_i\, U_i\, du_i\,,$$

так что дифференциальное выражение:

$$\Omega=t\omega+t_1\ du_1+\cdots+t_{m-1}\ du_{m-1}$$

приводится к виду:

$$\Omega=(tU_1+t_1)\,du_1+\cdots+(tU_{m-1}+t_{m-1})\,du_{m-1}+tU_m du_m+\cdots+tU_n du_n,$$

тогда по формуле (a):

$$\Delta_{tt_1\ldots t_{m-1}\,x_r\ldots x_s}=\left(\frac{\partial(u_1\ldots u_n,\ tU_1+t_1\ldots tU_{m-1}+t_{m-1},\ tU_m\ldots tU_n)}{\partial(tt_1\ldots t_{m-1},\ x_r\ldots x_s)}\right)^2$$

или

$$\Delta_{tt_1\ldots t_{m-1}\,x_r\ldots x_s}=\left(\frac{\partial(u_1\ldots u_n,\ tU_{m1}\ldots tU_n)}{\partial(tx_r\ldots x_s)}\right)^2,$$

а его квадратный корень равен:

$$\pm\frac{\partial(u_1\ldots u_n,\ tU_{m1}\ldots tU)}{\partial(t,\ x_r\ldots x_s)}.$$

Из сравнения обоих выражений его следует, что

$$\frac{t^{n-m}}{(n-m)!}\left|\begin{array}{ccc|c} X_r & \ldots & X_s & \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} & \\ \cline{1-3} \dfrac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} & n-m \\ X_r & \ldots & X_s & \end{array}\right|=\pm\frac{\partial(u_1\ldots u_n,\ tU_m\ldots tU_n)}{\partial(t,\ x_r\ldots x_s)}. \tag{d}$$

Если в частном случае $U_1 = 1$, так что дифференциальное выражение ω приводится к n-членной форме $du_1 + \sum_2^n{}_j U_j\, du_j$, тогда при $m = 1$ получаем, что

$$\frac{1}{(n-1)!}\left|\begin{array}{c} X_s \dots X_r \\ \dfrac{\partial}{\partial x} \dots \dfrac{\partial}{\partial x} \\ X_s \dots X_r \end{array}\right| n-1 \Bigg| = \pm \frac{\partial (u_1 \dots u_n,\; U_2 \dots U_m)}{\partial (x_r \dots x_s)}. \qquad (\alpha_1)$$

7. Мы рассмотрим еще один случай. Пусть

$$\Omega = t\omega + t_1 du_1 + \dots + t_{m-1} du_{m-1} + t_m f,$$

где функции $u_1 \dots u_{m-1}$, f, не зависят от t, $t_1 \dots t_m$, и $m \geqslant 1$. Косой симметрический определитель степени $2n+2$, где $2(m+1) \leqslant 2n+2 \leqslant \leqslant p+m+1$, вида $\Delta_t t_1 \dots t_m x_r \dots x_s$ есть:

$$\left|\begin{array}{cccccc} 0, & 0 & 0, & 0, & X_r & \dots\; X_s \\ 0, & 0 \;\dots & 0, & 0, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} & \dots\; \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0 \;\dots & 0, & 0, & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & \dots\; \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} \\ 0, & 0 \;\dots & 0, & 0, & \dfrac{\partial f}{\partial x_r} & \dots\; \dfrac{\partial f}{\partial x_s} \\ -X_r & -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} \dots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & -\dfrac{\partial f}{\partial x_r}, & t(rr) & \dots\; t(sr) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -X_s & -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \dots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} & -\dfrac{\partial f}{\partial x_s}, & t(rs) & \dots\; t(ss) \end{array}\right|,$$

а его квадратный корень есть:

$$\pm \frac{1}{(n-m)!} t^{n-m} \left|\begin{array}{c} X_r \quad\dots\quad X_s \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} \quad\dots\quad \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} \dots \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_r} \quad\dots\quad \dfrac{\partial f}{\partial x_s} \\ \left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial}{\partial x_r} \quad\dots\quad \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \quad\dots\quad X_s \end{array}\right| n-m \end{array}\right|,$$

так что квадратный корень косого симметрического определителя степени $2n+2$, где $2(m+1)\leqslant 2n+2\leqslant p+m+1$:

$$\begin{vmatrix} 0, & 0 \ldots & 0, & 0, & \frac{\partial f}{\partial x_r} \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_s} \\ 0, & 0 \ldots & 0, & 0, & \frac{\partial u_1}{\partial x_r} \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0 \ldots & 0, & 0, & \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} \ldots & \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} \\ 0, & 0, & 0, & 0, & X_r \ldots & X_s \\ -\frac{\partial f}{\partial x_r}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_r} & -\frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r}, & X_r, & (rr) \ldots & (sr) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial f}{\partial x_s}, & -\frac{\partial u_1}{\partial x_s} \ldots & -\frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s}, & -X_s, & (rs) \ldots & (ss) \end{vmatrix}$$

есть:

$$\pm\frac{1}{(n-m)!}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_r} \ldots \frac{\partial f}{\partial x_s} & \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_r} \ldots \frac{\partial u_1}{\partial x_s} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} \ldots \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} & \\ X_r \ldots X_s & \\ \frac{\partial}{\partial x_r} \ldots \frac{\partial}{\partial x_s} & n-m \\ X_r \ldots X_s & \end{vmatrix}. \qquad (c_4)$$

Если в частном случае дифференциальное выражение ω приводится к n-членной форме $\omega=\sum_1^n iU_i du_i$, так что дифференциальное выражение Ω получает вид $n+1$-членной формы:

$$\Omega=(tU_1+t_1)\,du_1+\cdots+(tU_{m-1}+t_{m-1})\,du_{m-1}+tU_m du_m+\cdots+ \\ +tu_n dU_n+t_m df,$$

тогда квадратный корень косого симметрического определителя $\Delta_{tt_1\ldots t_m x_r \ldots x_s}$ степени $2n+2$ имеет по формуле (а) еще вид:

$$\pm\frac{\partial(f.\ u_1\cdots u_n,\ tU_1+t_1,\ldots,\ tU_{m-1}+t_{m-1},\ tU_m,\ldots,\ tU_n,\ t_m)}{\partial(tt_1\ldots t_m,\ x_r\ldots x_s)},$$

или вид:

$$\pm\frac{\partial(f,\ u_1,\ldots,\ u_n,\ tU_m,\ldots,\ tU_n}{\partial(t,\ x_r,\ldots,\ x_s)}.$$

Сравнивая оба выражения этого квадратного корня, получаем, что

$$\frac{t^{n-m}}{(n-m)!}\left|\begin{array}{ccc|c} \dfrac{\partial f}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_s} & \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} & \\ X_r & \ldots & X_s & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} & n-m \\ X_r & \ldots & X_s & \end{array}\right| = \pm \frac{\partial (f,\, u_1 \ldots u_n,\, tU_m \ldots tU_n)}{\partial (t,\, x_r \ldots x_s)}. \tag{e}$$

Если в частном случае $U_1=1$, так что дифференциальное выражение ω приводится к n-членной форме $du_1+\sum_2^n j\,.\,U_j\,.\,du_j$, то при $m=1$ получим, что

$$\frac{1}{(n-1)!}\left|\begin{array}{ccc|c} \dfrac{\partial f}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_s} & \\ X_r & \ldots & X_s & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} & n-1 \\ X_r & \ldots & X_s & \end{array}\right| = \pm \frac{\partial (f,\, u_1 \ldots u_n,\, U_2 \ldots U_n)}{\partial (x_r \ldots x_s)}. \tag{f$_1$}$$

8. Система $p+1$ уравнений в полных дифференциалах:

$$\begin{gathered} \omega = X_1 dx_1 + \cdots + X_p dx_p = 0, \\ (11)\, dx_1 + \cdots + (p1)\, dx_p = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (1p)\, dx_1 + \cdots + (pp)\, dx_p = 0, \end{gathered}$$

установленная для дифференциального выражения ω, всегда сполна интегрируема (Frobenius, l. c.).

Для дифференциального выражения:

$$\Omega = t_1\omega_1 + \cdots + t_m\omega_m,$$

где $\omega_i = \sum_1^p {}_k X_{i_k} dx_k$, $i=1\ldots m$, и функции X_{i_k}, $i=1\ldots m$, $k=1\ldots p$

не зависят от $t_1 \ldots t_m$, эта система имеет вид:

$$\Omega = t_1\omega_1 + \cdots + t_m\omega_m = 0,$$

$$\omega_1 = 0, \ldots \quad \omega_m = 0,$$

$$-X_{11}dt_1 - \cdots - X_{m_1}dt_m + \sum_1^m {}^i t_i(11)_i dx_1 + \cdots + \sum_1^m {}^i t_i(p1)_i dx_p = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-X_{1p}dt_1 - \cdots - X_{mp}dt_m + \sum_1^m {}^i t_i(1p)_i dx_1 + \cdots + \sum_1^m {}^i t_i(pp)_i dx_p = 0.$$

Первое уравнение есть следствие остальных:

$$X_{11}\,dx_1 + \cdots + X_{1p}\,dx_p = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_{m_1}dx_1 + \cdots + X_{mp}dx_p = 0, \tag{g}$$

$$-X_{11}\,dt_1 - \cdots - X_{m_1}\,dt_m + \sum_1^m {}^i t_i\,(11)_i dx_1 + \cdots + \sum_1^m {}^i t_i\,(p1)_i dx_p = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-X_{np}\,dt_1 - \cdots - X_{mp}dt_m + \sum_1^m {}^i t_i\,(1p)_i dx_1 + \cdots + \sum_1^m {}^i t_i\,(pp)_p dx_p = 0,$$

представляющих сполна интергрируемую систему.

Для дифференциального выражения:

$$\Omega = t\omega + t_1du_1 + \cdots + t_{m-1}du_{m-1}$$

эта последняя система имеет вид:

$$\omega = X_1dx_1 + \cdots + X_pdx_p = 0,$$

$$du_1 = 0 \ldots \quad du_{m-1} = 0, \tag{g$_1$}$$

$$-X_1dt - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}dt_1 - \cdots - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1}dt_{m-1} + t(11)\,dx_1 + \cdots + t(p1)\,dx_p = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-X_pdt - \frac{\partial u_1}{\partial x_p}dt_1 - \cdots - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_p}dt_{m-1} + t(1p)\,dx_1 + \cdots + t(pp)\,dx_p = 0.$$

§ 2

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы дифференциальное выражение $\omega = \sum_1^p {}^k X_k dx_k$ приводилось к n-членной канонической форме четной(*), или к нечетной(**), состоит в том, чтобы найвысшая степень отличных от нуля главных миноров косых симметрических определителей:

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} 0, & X_1 \ldots X_p \\ -X_1 & (11)\ldots(p1) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ -X_p & (1p)\ldots(pp) \end{vmatrix}, \quad \varDelta = \begin{vmatrix} (11)\ldots(p1) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (1p)\ldots(pp) \end{vmatrix}$$

была одна и та же $2n$, или была соответственно $2n$, $2n-2$.

Если дифференциальное выражение ω приводится к n-членной четной канонической форме:

$$\omega = \sum_1^n {}^i U_i du_i$$

и если, например:

$$\varDelta_{x_1 \ldots x_{2n}} = \begin{vmatrix} (11) \ldots (2n\,1) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (12n) \ldots (2n2n) \end{vmatrix} > 0,$$

то функция $u_m \, (m = 1 \ldots n)$ определяется по уже определенным функциям $u_1 \ldots u_{m-1}$, как произвольное независимое от последних решение полной системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{vmatrix} 0, & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n}} \\ X_1 & (11) \ldots (2n1) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_{2n} & (12n) \ldots (2n2n) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n}} & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n+\varrho}} \\ (11) \ldots (2n1) & (2n+\varrho\, 1) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ (12n) \ldots (2n2n) & (2n+\varrho\, 2n) \end{vmatrix} = 0 \quad \varrho = 1 \ldots p-2n$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n}} \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial x_1} & (11) \ldots (2n1) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial x_{2n}} & (12n) \ldots (2n2n) \end{vmatrix} = 0 \quad j = 1 \ldots m-1$$

(Hamburger, l. c., стр. 202—203).

Дифференциальное выражение

$$\Omega = t_1\omega_1 + \cdots + t_m\omega_m \quad (\S\ 1)$$

всегда четного класса, так как в этом случае определители $\varDelta_1$ и $\varDelta$ имеют вид:

(*) $\omega = \sum_1^n {}^i U_i \, du_i$.

(**) $\omega = du_1 + \sum_2^n {}^j U_j \, du$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0, & \sum_1^m i\, t_i X_{i1} & \ldots & \sum_1^m i\, t_i X_{ip} \\ 0 & \ldots & 0, & X_{11} & \ldots & X_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0, & X_{m1} & \ldots & X_{mp} \\ -\sum_1^m i\, t_i X_{i1} & \ldots & -X_{m1}, & \sum_1^m i\, t_i (11)_i & \ldots & \sum_1^m i\, t_i (p1)_i \\ -\sum_1^m i\, t_i X_{i1} & \cdots & -X_{mp}, & \sum_1^m i\, t_i (1p)_i & \ldots & \sum_1^m i\, t_i (pp)_i \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0, & X_{11} & \ldots & X_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0, & X_{m1} & \ldots & X_{mp} \\ -X_{11} & \ldots & -X_{m1}, & \sum_1^m i\, t_i (11)_i & \ldots & \sum_1^m i\, t_i (p1)_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -X_{1p} & \ldots & -X_{mp}, & \sum_1^m i\, t_i (1p)_i & \ldots & \sum_1^m i\, t_i (pp)_i \end{vmatrix},$$

откуда и следует утверждение.

Необходимое и достаточное условие, чтобы дифференциальное выражение Ω было класса $2n$, состоит, поэтому, в том, чтобы наивысшая степень отличных от нуля главных миноров косого симметрического определителя Δ была равна $2n$. Если дифференциальные выражения $\omega_i \quad i = 1 \ldots m$ линейно независимы, так что, по крайней мере, один из главных миноров степени $2m$ вида:

$$\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0, & X_{1r} & \ldots & X_{1s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0, & X_{mr} & \ldots & X_{ms} \\ -X_{1r} & \ldots & -X_{mr}, & \sum_1^m i\, t_i (rr)_i & \ldots & \sum_1^m i\, t_i (sr)_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -X_{1s} & \ldots & -X_{ms}, & \sum_1^m i\, t_i (rs)_i & \ldots & \sum_1^m i\, t_i (ss)_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_{1r} & \ldots & X_{1s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{mr} & \ldots & X_{ms} \end{vmatrix}^2$$

отличен от нуля, то $2n \geqslant 2m$. Далее, если $2q$ есть наивысшая степень отличных от нуля главных миноров определителя Δ указанного вида, т. е. заключающих элементы его m первых горизонталей (и колонн), то $2n = 2q$. В самом деле, те главные миноры степени $2q+2$, которых матриссы образуются присоединением к элементам одного из вышеупомянутых отличных от нуля главных миноров степени $2q$ элементов остальных горизонталей и колонн, равны тождественно нулю. Этого же достаточно (Frobenius, l. c.), чтобы были тождественно равны нулю все миноры степени $2q+1$ определителя Δ. Поэтому $2n=2q$. Отсюда снова следует, что необходимое и достаточное условие, чтобы дифференциальное выражение Ω, в котором ω_i $i=1\ldots m$ линейно независимы, было класса $2n$, состоит в том, чтобы была равна $2n$ наивысшая степень отличных от нуля только тех главных миноров определителя Δ, которые заключают элементы его m первых горизонталей (и колонн), т. е. главных миноров вида:

$$\Delta_{t_1\ldots t_m\, x_r\ldots x_s}=\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & X_{1r} & \ldots & X_{1s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & X_{mr} & \ldots & X_{ms} \\ -X_{1r} & \cdots & -X_{mr}, & \sum_1^m {}^i\, t_i(rr)_i & \ldots & \sum_1^m {}^i\, t_i(sr)_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -X_{1s} & \cdots & -X_{ms}, & \sum_1^m {}^i\, t_i(rs)_i & \ldots & \sum_1^m {}^i\, t_i(ss)_i \end{vmatrix}.$$

Можно рассматривать вместо этих косых симметрических определителей четной степени их квадратные корни. Тогда на основании формулы (c_1) § 1 получается:

Теорема I. Класс дифференциального выражения:

$$\Omega=t_1\omega_1+\cdots+t_m\omega_m,$$

где $\omega_i=\sum_1^p {}^k\, X_{i_k}dx_k$ $i=1\ldots m$; $t_1\ldots t_m$, $x_1\ldots x_p$ — переменные независимые, и функции X_{i_k} $i=1\ldots m$, $k=1\ldots p$ не зависят от $t_1\ldots t_m$, всегда число четное. Если дифференциальные выражения ω_i $i=1\ldots m$ линейно независимы, то последнее не меньше $2m$. Необходимое и достаточное условие, чтобы класс дифференциального выражения Ω был в этом случае равен $2n$, где $2m\leqslant 2n\leqslant p+m$, состоит в том, чтобы найвысшая степень отличных от нуля символических определителей:

$$\begin{vmatrix} X_{1r}\ldots X_{1s} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ X_{mr}\ldots X_{ms} & \\ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_r}\ldots\dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_{1r}\ \ldots\ X_{1s} \end{vmatrix} & a_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_r}\ldots\dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_{mr}\ldots X_{ms} \end{vmatrix} & a_m \end{vmatrix}$$

была равна $2n-m$.

Рассмотрим три частных случая.

a) Если
$$\Omega = t\omega + t_1 du_1 + \cdots + t_{m-1} du_{m-1},$$
где функции $u_1 \ldots u_{m-1}$ не зависят от t, $t_1 \ldots t_{m-1}$ и дифференциальные выражения ω, $du_1 \ldots du_{m-1}$ линейно независимы, то необходимое и достаточное условие, чтобы класс Ω был равен $2n$, где $2m \leqslant 2n \leqslant p+m$, состоит в том, чтобы наивысшая степень отличных от нуля символических определителей:
$$\left|\begin{array}{ccc|c}
X_r & \ldots & X_s & \\
\dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} & \\
\cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \\
\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} & \\
\dfrac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} & \alpha \\
X_r & \ldots & X_s &
\end{array}\right|$$
была равна $2n-m$. Если класс Ω равен $2n$, то сполна интегрируемая система $p+m$ дифференциальных уравнений (g_1) § 1 заключает только $2n$ независимых уравнений, потому что определитель этой системы:
$$\left|\begin{array}{cccccc}
0 & \ldots & 0 & X_1 & \ldots & X_p \\
0 & & 0 & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_p} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \ldots & 0 & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_p} \\
-X_1 & \ldots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1}, & t(11) & \ldots & t(p1) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-X_p & \ldots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_p}, & t(1p) & \ldots & t(pp)
\end{array}\right| .$$
есть определитель Δ дифференциального выражения Ω.

Если, поэтому, например:
$$\left|\begin{array}{ccc|c}
X_1 & \ldots & X_{2n-m} & \\
\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} & \\
\cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \\
\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} & \\
\dfrac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-m}} & n-m \\
X_1 & \ldots & X_{2n-m} &
\end{array}\right| \gtreqless 0,$$

то эти $2n$ независимые уравнения суть:

$$\omega = X_1 dx_1 + \cdots + X_p dx_p = 0,$$
$$du_1 = 0 \ldots du_{m-1} = 0, \tag{g$_2$}$$
$$-X_1 dt - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dt_1 - \cdots - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} dt_{m-1} + t(11)\, dx_1 + \cdots + t(p1)\, dx_p = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-X_{2n-m} dt - \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} dt_1 - \cdots - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} dt_{m-1} + t(12n-m)\, dx_1 + \cdots$$
$$\cdots + t(p\,2n-m)\, dx_p = 0$$

и представляют сполна интегрируемую систему.

b) Если
$$\Omega = t\omega + t_1 du_1 + \cdots + t_{m-1} du_{m-1} + t_m df,$$
где функции $u_1 \ldots u_{m-1}, f$ не зависят от $t, t_1 \ldots t_{m-1}$ и $\omega, du_1 \ldots du_{m-1}, df$ линейно независимы, то необходимое и достаточное условие, чтобы класс Ω был равен $2n$, где $2(m+1) \leqslant 2n \leqslant p+m+1$, состоит в том, чтобы, по крайней мере, один символический определитель степени $2n-m-1$:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x_r} \ \ldots\ \dfrac{\partial f}{\partial x_s} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} \ \ldots\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} \ldots \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} \\ X_r \ \ldots\ X_s \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x_r} \ \ldots\ \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \ \ldots\ X_s \end{array}\right| n-m-1 \end{array}\right| \qquad r \ldots s = 1 \ldots p,$$

был отличен от нуля, и чтобы все символические определители степени $2n-m+1$, если таковые могут быть установлены:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x_r} \ \ldots\ \dfrac{\partial f}{\partial x_s} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} \ \ldots\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} \ \ldots\ \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} \\ X_r \ \ldots\ X_s \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x_r} \ \ldots\ \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \ \ldots\ X_s \end{array}\right| n-m \end{array}\right|$$

тождественно обращались в нуль. Этот результат следует из теоремы (I), есл в ней вместо m положить $m+1$, если $\omega_1 = df$, $\omega_2 = du_1 \cdots \omega_m = du_{m-1}$, $\omega_{m+1} = \omega$ и если $t_1 \dots t_{m+1}$ обозначить через $t_m, t_1, \dots, t_{m-1}, t$.

Если класс дифференциального выражения:

$$\Omega = t_1\omega_1 + \cdots + t_m\omega_m,$$

где $\omega_i = \sum_1^p {}_k X_{i_k} dx_k$, $i = 1 \dots m$, и ω_i линейно независимы, равен $2n$, то сполна итегрируемая система (g) § 1 заключает только $2n$ независимых уравнений, так как определитель ее есть определитель $\varDelta$ дифференциального выражения Ω. На этом основании можно доказать теорему: Необходимое и достаточное условие, чтобы система m независимых уравнений в полных дифференциалах:

$$\begin{gathered} \omega_1 = X_{11}dx_1 + \cdots + X_{1p}dx_p = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \omega_m = X_{m1}dx_1 + \cdots + X_{mp}dx_p = 0 \end{gathered}$$

была сполна интегрируемой, состоит в том, чтобы все определители $m+2$-й степени:

$$\begin{vmatrix} X_{1r} \dots X_{1s} \\ \dots\dots \\ X_{mr} \dots X_{ms} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} \dots \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_{ir} \dots X_{is} \end{vmatrix} \qquad i = 1 \dots m, \quad r \dots s = 1 \dots p$$

были тождественно равны нулю(*). В самом деле, если эта система сполна интегрируема и если система ее m полных интегралов есть $u_s = e_s$, $s = 1 \dots m$, так что $\omega_i = \sum_1^m {}_s a_{i_s} du_s$, $i = 1 \dots m$ и $\sum \pm a_{11} \dots a_{m_m} \neq 0$, то дифференциальное выражение $\Omega = t_1\omega_1 + \cdots + t_m\omega_m$ приводится к виду:

$$\Omega = U_1 du_1 + \cdots + U_m du_m,$$

где $U_s = \sum_1^m {}_i t_i a_{i_s}$, $s = 1 \dots m$ и, следовательно, переменные U_s, u_s, $s = 1 \dots m$ — независимы. Поэтому класс дифференциального выражения Ω равен $2m$. Обратно, если его класс равен $2m$, то система $\omega_i = 0$, $i = 1 \cdots m$ — сполна интегрируемая. В самом деле, тогда сполна интегируруемая система (g) § 1 заключает только $2m$ независимых

(*) Два других доказательства были даны мною в 1898 г. (Записки Новороссийского университета), уравнений, например:

$$\omega_1 = X_{11}dx_1 + \cdots + X_{1p}dx_p = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\omega_m = X_{m1}dx_1 + \cdots + X_{mp}dx^p = 0,$$

$$-X_{11}dt_1 - \cdots - X_{m1}dt_m + \sum_1^m {}_i t_i(11)_i dx_1 + \cdots + \sum_1^m {}_i t_i(p1)_i dx_p = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$-X_{1m}dt_1 - \cdots - X_{mm}dt_m + \sum_1^m {}_i t_i(1m)_i dx_1 + \cdots + \sum_1^m {}_i t_i(pm)_i dx_p = 0,$$

в числе которых находится необходимо и рассматриваемая система. Так как последняя не заключает $t_1 \ldots t_m$, $dt_1 \ldots dt_m$ и так как m последних уравнений независимы относительно $dt_1 \ldots dt_m$, она сама по себе сполна интегрируема.

Итак, необходимое и достаточное условие, чтобы система m независимых уравнений в полных дифференциалах была сполна интегрируемой, состоит в том, чтобы класс дифференциального выражения:

$$\Omega = t_1\omega_1 + \cdots + t_m\omega_m$$

был равен $2m$. Для этого, в свою очередь, по теореме I при $2n = 2m$ необходимо и достаточно, чтобы все символические определители степени $2n - m + 2 = m + 2$:

$$\begin{vmatrix} X_{1r} & \ldots & X_{1s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{mr} & \ldots & X_{ms} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_{ir} & \ldots & X_{is} \end{vmatrix} \qquad i = 1 \ldots m \quad r \ldots s = 1 \ldots p,$$

были тождественнно равны нулю, что и требовалось доказать.

§ 3

Перейдем теперь к нашей задаче.

Пусть будет дано дифференциальное уравнение Pfaff'a:

$$\omega = \sum_1^p {}_k X_k dx_h = 0.$$

Мы сначала приведем дифференциальное выражение ω к простейшей форме, т. е. к форме с наименьшим числом дифференциалов. Всякое дифференциальное выражение ω приводится к простейшей форме:

$$\omega = \sum_1^n {}_i U_i du_i,$$

например, к канонической. Если последняя n-членная, то $2n \leqslant p$, или $2n-1 \leqslant p$; следовательно, во всяком случае $2n \leqslant p+1$. Дифференциальное выражение $t\omega$, где $t, x_1, \ldots, x_p$ — переменные независимые, тогда класса $2n$, так что u_i, tU_i, $i=1\ldots n$ — независимые функции.

Обратно, если класс дифференциального выражения $t\omega$ равен $2n$, простейшая форма дифференциального выражения ω n-членная, так как класс дифференциального выражения $t\omega$ есть инвариант.

Таким образом, необходимое и достаточное условие, чтобы простейшая форма дифференциального выражения ω была n-членной, состоит в том, чтобы класс дифференциального выражения $t\omega$ был равен $2n$. Если, поэтому, положить в теореме I $m=1$, $\omega_1=\omega$, получается

Теорема II. Необходимое и достаточное условие, чтобы простейшая форма дифференциального выражения ω была n-членной, состоит в том, чтобы, по крайней мере, один символический определитель степени $2n-1$ $(\leqslant p)$ вида:

$$\begin{vmatrix} X_r \ldots X_s \\ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_r} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_s} \end{vmatrix} n-1 \\ X_r \ldots X_s \end{vmatrix} \quad r\ldots s = 1\ldots p,$$

был отличен от нуля, и чтобы все определители степени $2n+1$ этого вида:

$$\begin{vmatrix} X_r \ldots X_s \\ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_r} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_s} \end{vmatrix} n \\ X_r \ldots X_s \end{vmatrix},$$

если они могут быть установлены, обращались тождественно в нуль. Если эти условия выполняются, дифференциальное выражение ω приводится к простейшей n-членной форме:

$$\omega = \sum_1^n {}^i U_i \, du_i .$$

Я изложу два метода ее определения.

Первый метод сводит ее определение к определению канонической (четной) формы дифференциального выражения $t\omega$: если

$$\omega = \sum_1^n {}^i U_i \, du_i$$

есть эта простейшая форма, то $t \sum_1^i {}^i U_i \, du_i$ есть, очевидно, каноническая (четная), форма дифференциального выражения $t\omega$. Обратно, если

$$t\omega = \sum_1^n {}^i V_i \, dv_i$$

есть каноническая (четная) форма дифференциального выражения $t\omega$, то функции v_i $i=1\ldots n$ не зависят от t, а V_i $i=1\ldots n$ имеют вид $V_i=tU_i$, где U_i не заключают t, так что $\sum_1^n{}_i U_i\, dv_i$ есть простейшая форма дифференциального выражения ω.

В самом деле, пусть, например:

$$\left|\begin{matrix} X_1 \ldots X_{2n-1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\ldots\dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1\ldots\ X_{2n-1}\end{matrix}\right| n-1 \gtreqless 0.$$

Переменное $v_m\,(1\leqslant m\leqslant n)$ определяется по уже определенным переменным $v_1\ldots v_{m-1}$, как произвольное независимое от них решение полной системы (A) § 1:

$$\left|\begin{matrix} 0 & \dfrac{\partial f}{\partial t} & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots\ \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} \\ 0 & 0 & X_1 & \ldots\ X_{2n-1} \\ tX_1, & -X_1 & t(11) & \ldots t(2_{n-1}1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ tX_{2n-1} & -X_{2n-1} & t(12_{n-1}) & \ldots t(2_{n-1}2_{n-1}) \end{matrix}\right| = 0,$$

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial t} & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots\dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} \\ 0 & X_1 & \ldots X_{2n-1} & X_{2n-1+\varrho} \\ -X_1 & t(11) & \ldots t(2_{n-1}1) & t(2_{n-1+\varrho}1) \\ \ldots & & & \\ -X_{2n-1} & t(12_{n-1}) & \ldots t(2_{n-1}2_{n-1}) & t(2_{n-1+\varrho}2_{n-1}) \end{matrix}\right| = 0$$

$$\varrho = 1\ldots p-(2_{n-1})$$

$$\left|\begin{matrix} 0 & \dfrac{\partial f}{\partial t} & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots\ \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} \\ \dfrac{\partial v_j}{\partial t} & 0 & X_1 & \ldots\ X_{2n-1} \\ \dfrac{\partial v_j}{\partial x_1}, & -X_1 & t(11) & \ldots t(2_{n-1}1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial v_j}{\partial x_{2n-1}}, & -X_{2n-1} & t(12_{n-1}) & \ldots t(2_{n-1}2_{n-1}) \end{matrix}\right| = 0 \quad j=1\ldots m-1,$$

так как

$$\Delta_{tx_1\ldots x_{2n-1}} = \left|\begin{matrix} 0 & X_1 & \ldots X_{2n-1} \\ -X_1 & t(11) & \ldots t(2_{n-1}1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -X_{2n-1} & t(12_{n-1}) & \ldots t(2_{n-1}2_{n-1}) \end{matrix}\right| = t^{2n-2}\left|\begin{matrix} X_1\ \ldots\ X_{2n-1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\ldots\dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1\ \ldots\ X_{2n-1}\end{matrix}\right| n-1 \right|^2 > 0,$$

если $t \gtreqless 0$. Первое дифференциальное уравнение имеет вид:

$$t \frac{\partial f}{\partial t} \Delta_{tx_1 \ldots x_{2n-1}} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Отсюда следует, что все функции v_i $i = 1 \ldots n$ не зависят от t. Полагая в остальных уравнениях $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial v_j}{\partial t} = 0$ $j = 1 \ldots m-1$, можно рассматривать их левые части, как первые миноры косых симметрических определителей степени $2n+2$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} \\ 0 & 0 & X_1 & \ldots & X_{1n-1} & X_{2n-1+\varrho} \\ -\frac{\partial f}{\partial x_1} & -X_1 & t(11) & \ldots & t(2_{n-1}1) & t(2n-1+\varrho 1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{\partial f}{\partial t_{2n-1}} & -X_{2n-1} & t(12n-1) & \ldots & t(2n-1\, 2n-1) & t(2n-1+\varrho\, 2n-1) \\ -\frac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}}, & -X_{2n-1+\varrho} & t(12n-1+\varrho) & \ldots & t(2n-1\, 2n-1+\varrho), & t(2n-1+\varrho\, 2n-1+\varrho) \end{vmatrix}$$

$$\varrho = 1 \ldots p - (2^{n-1})$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial v_j}{\partial x_1} & \ldots & -\frac{\partial v_j}{\partial x_{2n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & X_1 & \ldots & X_{1n-1} \\ -\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot & \frac{\partial v_j}{\partial x_1}, & -X_1 & t(11) & \ldots & t(2_{n-1}1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}}, & \frac{\partial v_j}{\partial x_{2n-1}}, & -X_{2n-1} & t(12n-1) & \ldots & t(2n-1\, 2n-1) \end{vmatrix} \quad j = 1 \ldots m-1$$

относительно элемента первой колонны и последней, rel. второй горизонтали. На основании теоремы о первом миноре косого симметрического определителя четной степени и на основании формулы (c_1) § 1 при $m = 1, 2, 3$, $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = df$, $\omega_3 = dv_j$, эти уравнения принимают вид:

$$t^{2n-2} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} \\ X_1 \ldots X_{2n-1} & X_{2n-1+\varrho} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x_{2n-2}} & \frac{\partial}{\partial x_{2n-1+\varrho}} & n-1 \\ X_1 \ldots X_{2n-1} & X_{2n-1+\varrho} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_1 \ldots X_{2n-1} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} & n-1 \\ X_1 \ldots X_{2n-1} \end{vmatrix} = 0$$

$$\varrho = 1 \ldots p - (2n-1)$$

$$t^{2n-3}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} \\ \frac{\partial v_j}{\partial x_1} \dots \frac{\partial v_j}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1 \dots X_{2n-1} \\ \left.\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1 \dots X_{2n-1} \end{matrix}\right| n-2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_1 \dots X_{2n-1} \\ \left.\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1 \dots X_{2n-1} \end{matrix}\right| n-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$j = 1 \dots m-1$$

или, наконец, вид:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} \\ X_1 \dots X_{2n-1} & X_{2n-1+\varrho} \\ \left.\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} & \frac{\partial}{\partial x_{2n-1+\varrho}} \\ X_1 \dots X_{2n-1} & X_{2n-1+\varrho} \end{matrix}\right| n-1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} \\ \frac{\partial v_j}{\partial x_1} \dots \frac{\partial v_j}{\partial x_{2n-1}} \\ \left.\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1 \dots X_{2n-1} \end{matrix}\right| n-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\varrho = 1 \dots p-(2n-1); \quad j = 1 \dots m-1$$

и представляют полную систему. Если функции v_i $i=1\dots n$ определены из этих уравнений, то функции V_i $i=1\dots n$ определяются из уравнений:

$$tX_k = \sum_1^n {}^i V_i \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \quad k = 1 \dots p,$$

заключающих только n независимых. Из формы их следует, что V_i $i=1\dots n$ имеют вид tU_i, где U_i не зависят от t, r и т. д.

Но я дам другой метод определения функций U_i, u_i, $i=1\dots n$, имеющий то преимущество, что линейные дифференциальные уравнения, определяющие функции u_i, $i=1\dots n$, получаются уже в виде, разрешенном относительно частных производных. Этот медот основывается на необходимых и достаточных условиях, чтобы $du_1 \dots du_m$, $(1 \leqslant m \leqslant n)$ входили в одну и ту же простейшую форму $\sum_1^n {}^i U_i, \; du_i$ дифференциального выражения ω.

Для этого необходимо, чтобы дифференциальное выражение:

$$\Omega = t\omega + t_1\, du_1 + \dots + t_m\, du_m,$$

где $tt_1 \dots t_m$, $x_1 \dots x_p$ переменные независимые, было класса $2n$, так как в этом случае дифференциальное выражение Ω имеет вид:

$$\Omega = (tU_1 + t_1)\, du_1 + \dots + (tU_m + t_m)\, du_m + tU_{m+1}\, du_{m+1} + \dots + tU\, du_n,$$

где переменные u_i, tU_i, $i=1\dots n$, а, следовательно, и переменные $u_1 \dots u_n$, $tU_1 + t_1 \dots tU_m + t_m$, $tU_{m+1} \dots tU_n$ независимы. Обратно,

Теорема III. Если дифференциальное выражение:

$$\Omega = t\omega + t_1\,du_1 + \cdots + t_m\,du_m,$$

где $1 \leqslant m \leqslant p$ и $tt_1 \ldots t_m x_1 \ldots x_p$ -- переменные независимые и независимые функции $u_1 \ldots u_m$ не зависят от $tt_1 \ldots t_m$ — класса $2n$, то $m \leqslant n$ и простейшая форма дифференциального выражения ω наиболее n-членная.

В самом деле, введем $u_1 \ldots u_m$ как новые переменные независимые вместо, например, $x_1 \ldots x_m$. Тогда:

$$\omega = \overline{U}_1 du_1 + \cdots + \overline{U}_m du_m + \overline{\omega},$$

где

$$\overline{U}_i = \sum_1^m{}^s X_s \frac{\partial x_s}{\partial u_i}\ i = 1 \ldots m, \quad \overline{\omega} = \sum_{m+1}^p{}^k \overline{X}_k dx_k,$$

и

$$\overline{X}_k = X_k + \sum_1^m{}^s X_s \frac{\partial x_s}{\partial x_k} \qquad k = m+1 \ldots p.$$

Коэффициенты $\overline{U}_i$, $\overline{X}_k$ $i = 1 \ldots m$, $k = m+1 \ldots p$ суть функции $u_1 \ldots u_m$, $x_{m-1} \ldots x_p$.

Пусть простейшая форма дифференциального выражения $\overline{\omega}$ при постоянных $u_1 \ldots u_m$ будет $r - m$-членная:

$$\overline{\omega} = \sum_{m+1}^r{}^j U_j\,du_j,$$

где $0 \leqslant 2(r-m) \leqslant p - m + 1$ и переменные $u_{m+1} \ldots u_r$, $tU_{m+1} \ldots tU_r$ независимы. Тогда:

$$\omega = \sum_1^r{}^i U_i\,du_i,$$

где

$$U_i = \overline{U}_i - \sum_{m+1}^r{}^j U_j \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \qquad i = 1 \ldots m,$$

и дифференциальное выражение Ω получает вид:

$$\Omega = (tU_1 + t_1)\,du_1 + \cdots + (tU_m + t_m)\,du_m + tU_{m+1}du_{m+1} + \cdots + tU_r du_r.$$

Так как его класс равен $2n$, и переменные $u_{m+1} \ldots u_r$, $tU_{m+1} \ldots tU_r$, а, следовательно, и переменные $u_1 \ldots u_r$, $tU_1 + t_1 \ldots tU_m + t_m$, $tU_{m+1} \ldots tU_r$ независимы, то $2r = 2n$ и $r = n$. Следовательно, $m \leqslant n$ и

$$\omega = \sum_1^n{}^i U_i\,du_i, \qquad (\alpha)$$

т. е. простейшая форма дифференциального выражения ω наиболее n-членная, что и требовалось доказать.

Если она n-членная, то на основании равенства (α) получается.

Теорема IV. Если простейшая форма дифференциального выражения ω n-членная, то необходимое и достаточное условие, чтобы она заключала $du_1, \ldots, du_m\, (m \leqslant n)$, состоит в том, чтобы дифференциальное выражение:

$$\Omega = t\omega + t_1 du_1 + \cdots + t_m du_m,$$

где $tt_1 \ldots t_m$, $x_1 \ldots x_p$ — переменные независимые, было класса $2n$.

Следствие. Из формы коэффициентов U_i, $i = 1 \ldots n$ следует, что если функции $u_1 \ldots u_m$ $(m < n)$ простейшей n-членной формы:

$$\omega = \sum_{1}^{n} {}_i\, U_i du_i$$

дифференциального выражения ω уже найдены, то ее определение сводится по введении $u_1 \ldots u_m$, как новых переменных независимых, к определению простейшей $n - m$-членной формы дифференциального выражения $\overline{\omega}$ при постоянных $u_1 \ldots u_m$.

Из теоремы I (случай b) и теоремы III следует

Теорема V. Если простейшая форма дифференциального выражения ω n-членная, то не все символические определители степени $2n - m - 1$ $\quad (m \leqslant n - 1)$:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} \ldots \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial x_r} \ldots \dfrac{\partial u_m}{\partial x_s} \\ X_r \;\; \ldots \;\; X_s \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x_r} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \;\; \ldots \;\; X_s \end{array}\right| n - m - 1 \end{array}\right| \qquad r \ldots s = 1 \ldots p,$$

где функции $u_1 \ldots u_m$ произвольны, независимы тождественно обращаются в нуль.

Если бы все эти определители тождественно обращались в нуль для некоторой системы независимых функций $u_1 \ldots u_m\, (m \leqslant n - 1)$, то из теоремы I (случай b) следовало бы при $f = u_m$, что класс дифференциального выражения:

$$\Omega = t\omega + t_1 du_1 + \cdots t_m du_m$$

равен наиболее $2(n - 1)$ и что, поэтому, по теореме III простейшая форма дифференциального выражения наиболее $n - 1$-членная.

Теперь я изложу второй метод определения простейшей формы дифференциального выражения ω.

Пусть условия теоремы II будут выполнены и пусть, поэтому, его простейшая форма будет n-членная:

$$\omega = \sum_1^n {}_i U_i \, du_i$$

и пусть, например:

$$\begin{vmatrix} X_1 \ldots X_{2n-1} & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}} & n-1 \\ X_1 \ldots X_{2n-1} & \end{vmatrix} \gtreqless 0$$

или по формуле (d) § 1 при $m = 1$, $t \gtreqless 0$

$$\frac{\partial (u_1 \ldots u_n, \; tU_1 \ldots tU_n)}{\partial (t, \; x_1 \ldots x_{2n-1})} \gtreqless 0$$

в некоторой области E значений $x_1 \ldots x_p$.

Пусть сначала $n > 1$.

Функция u_1 определяется по теореме IV при $m = 1$ из необходимого и достаточного условия, чтобы класс дифференциального выражения:

$$\Omega = t\omega + t_1 du_1$$

был равен $2n$. Если мы обозначим искомую функцию u_1 через f, то из теоремы I (случай b) при $m = 1$, которая в этом случае применима, так как ω и du_1 линейно независимы и $2n \geqslant 4$, следует, что необходимое и достаточное условие для функции f состоит в том, чтобы, по крайней мере, один символический определитель степени $2n - 2$, где $2n - 2 \leqslant p - 1$:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_r} \ldots \dfrac{\partial f}{\partial x_s} & \\ X_r \ldots X_s & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_s} & n-2 \\ X_r \ldots X_s & \end{vmatrix} \quad r \ldots s = 1 \ldots p$$

был отличен от нуля и чтобы все символические определители этого вида степени $2n$, если они могут быть установлены, обращались тождественно в нуль.

Первое условие по теореме V при $m = 1$, $u_1 = f$ всегда выполняется в некоторой области $E' \leqslant E$. Что же касается второго условия, то оно при $2n - 1 = p$ не существует, и функция u_1 остается в этом случае произвольной. Итак, если дифференциальное выражение:

$$\omega \; X_1 \, dx_1 + \cdots X_{2n-1} \, dx_{2n-1}$$

приводится к n-членной простейшей форме, т. е. если

$$\left|\begin{matrix} X_1 \dots X_{2n-1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1 \dots X_{2n+1} \end{matrix}\right| n-1 \gtrless 0,$$

то одна из функций $u_1 \dots u_n$ произвольна (*).

Пусть $2n-1 < p$. Искомая функция u_1 должна быть по второму условию каким-либо решением (отличным от постоянного) системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_r} \dots \dfrac{\partial f}{\partial x_s} \\ X_r \dots X_s \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} \dots \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \dots X_s \end{matrix}\right| n-1 = 0, \; r \dots s = 1 \dots p.$$

Эта система по формуле (e) § 1 при $m=1$, $t \gtrless 0$ равносильна системе:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial(f,\, u_1 \dots u_n,\, tU_1 \dots tU_n)}{\partial(tx_r \dots x_s)} = 0, \qquad r \dots s = 1 \dots p,$$

и так как

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_n,\, tU_1 \dots tU_n)}{\partial(tx_1 \dots x_{2n-1})} \gtrless 0,$$

она заключает только $p-(2n-1)$ независимых уравнений:

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1}}, & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} \\ X_1 \dots X_{2n-1}, & X_{2n-1+\varrho} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}}, & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1+\varrho}} \\ X_1 \dots X_{2n-1}, & X_{2n-1+\varrho} \end{matrix}\right| n-1 = 0, \; \varrho = 1 \dots p-(2n-1).$$

Они представляют полную систему.

Именно, если обе части каждого из них умножить на

$$\frac{1}{(n-1)!^2} \left|\begin{matrix} X_1 \dots X_{2n-1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1 \dots X_{2n-1} \end{matrix}\right| n-1,$$

(*) Если в этом случае положить, что u_1 равно одному из переменных независимых, например, x_1, тогда определение простейшей формы сводится по теореме IV (следствие) к определению простейшей $n-1$-членной формы дифференциального выражения $X_2 dx_2 + \dots + X_{2n-1} dx_{2n-1}$ при постоянном x_1.

то, на основании формул (c_3), (c_4) § 1 при $m=1$ и на основании теоремы о первом миноре косого симметрического определителя четной степени, можно рассматривать их новые левые части, как первые миноры косых симметрических определителей степени $2n+2$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} \\ 0 & 0 & X_1 & \cdots & X_{2n-1} & X_{2n-1+\varrho} \\ -\frac{\partial f}{\partial x_1}, & -X_1 & (11) & \cdots & (2n-11) & (2n-1+\varrho 1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}}, & -X_{2n-1} & (12n-1) & \cdots & (2n-1\ 2n-1) & (2n-1+\varrho\, 2n-1) \\ -\frac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}}, & -X_{2n-1+\varrho} & (12n-1+\varrho) & \cdots & (2n-1\ 2n-1+\varrho) & (2n-1+\varrho\, 2n-1+\varrho) \end{vmatrix}$$

$$\varrho = 1 \dots p-(2n-1)$$

относительно элемента $-\frac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}}$, так что она получает вид:

$$a_1 = \begin{vmatrix} 0\ , & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} \\ 0\ , & X_1 & \cdots & X_{2n-1} & X_{2n-1+\varrho} \\ -X_1 & (11) & \cdots & (2n-1) & (2n-1+\varrho 1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -X_{2n-1} & (12n-1) & \cdots & (2n-1\ 2n-1) & (2n-1+\varrho\, 2n-1) \end{vmatrix} = 0, \ \varrho = 1 \dots p-(2n-1).$$

Система линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} \\ 0 & X_1 & \cdots & X_{2n-1} & X_{2n-1+\varrho} \\ -X_1 & t(11) & \cdots & t(2n-1\ 1) & t(2n-1+\varrho\ 1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -X_{2n-1}, & t(1\ 2n-1) & \cdots & t(2n-1\ 2n-1) & t(2n-1+\varrho\ 2n-1) \end{vmatrix} = 0, \ \varrho = 1 \dots p-(2n-1)$$

— полная, так как соответствующая ей система Pfaff'а:

$$\omega = X_1\, dx_1 + \cdots + X_p\, dx_p = 0,$$
$$-X_1\, dt + t(11)\, dx_1 + \cdots + t(p1)\, dx_p = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-X_{2n-1}\, dt + t(12n-1)\, dx_1 + \cdots + t(p\, 2n-1)\, dx_p = 0$$

есть сполна интегрируемая система (g_2) § 2 при $m=1$.

Последняя система линейных дифференциальных уравнений имеет вид:

$$A_\varrho \cdot t \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + a_\varrho = 0, \quad \varrho = 1 \dots p-(2n-1),$$

где A_ϱ не зависят от t, и отсюда легко видеть, что и система $a_\varrho = 0$, $\varrho = 1 \dots p - (2n - 1)$ — полная. Итак, система (1) — полная (*). Функция u_1 должна быть каким-либо решением (отличным от постоянного) полной системы (1). Она определена, и дифференциальное выражение ω имеет в некоторой области простейшую форму, заключающую du_1.

Можно показать, что не все определители $2n - 2$-й степени:

$$\left|\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{i-1}},\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{i+1}} \dots \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1 \ \dots\ X_{i-1},\ \ X_{i+1} \ \dots\ X_{2n-1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial}{\partial x_{i-1}},\ \dfrac{\partial}{\partial x_{i+1}} \dots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1 \ \dots\ X_{i-1},\ \ X_{i+1} \ \dots\ X_{2n-1} \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ n-2 \end{array} \end{array}\right| \qquad i = 1 \dots 2n-1$$

в ней тождественно равны нулю. В самом деле, пусть все они в ней тождественно обращаются в нуль. Тогда из формулы (d) § 1 при $m = 2$ следовало бы, что

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_n,\, tU_2 \dots tU_n)}{\partial(tx_1 \dots x_{i+1},\, x_{i+1} \dots x_{2n-1})} = 0,\ i = 1 \dots 2n-1.$$

Следовательно, не равный нулю определитель:

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_n,\ tU_1 \dots tU_n)}{\partial(t,\ x_1 \dots x_{2n-1})}$$

имел бы вид:

$$t^{n-1}\, U_1 \frac{\partial(u_1 \dots u_n,\ U_2 \dots U_n)}{\partial(x_1 \dots x_{2n-1})},$$

поэтому:

$$U_1 \gtreqless 0,\ \frac{\partial(u_1 \dots u_n,\ U_2 \dots U_n)}{\partial(x_1 \dots x_{2n-1})} \gtreqless 0.$$

С другой стороны:

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_n,\, tU_j,\ tU_2 \dots tU_n)}{\partial(t,\, x_1 \dots x_{2n-1})} = 0,\ j = 2 \dots n.$$

Поэтому на основании предыдущего неравенства:

$$U_j = 0, \quad j = 2 \dots n,$$

т. е. простейшая форма дифференциального выражения ω была бы одночленная, что невозможно, так как $n > 1$.

(*) Если в некоторой области один из коэффициентов $U_1 \dots U_n$, например, $U_n \gtreqless 0$, то из свойства системы (1) иметь в ней $2n - 1$ независимых решений $u_1 \dots u_n \dfrac{U_1}{U_n} \dots \dfrac{U_{n-1}}{U_n}$ следует снова, что она полная.

Итак, пусть, например:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} & \\ X_1 & \ldots & X_{2n-2} & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-2}} & n-2 \\ X_1 & \ldots & X_{2n-2} & \end{vmatrix} \gtreqless 0,$$

т. е. на основании формулы (d) § 1 при $m=2$, $t \gtreqless 0$

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_n,\ tU_2 \ldots tU_n)}{\partial(t,\ x_1 \ldots x_{2n-2})} \gtreqless 0$$

в некоторой области $E_1 \leqslant E$.

Если $n > 2$, функция u_2 определяется, как независимая от u_1, и под условием по теореме IV при $m=2$, чтобы класс дифференциального выражения:

$$\Omega = t\omega + t_1 du_1 + t_2 du_2$$

был равен $2n$. Для этого необходимо и достаточно по теореме I (случай b), которая в данном случае применима, так как ω, du_1, du_2 линейно независимы и $2n \geqslant 6$, чтобы, означая искомую функцию u_2 через f, все символические определители степени $2n-1$:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_s} & \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} & \\ X_r & \ldots & X_s & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} & n-2 \\ X_r & \ldots & X_s & \end{vmatrix} \quad r \ldots s = 1 \ldots p$$

обращались тождественно в нуль, и чтобы, по крайней мере, один определитель степени $2n-3$:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_s} & \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} & \\ X_r & \ldots & X_s & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} & n-3 \\ X_r & \ldots & X_s & \end{vmatrix} \quad r \ldots s = 1 \ldots p$$

был отличен от нуля. Искомая функция u_2 должна быть независимым от u_1 решением системы линейных дифференциальных уравнений.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_r} \dots \frac{\partial f}{\partial x_s} & \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_r} \dots \frac{\partial u_1}{\partial x_s} & \\ X_r \dots X_s & \\ \frac{\partial}{\partial x_r} \dots \frac{\partial}{\partial x_s} & \\ X_r \dots X_s & \end{vmatrix}_{n-2} = 0, \; r \dots s = 1 \dots p.$$

Эта система в силу формулы (e) при $m = 2$, $t \gtreqless 0$ равносильна системе:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial (f, u_1 \dots u_n, tU_2 \dots tU_n)}{\partial (tx_r \dots x_s)} = 0, \; r \dots s = 1 \dots p,$$

и так как

$$\frac{\partial (u_1 \dots u_n, tU_2 \dots tU_n)}{\partial (tx_1 \dots x_{2n-2})} \gtreqless 0,$$

она заключает только $p - (2n - 2)$ независимых уравнений:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_{2n-2}}, & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-2+\varrho}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2+\varrho}} \\ X_1 \dots X_{2n-2}, & X_{2n-2+\varrho} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_{2n-2}}, & \frac{\partial}{\partial x_{2n-2+\varrho}} \\ X_1 \dots X_{2n-2}, & M_{2n-2+\varrho} \end{vmatrix}_{n-2} = 0, \; \varrho = 1 \dots p - (2n - 2).$$

Они представляют полную систему. В самом деле, умножим их левые части на

$$\frac{1}{(n-2)!^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} \\ X_1 \dots X_{2n-n} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_{2n-2}} \\ X_1 \dots X_{2n-2} \end{vmatrix}_{n-2}.$$

Тогда, на основании формул (c_3) (c_4) § 1 при $m = 2$, и на основании теоремы о первом миноре косого симметрического определителя четной степени, можно последние рассматривать, как первые миноры косых симметрических определителей степени $2n+2$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-2}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-2+\varrho}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2+\varrho}} \\ 0 & 0 & 0 & X_1 & \dots & X_{2n-2} & X_{2n-2+\varrho} \\ -\frac{\partial f}{\partial x_1} & -\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & -X_1 & (11) & \dots & (2n-2\,1) & (2n-2+\varrho\,1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial f}{\partial x_{2n-2}} & -\frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} & -X_{2n-2} & (1\,2n-2) & \dots & (2n-2\,2n-2) & (2n-2+\varrho\,2n-2) \\ -\frac{\partial f}{\partial x_{2n-2+\varrho}}, & -\frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2+\varrho}} & -X_{2n-2+\varrho}, & (1\,2n-2+\varrho) & \dots & (2n-2\,2n-2+\varrho) & (2n-2+\varrho\,2n-2+\varrho) \end{vmatrix}$$

$$\varrho = 1\dots p-(2n-2)$$

относительно элемента $-\frac{\partial f}{\partial x_{2n-2+\varrho}}$, так что система (2) принимает вид:

$$\beta\varrho = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-2}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-2+\varrho}} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2+\varrho}} \\ 0 & 0 & X_1 & \dots & X_{2n-2} & X_{2n-2+\varrho} \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & -X_1 & (11) & \dots & (2n-2\,1) & (2n-2+\varrho\,1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} & -X_{2n-2} & (1\,2n-2) & \dots & (2n-2\,2n-2) & (2n-2+\varrho\,2n-2) \end{vmatrix} = 0$$

$$\varrho = 1\dots p-(2n-2).$$

Система линейных уравнений:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial t_1} & \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial f}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-2}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-2+\varrho}} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2+\varrho}} \\ 0 & 0 & X_1 & \dots & X_{2n-2} & X_{2n-2+\varrho} \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & -X_1 & t(11) & \dots & t(2n-2\,1) & t(2n-2+\varrho\,1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} & -X_{2n-2} & t(1\,2n-2) & \dots & t(2n-2\,2n-2) & t(2n-2+\varrho\,2n-2) \end{vmatrix} = 0$$

$$\varrho = 1\dots p-(2n-2)$$

— полная, так как соответствующая ей система Pfaff'a:

$$\omega = X_1 dx_1 + \cdots + X_p dx_p = 0,$$
$$du_1 = 0,$$
$$-\frac{\partial u_1}{\partial x_1} dt_1 - X_1 dt + t(11)\, dx_1 + \cdots + t(p1)\, dx_p = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-\frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} dt_1 - X_{2n-2}\, dt + t(1\, 2n-2)\, dx_1 + \cdots + t(p2n-2)\, dx_p = 0$$

есть сполна интегрируемая система (g_2) § 2 при $m = 2$. Эта последняя система линейных уравнений имеет вид:

$$t\left(A_\varrho \frac{\partial f}{\partial t} + B_\varrho \frac{\partial f}{\partial t_1}\right) + \beta_\varrho = 0,\ \varrho = 1 \ldots p - (2n-2),$$

где A_ϱ, B_ϱ не зависят от t, t_1, откуда, как легко видеть, следует, что и система $\beta_\varrho = 0$, $\varrho = 1 \ldots p - (2n-2)$ полная.

Итак, система (2) — полная (*). Искомая функция u_2 должна быть независимым от u_1 решением полной системы (2). Что касается второго условия, оно в силу теоремы V при $m = 2$ выполняется в некоторой области для всякого независимого от u_1 решения этой системы. Таким образом, u_2 должна быть каким-либо независимым от u_1 решением полной системы (2). Функция u_2 определена, и дифференциальное выражение ω имеет в некоторой области простейшую n—членную форму заключающую du_1, du_2.

Можно показать, что не все определители степени $2n-3$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial u_1}{\partial x_{i-1}}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_{i+1}} \ldots \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} & \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial u_2}{\partial x_{i-1}}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_{i+1}} \ldots \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} & \\ X_1 \ldots X_{i-1}, & X_{i+1} \ldots X_{2n-2} & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x_{i-1}}, & \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} \ldots \frac{\partial}{\partial x_{2n-2}} & \Big|\ n-3 \\ X_1 \ldots X_{i-1}, & X_{i+1} \ldots X_{2n-2} & \end{vmatrix} \quad i = 1 \ldots 2n-2.$$

равны в ней тожественно нулю. Если бы это было так, то мы имели-бы на основании формулы (d) § 1 при $m = 3$, что

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_n,\ tU_3 \ldots tU_n)}{\partial(tx_1 \ldots x_{i-1}\, x_{i+1} \ldots x_{2n-2})} = 0, \quad i = 1 \ldots 2n-2$$

(*) Если в некоторой области один из коэффициентов $U_2 \ldots U_n$, например, $U_n \gtreqless 0$, то из того обстоятельства, что система (2) имеет $2n-2$ независимых решений $n_1 \ldots n_n \frac{U_2}{U_n} \ldots \frac{U_{n-1}}{U_n}$, также следует, что она полная.

и неравный нулю определитель:

$$\frac{\partial (u_1 \ldots u_n,\ tU_2 \ldots tU_n)}{\partial (tx_1 \ldots x_{2n-2})},$$

имел бы вид:

$$t^{n-3} U_2 \frac{\partial (u_1 \ldots u_n,\ U_3 \ldots U_n)}{\partial (x_1 \ldots x_{2n-2})},$$

откуда:

$$U_2 \gtreqless 0, \quad \frac{\partial (u_1 \ldots u_n,\ U_3 \ldots U_n)}{\partial (x_1 \ldots x_{2n-2})} \gtreqless 0.$$

Но, с другой стороны:

$$\frac{\partial (u_1 \ldots u_n\, tU_j,\ tU_3 \ldots tU_n)}{\partial (t,\ x_1 \ldots x_{2n-2})} = 0, \quad j = 3 \ldots n.$$

Следовательно, на том же основании:

$$t^{n-3} U_j \frac{\partial (u_1 \ldots u_n,\ U_3 \ldots U_n)}{\partial (x_1 \ldots x_{2n-2})} = 0, \quad j = 3 \ldots n,$$

следовательно:

$$U_j = 0, \quad j = 3 \ldots n,$$

т. е. простейшая форма дифференциального выражения ω была бы двучленной, что невозможно, так как $n > 2$.

Пусть, например:

$$\left| \begin{array}{ll} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-3}} & \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial u_2}{\partial x_{2n-3}} & \\ X_1 \ \ldots \ X_{2n-3} & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-3}} & \bigg| \ n-3 \\ X_1 \ldots \ X_{2n-3} & \end{array} \right| \gtreqless 0,$$

т. е. на основании формулы (d) § 1 при $m = 3$, $t \gtreqless 0$, пусть

$$\frac{\partial (u_1 \ldots u_n,\ tU_3 \ldots tU_n)}{\partial (tx_1 \ldots x_{2n-3})} \gtreqless 0,$$

в некоторой области $E_2 \leqslant E_1$.

Если $n > 3$, то функция u_3 определяется по теореме IV при $m = 3$, как независимая от u_1, u_2, под условием, чтобы класс дифференциального выражения:

$$\Omega = t\omega + t_1 du_1 + t_2 du_2 + t_3 du_3$$

был равен $2n$ и т. д.

Вообще, если $m-1$ функций $u_1, \ldots, u_{m-1}$ уже определены, так что дифференциальное выражение имеет в некоторой области простейшую n-членную форму, заключающую $du_1, \ldots, du_{m-1}$ и если в той же области $E_{m-1} \leqslant E_{m-2}$:

$$\left|\begin{array}{l} \begin{array}{ccc} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_2}{\partial x_{2n-m}} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} \\ X_1 & \ldots & X_{2n-m} \end{array} \\ \left.\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_{2n-m}} \\ X_1 & \ldots & X_{2n-m} \end{array}\right| n-m \end{array}\right| \gtreqless 0,$$

т. е. на основании формулы (d) § 1 при $t \gtreqless 0$:

$$\frac{\partial\,(u_1 \ldots u_n t U_m \ldots t U_n)}{\partial\,(t x_1 \ldots x_{2n-m})} \gtreqless 0,$$

то при $n > m$ функция u_m определяется по теореме IV, как независимая от $u_1 \ldots u_{m-1}$, под условием, чтобы класс дифференциального выражения:

$$\Omega = t\omega + t_1 du_1 + \cdots + t_{m-1} du_{m-1} + t_m du_m$$

был равен $2n$. По теореме I (случай b), которая в этом случае применима потому, что ω, $du_1, \ldots, du_m$ линейно независимы и $2n \geqslant 2(m+1)$, следует, если обозначить u_m через f, что для этого необходимо и достаточно, чтобы все символические определители степени $2n-m+1$:

$$\left|\begin{array}{l} \begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x_r} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_s} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & \ldots & \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} \\ X_r & \ldots & X_s \end{array} \\ \left.\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r & \ldots & X_s \end{array}\right| n-m \end{array}\right| \qquad r \ldots s = 1 \ldots p,$$

обращались тождественно в нуль, и чтобы, по крайней мере, один символический определитель степени $2n-m-1$:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial f}{\partial x_r} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} & \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_r} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_s} & \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & \dots & \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} & \\ X_r & \dots & X_s & \\ \frac{\partial}{\partial x_r} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_s} & n-m-1 \\ X_r & \dots & X_s & \end{array}\right| \quad r\dots s=1\dots p,$$

был отличен от нуля. Искомая функция u_m должна быть независимым от $u_1\dots u_{m-1}$ решением системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial f}{\partial x_r} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_s} & \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_r} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_s} & \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} & \\ X_r & \dots & X_s & \\ \frac{\partial}{\partial x_r} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_s} & n\text{-}m \\ X_r & \dots & X_s & \end{array}\right| = 0, \quad r\dots s=1\dots p.$$

По формуле (e) § 1 при $t \geqq 0$ эта система равносильна системе:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=0, \quad \frac{\partial\,(f,\ u_1\dots,\ u_n tU_m\dots,\ tU_n)}{\partial\,(tx_r\dots x_s)}=0,$$

$$r\dots s=1\dots p$$

и так как

$$\frac{\partial\,(u_1\dots u_n,\ tU_m\dots tU_n)}{\partial\,(tx_1\dots x_{2n-m})} \geqq 0,$$

она заключает только $p-(2n-m)$ независимых уравнений:

$$
(m)\quad \left|\begin{array}{ccccl}
\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & \\
\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & \\
X_1 & \ldots & X_{2n-m} & X_{2n-m+\varrho} & \\
\dfrac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & \Bigg|\; n-m \\
X_1 & \ldots & X_{2n-m} & X_{2n-m+\varrho} & \Bigg|
\end{array}\right| = 0.
$$

Они составляют полную систему. В самом деле, если умножить их левые части на

$$
\frac{1}{(n-m)!^2}\left|\begin{array}{cccl}
\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} & \\
X_1 & \ldots & X_{2n-m} & \\
\dfrac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-m}} & \Bigg|\; n-m \\
X_1 & \ldots & X_{2n-m} & \Bigg|
\end{array}\right|,
$$

на основании формул (c_3), (c_4) § 1 и на основании теоремы о первом миноре косого симметрического определителя четной степени, можно последние рассматривать, как первые миноры косых симметрических определителей степени $2n+2$:

$$
\left|\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2-nm+\varrho}} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & X_1 & X_2 & \ldots & X_{2n-m} & X_{2n-m+\varrho} \\
-\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & -X_1 & (11) & \ldots & (2n-m1) & (2n-m+\varrho 1) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-\dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m}} & -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} & \ldots & -\dfrac{\partial n_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} & -X_{2n-m} & (12n-m) & \ldots & (2n-m2n-m) & (2n-m+\varrho 2n-m) \\
-\dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & \ldots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & -X_{2n-m+\varrho} & (12n-m+\varrho) & \ldots & (2n-m2n-m+\varrho) & (2n-m+\varrho 2n-m+\varrho)
\end{array}\right|
$$

относительно элемента $-\dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m+\varrho}}$. Тогда система ($m$) получает вид:

$$
j_\varrho = \begin{vmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \dots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} \dots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -X_1 \dots & X_{2n-m} & X_{2n-m+\varrho} \\
-\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & -X_1 & (11) \dots & (2n-m1) & (2n-m+\varrho 1) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-\dfrac{\partial x_1}{\partial x_{2n-m}} & -\dfrac{\partial x_2}{\partial x_{2n-m}} & \dots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} & -X_{2n-m} & (12n-m) \dots & (2n-m2n-m) & (2n-m+\varrho 2n-m)
\end{vmatrix} = 0.
$$

$$\varrho = 1 \dots p - (2n-m).$$

Система линейных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial f}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial t_{m-1}} & \dfrac{\partial f}{\partial t} & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\
0 & \dots & 0 & 0 & X_1 & \dots & X_{2n-m} & X_{2n-m+\varrho} \\
\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & -X_1 & t(11) & \dots & t(2n-m1) & t(2n-m+\varrho 1) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-\dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} & \dots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} & -X_{2n-m} & t(12n-m) & \dots & t(2n-m2n-m) & t(2n-m+\varrho 2n-m)
\end{vmatrix} = 0
$$

$$\varrho = 1 \dots p - (2n-m)$$

— полная, так как соответствующая ей система Pfaff'a:

$$
\begin{gathered}
\omega = X_1 dx_1 = \dots + X_p dx_p = 0, \\
du_1 = 0 \cdots du_{m-1} = 0, \\
-\frac{\partial u_1}{\partial x_1} dt_1 - \dots - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} dt_{m-1} - X_1 dt + t(11)\, dx_1 + \dots \\
\dots + t(p1)\, dx_p = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} dt_1 - \dots \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} dt_{m-1} - X_{2n-m} dt + t(12n-m)\, dx_1 + \dots \\
\dots + t(p2n-m)\, dx_p = 0,
\end{gathered}
$$

есть сполна интегрируемая система (g_2) § 2.

Последняя система линейных дифференциальных уравнений имеет вид:

$$t\left(A\varrho \frac{\partial f}{\partial t} + B\varrho \frac{\partial f}{\partial t_1} + \cdots + C\varrho \frac{\partial f}{\partial t_{m-1}}\right) + j\varrho = 0, \quad \varrho = 1 \ldots p - (2n - m)$$

где $A\varrho$, $B\varrho \ldots C\varrho$ не зависят от $tt_1 \ldots t_{m-1}$, откуда легко видеть, что и система $j\varrho = 0$, $\varrho = 1 \ldots p - (2n - m)$ также полная. Итак, система (m) — полная (*). Искомая функция u_m должна быть независимым от $u_1 \ldots u_{m-1}$ решением полной системы (m). Что касается второго условия, то оно по теореме V выполняется в некоторой области для всякого решения системы (m), независимого от $u_1 \ldots u_{m-1}$. Функция u_m должна быть каким-либо независимым от $u_1 \ldots u_{m-1}$ решением полной системы (m). Она найдена, и дифференциальное выражение ω имеет в некоторой области n-членную простейшую форму, заключающую $du_1 \ldots du_m$.

Можно показать, что не все определители степени $2n - m - 1$:

$$\left|\begin{array}{cccccc} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{i+1}} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} \ldots & \frac{\partial u_m}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial u_m}{\partial x_{i+1}} & \ldots & \frac{\partial u_m}{\partial x_{2n-m}} & \\ X_1 \ldots & X_{i-1} & X_{i+1} & \ldots & X_{2n-m} & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \ldots & \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_{2n-m}} & \Big| \; n - m - 1 \\ X_1 \ldots & X_{i-1} & X_{i+1} & \ldots & X_{2n-m} & \end{array}\right| \quad i = 1 \ldots 2n - m$$

обращаются в ней тождественно в нуль. Иначе, по формуле (d) § 1, в которой вместо m подставлено $m + 1$, следовало бы, что

$$\frac{\partial (u_1 \ldots u_n \, tU_{m+1} \ldots tU_n)}{\partial (t, \, x_1 \ldots x_{i-1} \, x_{i+1} \ldots x_{2n-m})} = 0, \quad i = 1 \ldots 2n - m,$$

и, поэтому, отличный от нуля определитель:

$$\frac{\partial (u_1 \ldots u_n, \; tU_m \ldots tU_n)}{\partial (tx_1 \ldots x_{2n-m})}$$

имел бы вид:

$$t^{n-m} U_m \frac{\partial (u_1 \ldots u_n U_{m+1} \ldots U_n)}{\partial (x_1 \ldots x_{2n-m})},$$

откуда:

$$U_m \gtrless 0, \qquad \frac{\partial (u_1 \ldots u_n U_{m+1} \ldots U_n)}{\partial (x_1 \ldots x_{2n-m})} \gtrless 0.$$

(*) Если в некоторой области один из коэффициентов $U_m \ldots U_n$, например, $U_n \gtrless 0$, то из того обстоятельства, что система (m) имеет $2n - m$ независимых решений $u_1 \ldots u_n \frac{U_m}{U_n} \ldots \frac{U_{n-1}}{U_n}$, также следовало бы, что система (m) полная.

Но, с другой стороны:

$$\frac{\partial\,(u_1\ldots u_n.\;tU_j.\;tU_{m+1}\ldots tU_n)}{\partial\,(tx_1\ldots x_{2n-m})}=0\quad j=m+1\ldots n,$$

откуда, на том же основании, следовало бы, что

$$t^{n-m}U_j\frac{\partial(u_1\ldots u_nU_{m+1}\ldots U_n)}{\partial\,(x\ldots x_{2n-m})}=0\quad j=m+1\ldots n,$$

и потому

$$U_j=0\quad j=m+1\ldots n,$$

т. е. простейшая форма дифференциального выражения ω была бы m-членной, что невозможно, так как $n>m$. Наше утверждение доказано. Пусть, например:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m-1}} & \\ . & . & . & \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_m}{\partial x_{2n-m-1}} & \\ X_1 & \ldots & X_{2n-m-1} & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_{2n-m-1}} & n-m-1 \\ X_1 & \ldots & X_{2n-m-1} & \end{array}\right|\gtrless 0,$$

т. е. на основании формулы (d) § 1 с заменой m на $m-1$ при $t\gtrless 0$ пусть

$$\frac{\partial(u_1\ldots u_n\;tU_{m+1}\ldots tU_n)}{\partial(tx_1\ldots x_{2n-m-1})}\gtrless 0$$

в некоторой области $E_m\leqslant E_{m-1}$.

Полагая в предыдущем изложении $m=1,\;2\ldots n-1$, найдем функции $u_1\ldots u_{n-1}$ простейшей формы:

$$\omega=\sum_1^n{}^i\,U_i\,du_i.$$

Пусть, наконец, $m=n\geqslant 1$.

Для определения функции $u_n\,(n\geqslant 1)$ должно поступать иначе, потому что теорема I (случай b) уже неприложима в виду того, что дифференциальные выражения $\omega,\,du_1\ldots du_n$ линейно зависимы. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы du_n входил с $du_1\ldots du_{n-1}$ в одну и ту же простейшую n-членную форму, состоит, очевидно, в том, чтобы $\omega,\,du_1\ldots du_n$ были линейно зависимы. Следовательно, если обозначить u_n через f, необходимое и достаточное условие для функции f есть, чтобы она была независимым от $u_1\ldots u_{n-1}$ решением системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_r} \dots \frac{\partial f}{\partial x_s} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_r} \dots \frac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \dots\dots \\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_r} \dots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_s} \\ X_r \quad \dots \quad X_s \end{vmatrix} = 0, \quad r \dots s = 1 \dots p,$$

которая в силу неравенства:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \dots\dots \\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} \\ X_1 \quad \dots \quad X_n \end{vmatrix} \gtreqless 0$$

заключает только $p-n$ независимых уравнений:

$$(n) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial f}{\partial x_{n+\varrho}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{n+\varrho}} \\ \dots\dots & \dots \\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n+\varrho}} \\ X_1 \quad \dots \quad X_n & X_{n+\varrho} \end{vmatrix} = 0, \quad \varrho = 1 \dots p-n.$$

Так как дифференциальное выражение ω имеет в области E_{n-1} простейшую n-членную форму, в которую входят $du_1 \dots du_n$, система (n) имеет n независимых решений и, следовательно, есть система полная. Единственное независимое от $u_1 \dots u_{n-1}$ решение ее есть искомая функция u_n. Итак, все функции u_i $i=1 \dots n$ определены.

Очевидно, что в некоторой области $E_n \leqslant E_{n-1}$

$$\frac{\partial (u_1 \dots u_n)}{\partial (x_1 \dots x_n)} \gtreqless 0.$$

Механический процесс определения функций u_i $i=1 \dots n$ таков: если выполнены необходимые и достаточные условия приведения дифференциального выражения ω к n-членной простейшей форме, т. е. если, по крайней мере, один символический определитель степени $2n-1$, где $1 \leqslant n \leqslant \frac{p+1}{2}$,

$$\begin{vmatrix} X_r \dots X_s & \\ \frac{\partial}{\partial x_r} \dots \frac{\partial}{\partial x_s} & n-1 \\ X_r \dots X_s & \end{vmatrix} \quad r \dots s = 1 \dots p$$

отличен от нуля в некоторой области E и если все символические определители степени $2n+1$

$$\left|\begin{array}{c|c} X_r \ \dots \ X_s & \\ \frac{\partial}{\partial x_r} \dots \frac{\partial}{\partial x_s} & n \\ X_r \ \dots \ X_s & \end{array}\right|,$$

если таковые могут быть установлены, обращаются в ней тождественно в нуль, и если, например:

$$\left|\begin{array}{c|c} X_1 \ \dots \ X_{2n-1} & \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} & n-1 \\ X_1 \ \dots \ X_{2n-1} & \end{array}\right| \gtreqless 0,$$

то если функции $u_1 \dots u_{m-1}$ $(0 \leqslant m-1 < n)$ уже определены и если в некоторой области $E_{m-1} \leqslant E$, определитель, например:

$$\left|\begin{array}{c|c} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} & \\ \dots\dots & \\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} & \\ X_1 \ \dots \ X_{2n-m} & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_{2n-m}} & n-m \\ X_1 \ \dots \ X_{2n-m} & \end{array}\right| \gtreqless 0,$$

функция u_m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ должна быть каким-либо независимым от $u_1 \dots u_{m-1}$ решением полной системы $p-(2n-m)$ линейных дифференциальных уравнений:

$$\left|\begin{array}{c|c} \frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_{2n-m}} \frac{\partial f_1}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & \\ \dots\dots & \\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & \\ X_1 \ \dots \ X_{2n-m} \ X_{2n-m+\varrho} & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_{2n-m}} \frac{\partial}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & n-m \\ X_1 \ \dots \ X_{2n-m} \ X_{2n-m+\varrho} & \end{array}\right| = 0$$

$$\varrho = 1 \dots p \ . \ (2n-m).$$

Если функция $u_m (m < n)$ определена, то не все определители степени $2n - m - 1$:

$$\left|\begin{array}{cccccc} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_1}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{i+1}} \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} & & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & & \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_m}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial u_m}{\partial x_{i+1}} & \frac{\partial u_m}{\partial x_{2n-m}} & & \\ X_1 \ldots X_{i-1} & X_{i+1} & X_{2n-m} & & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{2n-m}} & n-m-1 & \\ X_1 \ldots X_{i-1} & X_{i+1} \ldots & X_{2n-m} & & \end{array}\right| \quad i = 1 \ldots 2n - m$$

в области E_{m-1} тождественно обращаются в нуль.

Если $2n - 1 = p$, функция u_1 произвольна.

2. Перейдем теперь к определению коэффициентов U_i $i = 1 \ldots n$. Из уравнения:

$$\omega = \sum_1^p{}^k X_k dx_k = \sum_1^n{}^i U_i du_i$$

следует, что

$$X_k = \sum_1^n{}^i U_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \quad k = 1 \ldots p.$$

Вследствие независимости функций u_i, $i = 1 \ldots n$ $\left(\frac{\partial (u_1 \ldots u_n)}{\partial (x_1 \ldots x_n)} \gtreqless 0\right.$ в области $\left.E_n\right)$ и вследствие тождеств:

$$\left|\begin{array}{c} \frac{\partial u_1}{\partial x_r} \cdots \frac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_r} \cdots \frac{\partial u_n}{\partial x_s} \\ X_r \ \ldots \ X_s \end{array}\right| = 0, \ r \ldots s = 1 \ldots p$$

эта система p линейных неоднородных уравнений относительно n неизвестных U_i, $i = 1 \ldots n$ заключает только n независимых уравнений, которые и определяют их, и простейшая форма дифференциального выражения ω определена.

Мы дали, таким образом, два метода определения простейшей формы. Оба они не зависят от четности класса дифференциального выражения ω. Второй метод имеет перед первым не только то преимущество, что дифференциальные уравнения, определяющие функции u_i, $i = 1 \ldots n$ (системы (1), (2) ... (m)), разрешены относительно частных производных, но также и то, что в нем мы не пользуемся дифференциальными уравнениями (A) § 1, выводимыми в теории канонических форм, и что он, таким образом, менее зависит от последней; для его обоснования нужны из этой теории только необходимые и достаточные условия приводимости данного дифференциального выражения ω к канонической четной, или нечетной форме. Если эти условия выводить данным G. Darboux (*) способом, предлагаемый метод представляет наибольшую простоту.

Оба эти метода, как сказано, не зависят от четности класса дифференциального выражения ω. Можно, однако, рассматривать отдельно случай четного и нечетного класса.

3. Каноническая n-членная форма дифференциального выражения ω — четная, или нечетная, смотря по тому, одна ли и та же $2n$ наивысшая степень отличных от нуля главных миноров косих симметрических определителей Δ, Δ_1 (§ 2), или она равна соответственно $2n-2$, $2n$. Можно вместо главных миноров рассматривать их квадратные корни. Квадратные корни косых симметрических определителей степени $2q\,(\leqslant p+1)$:

$$\begin{vmatrix} (rr)\ldots(sr) \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ (rs)\ldots(ss) \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & X_\varrho \ldots X_\sigma \\ -X_\varrho & (\varrho\varrho)\ldots(\varrho\sigma) \\ \cdot & \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ -X_\sigma & (\varrho\sigma)\ldots(\sigma\sigma) \end{vmatrix} \quad r\ldots\sigma=1\ldots p$$

равны по формулам (b_1), (c_2) § 1 соответственно:

$$\pm\frac{1}{q!}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_r}\cdots\dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r\ \ldots\ X_s \end{vmatrix} q \quad \begin{vmatrix} \pm\dfrac{1}{(q-1)!} & \begin{vmatrix} X_\varrho\ \ldots\ X_\sigma \\ \dfrac{\partial}{\partial x_\varrho}\cdots\dfrac{\partial}{\partial x_\sigma} \\ X_\varrho\ \ldots\ X_\sigma \end{vmatrix} q-1 \end{vmatrix}.$$

Получается таким образом

Теорема VI. Класс дифференциального выражения:

$$\omega=\sum_1^p{}^k X_k dx_k$$

равен $2n$, или $2n-1$, смотря по тому, будут ли наивысшие степени отличных от нуля символических определителей:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_r}\cdots\dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r\ \ldots\ X_s \end{vmatrix} q \quad \begin{vmatrix} X_\varrho\ \ldots\ X_\sigma \\ \dfrac{\partial}{\partial x_\varrho}\cdots\dfrac{\partial}{\partial x_\sigma} \\ X_\varrho\ \ldots\ X_\sigma \end{vmatrix} k \quad r\ldots\sigma=1\ldots p$$

соответственно $2n$, $2n-1$, или $2n-2$, $2n-1$.

Определение четной канонической формы тождественно с изложенным выше определением простейшей формы, так как они тожде-

(*) Bull. d. sc. math. et astr., 2-me Série, 1882.

ственны. Поэтому рассмотрим отдельно только второй случай. Пусть, например,

$$\left|\begin{matrix} X_1 \ldots X_{2n-1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1 \ldots X_{2n-1} \end{matrix}\right|_{n-1} \gtrless 0, \quad \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-2}} \\ X_1 \ldots X_{2n-2} \end{matrix}\right|_{n-1} \gtrless 0$$

в некоторой области E, и пусть определители этого вида, но высшей степени обращаются в ней тождественно в нуль. Тогда дифференциальное выражение ω приводится к нечетной n-членной канонической форме

$$\omega = du_1 + \sum_2^n {}_j U_j du_j.$$

Займемся определением функции u_1. Так как дифференциальное выражение $\omega - du_1$ приводится к $n-1$-членной простейшей форме

$$\omega - du_1 = \sum_2^n {}_j U_j du_j,$$

то по теореме II, если в ней вместо ω и n подставить соответственно $\omega - du_1$ и $n-1$, необходимое и достаточное условие для функции u_1 состоит в том, чтобы она удовлетворяла системе линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$(1') \quad \left|\begin{matrix} X_r - \dfrac{\partial f}{\partial x_r} \cdots X_s - \dfrac{\partial f}{\partial x_s} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} \quad \ldots \quad \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \quad \ldots \quad X_s \end{matrix}\right|_{n-1} = 0, \; r \ldots s = 1 \ldots p$$

и чтобы по крайней мере один символический определитель степени $2n-3$

$$\left|\begin{matrix} X_r - \dfrac{\partial f}{\partial x_r} \cdots X_s - \dfrac{\partial f}{\partial x_s} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} \quad \ldots \quad \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \quad \ldots \quad X_s \end{matrix}\right|_{n-2} r \ldots s = 1 \ldots p,$$

если $n > 1$, для $f = u_1$ был отличен от нуля. Последнее условие всегда соблюдается в некоторой области $E' \leqslant E$, так как иначе по теореме II дифференциальное выражение $\omega - du_1$ приводилось-бы к наиболее $n-2$-членной, а, следовательно, дифференциальное выражение ω к наиболее $n-1$-членной простейшей форме.

Итак, u_1 должна быть каким-либо решением системы (1'). Если $2n-1=p$, эта система заключает только одно уравнение:

$$\begin{vmatrix} X_1-\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots X_{2n-1}-\frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \ldots \quad \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} & n-1 \\ X_1 \quad \ldots \quad X_{2n-1} & \end{vmatrix}=0$$

решение которого $f=\varphi_1+\varphi(\varphi_2 \ldots \varphi_{2n-1})$, где $\varphi_1 \ldots \varphi_{2n-1}$ некоторые независимые функции от $x_1 \ldots x_p$, а φ — произвольная функция, и дает искомую функцию.

Пусть теперь $2n-1<p$.

Дифференциальное выражение $\omega-df$ приводится к n-членной простейшей форме

$$\omega-df=d(u_1-f)+\sum_2^n {}_j U_j du_j.$$

Поэтому, из формулы (d_1) § 1 следует, если в ней вместо ω и u_1 подставить $\omega-df$ и u_1-f, что система (1') тождественна с системой

$$\frac{\partial(u_1-f,\ u_2 \ldots u_n,\ U_2 \ldots U_n)}{\partial(x_r \ldots x_s)}=0,\ r \ldots s=1 \ldots p.$$

Так как, далее,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{2n-2}} & \\ & n-1 \\ X_1 \ \ldots \ X_{2n-2} & \end{vmatrix} \gtreqless 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \ldots \quad \frac{\partial}{\partial x_{2n-2}} & \\ & n-1 \\ X_1-\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdots X_{2n-2}-\frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} & \end{vmatrix} \gtreqless 0,$$

то из формулы (b_2) § 1, если в ней вместо ω и n подставить соответственно $\omega-du_1$ и $n-1$, следует, что

$$\frac{\partial(u_2 \ldots u_n,\ U_2 \ldots U_n)}{\partial(x_1 \ldots x_{2n-2})} \gtreqless 0.$$

Поэтому, система (1') заключает только $p-(2n-2)>1$ независимых уравнений

$$(1'') \quad \begin{vmatrix} X_1-\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots X_{2n-2}-\frac{\partial f}{\partial x_{2n-2}},\ X_{2n-2+\varrho}-\frac{\partial f}{\partial x_{2n-2+\varrho}} & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad \frac{\partial}{\partial x_{2n-2}} \qquad \frac{\partial}{\partial x_{2n-2+\varrho}} & n-1 \\ X_1 \quad \ldots \quad X_{2n-2} \qquad X_{2n-2+\varrho} & \end{vmatrix} \gtreqless 0,$$

$$\varrho=1 \ldots p-(2n-2).$$

С другой стороны из вышеизложенного второго метода определения простейшей формы следует, что искомая функция u_1 должна также удовлетворять полной системе $p-(2n-1)$ линейных однородных дифференциальных уравнений

$$
(1)\quad \left|\begin{array}{ccc|c}
\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1}}, & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} & \\
X_1\ldots & X_{2n-1}, & X_{2n-1+\varrho} & \\
\dfrac{\partial}{\partial x_1}\ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}}, & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1+\varrho}} & n-1 \\
X_1\ldots & X_{2n-1}, & X_{2n-1+\varrho} &
\end{array}\right| = 0, \quad \varrho = 1\ldots p-(2n-1),
$$

которая по формуле (e_1) § 1 тождественна с системой

$$
\frac{\partial(f,\ u_1\ldots u_n,\ U_2\ldots U_n)}{\partial(x_1\ldots x_{2n-1},\ x_{2n-1+\varrho})} = 0, \quad \varrho = 1\ldots p-(2n-1).
$$

Можно показать, что система $(1'')$ равносильна системе

$$
\left|\begin{array}{ccc|c}
X_1-\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & X_{2n-1}-\dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} & \\
\dfrac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}} & n-1 \\
X_1 & \ldots & X_{2n-1} &
\end{array}\right| = 0,
$$

$$
\left|\begin{array}{ccc|c}
\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1}}, & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} & \\
X_1\ldots & X_{2n-1}, & X_{2n-1+\varrho} & \\
\dfrac{\partial}{\partial x_1}\ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}}, & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-2+\varrho}} & n-1 \\
X_1\ldots & X_{2n-1}, & X_{2n-1+\varrho} &
\end{array}\right| = 0 \quad (1'''),
$$

$$
\varrho = 1\ldots p-(2n-1).
$$

В самом деле системы $(1'')$, $(1''')$ могут быть представлены в форме соответственно

$$
(\beta)\ \frac{\partial(u_1-f,\ u_2\ldots u_n,\ U_2\ldots U_n)}{\partial(x_1\ldots x_{2n-2},\ x_{2n-2+\varrho})} = 0, \quad \varrho = 1\ldots p-(2n-2)
$$

и

$$
(J)\ \frac{\partial(u_1-f,\ u_2\ldots u_n,\ U_2\ldots U_n)}{\partial(x_1\ldots x_{2n-1})} = 0, \quad \frac{\partial(f,\ u_1\ldots u_n,\ U_2\ldots U_n)}{\partial(x_1\ldots x_{2n-1},\ x_{2n-1+\varrho})} = 0
$$

$$
\varrho = 1\ldots p-(2n-1).
$$

Дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial(f,\ u_1 \ldots u_n,\ U_2 \ldots U_n)}{\partial(x_1 \ldots x_{2n-1},\ x_{2n-1+\varrho})} = 0,$$

или

$$\frac{\partial(u_1 - f_1,\ u_1 \ldots u_n,\ U_2 \ldots U_n)}{\partial(x_1 \ldots x_{2n-1},\ x_{2n-1+\varrho})} = 0,$$

$$\varrho = 1 \ldots p - (2n-1),$$

равносильным уравнениям

$$\frac{\partial(u_1 - f,\ u_1 \ldots u_n,\ U_2 \ldots U_n)}{\partial(x_1 \ldots x_{2n-1},\ x_{2n-1+\varrho})} \cdot \frac{\partial(u_2 \ldots u_n,\ U_2 \ldots U_n)}{\partial(x_1 \ldots x_{2n-2})} = 0$$

$$\varrho = 1 \ldots p - (2n-1),$$

так как второй множитель не равен нулю.

По теореме о минорах производного определителя эти последние уравнения можно представить в виде

$$\frac{\partial(u_1 - f,\ u_1 \ldots u_n,\ \varphi_2 \ldots \varphi_n)}{\partial(x_1 \ldots x_{2n-1})} \cdot \frac{\partial(u_1 \ldots u_n,\ U_2 \ldots U_n)}{\partial(x_1 \ldots x_{2n-2},\ x_{2n-1+\varrho})} -$$

$$- \frac{\partial(u_1 - f,\ u_2 \ldots u_n,\ U_2 \ldots U_n)}{\partial(x_1 \ldots x_{2n-2},\ x_{2n-1+\varrho})} \cdot \frac{\partial(u_1 \ldots u_n,\ U_2 \ldots U_n)}{\partial(x_1 \ldots x_{2n-1})} = 0$$

$$\varrho - 1 \ldots p - (2n-1),$$

что и доказывает утверждение. Функция u_1 должна быть таким образом каким либо решением системы (1‴). Ее решение находится следующим образом: пусть $v_1 \ldots v_{2n-1}$ будут все $2n-1$ независимые решения полной системы $p - (2n-1)$ линейных однородных дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \left| \begin{array}{ccc|c} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1}}, & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} & \\ X_1 \ldots & X_{2n-1}, & X_{2n-1+\varrho} & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}}, & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1+\varrho}} & n-1 \\ X_1 \ldots & X_{2n-1}, & X_{2n-1+\varrho} & \end{array} \right| = 0,\ \varrho = 1 \ldots p - (2n-1).$$

Введем их, как новые переменные независимые, в систему (1‴) вместо $x_1 \ldots x_{2n-1}$. Тогда система (1‴) примет вид

$$V_1 \frac{\partial f}{\partial v_1} + \cdots + V_{2n-1} \frac{\partial f}{\partial v_{2n-1}} + V = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} = 0,\ \varrho = 1 \ldots p - (2n-1)$$

Можно показать, что $V_1 \ldots V_{2n-1}$, V не зависят от $x_{2n-1+\varrho}$, $\varrho = 1 \ldots p-(2n-1)$. В самом деле, первое дифференциальное уравнение системы (1''')

$$\begin{vmatrix} X_1 - \frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots X_{2n-1} - \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \ldots \quad \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} & n-1 \\ X_1 \quad \ldots \quad X_{2n-1} & \end{vmatrix} = 0$$

тождественно с уравнением

$$\frac{\partial (u_1 - f_1, u_2 \ldots u_n, U_2 \ldots U_n)}{\partial (x_1 \ldots x_{2n-1})} = 0$$

и получает после указанного преобразования вид

$$\frac{\partial (u_1 - f, u_2 \ldots u_n, U_2 \ldots U_n)}{(\partial (v_1 \ldots v_{2n-1})} \cdot \frac{\partial (v_1 \ldots v_{2n-1})}{\partial (x_1 \ldots x_{2n-1})} = 0,$$

или вид

$$\frac{\partial (u_1 - f, u_2 \ldots u_n, U_2 \ldots U_n)}{\partial (v_1 \ldots v_{2n-1})} = 0.$$

Но так как система (1) тождественна с системой

$$\frac{\partial (f\ u_1 \ldots u_n, U_2 \ldots U_n)}{\partial (x_1 \ldots x_{2n-1}, x_{2n-1+\varrho})} = 0, \ \varrho = 1 \ldots p-(2n-1),$$

то $v_1 \ldots v_{2n-1}$ суть независимые функции от $u_1 \ldots u_n$, $U_2 \ldots U_n$, и обратно $u_1 \ldots u_n$, $U_2 \ldots U_n$ суть функции $v_1 \ldots v_{2n-1}$ только.

Поэтому, дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial (u_1 - f, u_2 \ldots u_n, U_2 \ldots U_n}{\partial (v_1 \ldots v_{2n-1})} = 0.$$

или уравнение

$$V_1 \frac{\partial f}{\partial v_1} + \cdots + V_{2n-1} \frac{\partial f}{\partial v_{2n-1}} + V = 0,$$

не зависит от $x_{2n-1+\varrho}$, $\varrho = 1 \ldots p-(2n-1)$.

Решение этого уравнения

$$f = \varphi_1 + \varphi (\varphi_2 \ldots \varphi_{2n-1}),$$

где $\varphi_1 \ldots \varphi_{2n-1}$ — определенные независимые функции $v_1 \ldots v_{2n-1}$, а φ — произвольная функция, преобразованная к начальным независимым переменным $x_1 \ldots x_p$, дает искомую функцию u_1.

Остальные функции u_j; U_j, $j = 2 \ldots n$ определяются вышеизложенным методом, если вместо ω и n положить соответственно $\omega - du_1$ и $n-1$.

Таким образом, функция u_1 должна во всех случаях удовлетворять и дифференциальному уравнению

$$\begin{vmatrix} X_1 - \dfrac{\partial x}{\partial x_1} \ldots X_{2n-1} - \dfrac{\partial x}{\partial x_{2n-1}} \\ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1 & \ldots & X_{2n-1} \end{vmatrix} n-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Между тем функция u_1 простейшей формы

$$\omega = \sum_1^n {}^i U_i du_i,$$

того же дифференциального выражения в случае $2n-1=p$ произвольна, в случае $2n-1<p$ должна удовлетворять только системе (1), от которой вышеприведенное неоднородное уравнение независимо. Отсюда следует, что каноническая нечетная форма дифференциального выражения ω нечетного класса, есть частичный случай вообще, его простейшей формы, когда переменные u_i, $i=1\ldots n$ определены так, что один из коэффициентов U_i, $i=1\ldots n$ равен единице.

§ 4

Теперь перейдем к интегрированию данного дифференциального уравнения Pfaff'а

$$\omega = \sum_1^p {}^k X_k \, dx_k = 0. \tag{I}$$

Мы приводим его левую часть ω к простейшей форме. Пусть она будет n — членной

$$\omega = \sum_1^n {}^i U_i \, du_i, \quad 1 \leqslant n \leqslant \frac{p+1}{2},$$

так что данное дифференциальное уравнение принимает вид

$$\omega = \sum_1^n {}^i U_i \, du_i = 0.$$

Могут представиться два случая.

1. Пусть вследствие искомых интегралов на все коэффициенты U_i, $i=1\ldots n$ обращаются в нуль. Следовательно, например, $U_1 \gtreqless 0$ в некоторой области переменных независимых $x_1 \ldots x_p$ и переменные $u_1 \ldots u_n \dfrac{U_2}{U_1} \cdots \dfrac{U_n}{U_1}$ независимы. Тогда вследствие искомых интегралов

должно быть

$$du_1 + \sum_2^n {}^j \frac{U_j}{U_1} du_j = 0, \tag{I'}$$

откуда следует, что u_1 должна быть функцией $u_2 \ldots u_n$.

Пусть вообще

$$u_s = f_s(u_{m+1} \ldots u_n), \quad s = 1 \cdots m,$$

где $u_{m+1} \ldots u_n$ независимы. Дифференциальное уравнение (I′) принимает вследствие этих последних соотношений вид

$$\sum_1^{n-m} {}^t \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_{m+t}} + \sum_2^m {}^s \frac{U_s}{U_1} \frac{\partial f_s}{\partial u_{m+t}} + \frac{U_{m+t}}{U_1} \right) du_{m+t} = 0,$$

откуда по независимости функций $u_{m+t} \ldots u_n$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_{m+t}} + \sum_2^m {}^s \frac{U_s}{U_1} \frac{\partial f_s}{\partial u_{m+t}} + \frac{U_{m+t}}{U_1} = 0, \quad t = 1 \cdots n - m.$$

Обратно, на основании n уравнений

$$u_s = f_s(u_{m+t} \ldots u_n), \quad s = 1 \cdots m$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_{m+t}} + \sum_2^m {}^s \frac{U_s}{U_2} \frac{\partial f_s}{\partial u_{m+t}} + \frac{U_{m+t}}{U_1} = 0, \quad t = 1 \cdots n - m,$$

удовлетворяется дифференциальное уравнение (I′) и, следовательно, дифференциальное уравнение (I).

Эти уравнения совместны, независимы, необходимы в рассматриваемом случае и достаточны.

Эти n уравнений, или уравнений

$$u_s = f_s(u_{m+1} \ldots u_n), \quad s = 1 \ldots m, \quad U_{m+t} + \sum_1^m {}^s U_s \frac{\partial f_s}{\partial u_{m+t}} = 0, \quad t = 1 \ldots m - n,$$

где $U_1 \gtreqless 0$, представляют в рассматриваемом случае искомые интегралы в наименьшем числе.

Если $m = n$, они имеют вид $u_i = c_i \quad i = 1 \cdots n$, где c_i — произвольные постоянные, и представляют систему n полных интегралов.

2. Если вследствие искомых интегралов все коэффициенты $U_i \; i = 1 \cdots n$ должны тождественно обратиться в нуль, этот случай возможен только тогда, если уравнения $U_i \; i = 1 \cdots n$ совместны. Эти уравнения могут тогда представить систему интегралов, но число независимых может быть и меньше, чем n.

Если дифференциальное выражение ω приводится к вообще n—членной форме

$$\omega = \sum_1^n {}^i U_i du_i,$$

где функции u_i $i=1\cdots n$ независимы, то дифференциальное уравнение $\omega=0$ интегрируется n независимыми полными интегралами $u_i=c_i$ $i=1\cdots n$, и обратно, в чем легко убедиться, приняв независимые функции u_i $i=1\cdots n$ за новые независимые переменные. Отсюда следует, что если простейшая форма дифференциального выражения ω n—членная, то дифференциальное уравнение $\omega=0$ интегрируется наименьшим числом n полных интегралов, и обратно.

Отсюда

Теорема VII. Наименьшее число полных интегралов дифференциального уравнения Pfaff'a

$$\omega=\sum_1^p{}^k X_k\,dx_k=0$$

не превосходит $\frac{p+1}{2}$. Необходимое и достаточное условие, чтобы оно было равно n $\left(\leqslant\frac{p+1}{2}\right)$, состоит в том, чтобы наивысшая степень отличных от нуля символических определителей

$$\left|\begin{matrix} X_r & \ldots & X_s \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r & \ldots & X_s \end{matrix}\right|_b \quad r\cdots s=1\cdots p$$

была равна $2n-1$.

Пример. Пусть будет дано дифференциальное уравнение

$$\omega=x_5\,dx_1+x_1\,dx_2+x_2\,dx_3+x_3\,dx_4+x_4\,dx_5=0$$

(E. Goursat, l. c.). В этом случае $p=5$.

Символический определитель пятой степени

$$\left|\begin{matrix} x_5 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} & \dfrac{\partial}{\partial x_5} \\ x_5 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix}\right|_2 = 2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)$$

не равен тождественно нулю. Пусть в некоторой области E $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\gtrless 0$. Из условия $2n-1=5$ находим, что данное дифференциальное выражение ω имеет 3-х членную простейшую форму

$$\omega=U_1\,du_1=U_2\,du_2+U_3\,du_3,$$

где функция u_1 произвольна. Пусть $u_1=x_1$

Символический определитель четвертой степени

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_1}{\partial x_5} \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_5 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_5} \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & x_1 & x_2 & x_4 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ x_5 & x_1 & x_2 & x_4 \end{vmatrix} = x_4$$

не равен тождественно нулю. Пусть в области $E_1 < E$, $x_4 \gtrless 0$. Функция u_2 должна быть каким-либо независимым от x_1 решением линейного дифференциального уравнения

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_4} & \frac{\partial f}{\partial x_5} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & x_4 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} & \frac{\partial}{\partial x_5} \\ x_5 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. уравнения

$$(x_2 + x_4)\frac{\partial f}{\partial x_2} - x_1\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_4\frac{\partial f}{\partial x_4} - (x_1 + x_3)\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0.$$

Одно из его решений, независимое от x_1, есть $\frac{x_2}{x_4} - \log x_4$. Пусть $u_2 = \frac{x_2}{x_4} - \log x_4$.

Определитель:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_5} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_5} \\ X_1 & X_2 & X_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_4} & 0 \\ x_5 & x_1 & x_4 \end{vmatrix} = 1,$$

отличен от нуля в области $E_2 = E_1$.

Функция u_3 должна быть единственным, независимым от x_1, $\frac{x_2}{x_4}\log x_4$ решением полной системы:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_4} & \frac{\partial f}{\partial x_5} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_4} & \frac{\partial u_1}{\partial x_5} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_5} & \frac{\partial u_2}{\partial x_5} \\ X_1 & X_2 & X_4 & X_5 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_5} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_1}{\partial x_5} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_5} \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_5 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. системы:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_4} & \frac{\partial f}{\partial x_5} \\ \frac{1}{x_4} & -\frac{x_2+x_4}{x_4{}^2} & 0 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_5} \\ \frac{1}{x_4} & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_4 \end{vmatrix} = 0$$

или, наконец, системы:

$$x_4(x_2+x_4)\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4{}^2\frac{\partial f}{\partial x_4} - (x_3x_4 + x_1x_2 + x_1x_4)\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0,$$

$$x_4\frac{\partial f}{\partial x_3} - x_2\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0.$$

Оно есть:

$$u_3 = \frac{x_2x_3 + x_4x_5}{x_4} + \frac{x_1x_4 + x_1x_2}{x_4}\log x_4 - \frac{x_1}{2}\log^2 x_4.$$

Итак, функции u_1, u_2, u_3 суть:

$$u_1 = x_1, \quad u_2 = \frac{x_2}{x_4} - \log x_4, \quad u_3 = \frac{x_2x_3 + x_4x_5}{x_4} + \frac{x_1x_4 + x_1x_2}{x_4}\log x_4 - \frac{x_1}{2}\log^2 x_4.$$

Коэффициенты U_1, U_2, U_3 определяются из системы 5-ти линейных уравнений:

$$x_5 = U_1 + U_3\left(\frac{x_2+x_4}{x_4}\log x_4 - \frac{1}{2}\log^2 x_4\right), \quad x_1 = \frac{1}{x_4}U_2 + U_3\left(\frac{x_3}{x_4} + \frac{x_1}{x_4}\log x_4\right),$$

$$x_2 = U_3 + U_2\frac{x_2}{x_4}, \quad x_3 = -U_2\frac{x_2+x_4}{x_4{}^2} + U_3\frac{x_1x_2 + x_1x_4 - x_2x_3}{x_4{}^2} -$$

$$-\frac{x_1x_2}{x_4{}^2}\log x_4 - \frac{x_1}{x_4}\log x_4, \quad x_4 = U_3,$$

из которых независимы только три:

$$x_5 = U_1 + U_3\left(\frac{x_2+x_4}{x_4}\log x_4 - \frac{1}{2}\log^2 x_4\right),$$

$$x_1 = \frac{1}{x_4}U_2 + U_3\left(\frac{x_3}{x_4} + \frac{x_1}{x_4}\log x_4\right), \quad x_4 = U_3.$$

Из них находим, что:

$$U_1 = x_5 - (x_2+x_4)\log x_4 + \frac{x_4}{2}\log^2 x_4, \; U_2 = x_1x_4 - x_3x_4 - x_1x_4\log x_4, \; U_3 = x_1,$$

так что:

$$\omega = \left[x_5 - (x_2+x_4)\log x_4 + \frac{x_4}{2}\log^2 x_4\right]dx_1 + (x_1x_4 - x_3x_4 - x_1x_4\log x_4)$$

$$d\left(\frac{x_2}{x_4} - \log x_4\right) + x_4 d\left(\frac{x_2x_3 + x_4x_5}{x_4} + \frac{x_1x_4 + x_1x_2}{x_4}\log x_4 - \frac{x_1}{2}\log^2 x_4\right).$$

Система наименьшего числа (три) полных интегралов дифференциального уравнения $\omega=0$ есть

$$x_1=C_1,\quad \frac{x_2}{x_4}-\log x_4=C_2,\quad \frac{x_2x_3+x_4x_5}{x_4}+\frac{x_1x_4+x_1x_2}{x_4}\log x_4-\frac{x_1}{2}\log^2 x_4=C_3$$

Система трех интегралов $U_1=U_2=U_3=0$ невозможна.

Так как определитель:

$$\left|\begin{array}{c|c} \frac{\partial}{\partial x_r}\cdots\frac{\partial}{\partial x_s} & \\ X_r\ \ldots\ X_3 & n \end{array}\right|$$

при $p=5$, $n=3$ не существует, дифференциальное выражение ω приводится к трехчленной нечетной канонической форме:

$$\omega=du_1+U_2du_2+U_3du_3.$$

Функция u_1 определяется из неоднородного линейного дифференциального уравнения:

$$\begin{vmatrix} x_5-\frac{\partial f}{\partial x_1} & x_1-\frac{\partial f}{\partial x_2} & x_2-\frac{\partial f}{\partial x_3} & x_3-\frac{\partial f}{\partial x_4} & x_4-\frac{\partial f}{\partial x_5} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} & \frac{\partial}{\partial x_5} \\ x_5 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix}=0,$$

или уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial x_3}+\frac{\partial f}{\partial x_4}+\frac{\partial f}{\partial x_5}=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$$

Его общее решение есть:

$$f=-\frac{3}{2}x_1{}^2+x_1(x_2+x_3+x_4+x_5)+\varphi(x_2-x_1,\ x_3-x_1,\ x_4-x_1,\ x_5-x_1),$$

где φ — произвольная функция. Пусть, например,

$$\varphi=(x_2-x_1)(x_3-x_1)$$

и пусть:

$$u_1=-\frac{3}{2}x_1{}^2+x_1'(x_2+x_3+x_4+x_5)+(x_2-x_1)(x_3-x_1)=$$

$$=-\frac{1}{2}x_1{}^2+x_2x_3+x_1(x_4+x_5).$$

Переменные u_2, u_3, U_2, U_3 определяются, как переменные простейшей формы $U_2du_2+U_3du_3$ дифференциального выражения:

$$\omega-du_1=(x_1-x_4)\,dx_1+(x_1-x_3)\,dx_2+(x_3-x_1)\,dx_4+(x_4-x_3)\,dx_5.$$

Так как символический определитель третьей степени:

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-x_4 & x_1-x_3 & x_3-x_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1-x_4 & x_1-x_3 & x_3-x_1 \end{vmatrix} = x_1-x_4$$

не равен тождественно нулю, положим, что в некоторой области $E<E_1$

$$x_1-x_4 \gtreqless 0.$$

Функция u_2 должна быть каким-либо решением полной системы:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_3} & \dfrac{\partial f}{\partial x_4} \\ x_1-x_4 & x_1-x_3 & 0 & x_3-x_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ x_1-x_4 & x_1-x_3 & 0 & x_3-x_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_3} & \dfrac{\partial f}{\partial x_5} \\ x_1-x_4 & x_1-x_3 & 0 & x_4-x_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_5} \\ x_1-x_4 & x_1-x_3 & 0 & x_4-x_1 \end{vmatrix} = 0.$$

т. е. системы:

$$(x_1-x_4)\frac{\partial f}{\partial x_2} + (x_3-x_1)\frac{\partial f}{\partial x_3} - (x_4-x_1)\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0,$$

$$(x_4-x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (x_4-x_3)\frac{\partial f}{\partial x_3} + (x_4-x_1)\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0.$$

Независимые решения ее суть:

$$x_1-x_5, \quad x_2-x_4, \quad \frac{x_3-x_4}{x_1-x_4}.$$

Пусть:

$$u_2 = x_2 - x_4.$$

Так как определитель:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ X_1 & X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x_1-x_4 & x_1-x_3 \end{vmatrix} = x_4-x_1 \gtreqless 0,$$

в области E_1, u_3 должна быть единственным независимым от x_2-x_4 решением полной системы:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1-x_4 & x_1-x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_4} \\ 0 & 1 & -1 \\ x_1-x_4 & x_1-x_3 & x_3-x_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_5} \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1-x_4 & x_1-x_3 & x_4-x_1 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. системы

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_5} = 0.$$

Оно есть $x_1 - x_5$. Коэффициенты $U_2 . U_3$ определяются из уравнений:

$$x_1 - x_4 = U_3, \quad x_1 - x_3 = U_2, \quad x_3 - x_1 = -U_2, \quad x_4 - x_1 = -U_3,$$

откуда:

$$U_2 = x_1 - x_3, \quad U_3 = x_1 - x_4,$$

и нечетная каноническая форма дифференциального выражения ω есть

$$\omega = d\left(-\frac{1}{2} x_1{}^2 + x_2 x_3 + x_1 x_4 + x_1 x_5\right) + (x_1 - x_3)\, d\, (x_2 - x_4) + \\ + (x_1 - x_4)\, d\, (x_1 - x_5).$$

Из этого следует, что простейшая 2-х членная (каноническая четная) форма дифференциального выражения:

$$\omega - du_1 = (x_1 - x_4)\, dx_1 + (x_1 - x_3)\, dx_2 + (x_3 - x_1)\, dx_4 + (x_4 - x_1)\, dx_5$$

есть

$$\omega - du_1 = (x_1 - x_3)\, d(x_2 - x_4) + (x_1 - x_4)\, d(x_1 - x_5).$$

Система наименьшего числа (два) полных интегралов уравнения

$$\omega - du_1 = 0$$

есть:

$$x_2 - x_4 = C_1, \quad x_1 - x_5 = C_2.$$

Система двух интегралов вида $U_2 = U_3 = 0$ возможна и имеет вид:

$$x_1 - x_3 = 0, \quad x_1 - x_4 = 0.$$

C. RUSSYAN

Integrationsmethode der Pfaffschen Differentialgleichung

Die Integrationsmethode der Pfaffschen Differentialgleichung

$$\omega = \sum_{1}^{p} {}^{k} X_k dx_k = 0$$

die wir den Arbeiten von Pfaff, Jacobi, Natani, Clebsch, Hamburger, Frobenius und S. Lie verdanken, besteht darin, dass man erst den Differentialausdruck ω auf die kanonische Form, gerade oder ungerade bringt und dann die gegebene Differentialgleichung integriert. Die Methode hängt also von der Geradheit der Klasse des Differentialausdruckes ω ab.

E. Cartan hat mit Hilfe der Ergebnisse aus der Theorie der symbolischen Differentialformen die Integrationsmethode gegeben, die von diesem Umstande unabhängig ist. E. Goursat hat auch eine Integrationsmethode gegeben, die auf dasselbe Prinzip sich gründet, die aber suczessive Transformationen verlangt.

Der Verfasser giebt die Integrationsmethode die auch von dieser Beschaffenheit ist, aber ist sie direkt und verlangt nicht die suczessiven Transformationen: alle Differentialgleichungen, die zur Lösung des Problems nothwendig sind, anstellen sich unmittelbar nach den Koeffizienten des gegebenen Differentialausdruckes ω, was in Bezug auf die oben erwähnten Methoden nicht der Fall ist; endlich ist sie einfach, da sie nur die drei Hilfssätze verlangt.

Der Verfasser giebt die oben erwähnten Differentialgleichungen in der nicht aufgelösten und in der aufgelösten Form.

Das Hauptergebniss ist: Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die gegebene Differentialgleichung mit Hilfe der kleinsten Anzahl n der vollständigen Integrale $U_i = C_i$, $i = 1 \dots n$ sich integrieren, oder dafür dass der Differentialausdruck ω auf die Form

$$\omega = \sum_{1}^{n} {}^{i} U_i du_i$$

mit der kleinsten Anzahl n der Differentiale sich reduziren lasse, ist dass der hochste Grad der nicht sämmtlich identisch verschwindenden Determinanten

$$\left|\begin{array}{c} X_r \ \dots \ X_s \\ \frac{\partial}{\partial x_r} \dots \frac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \ \dots \ X_s \end{array}\right|_{\alpha} \quad r \dots s = 1 \dots p$$

gleich $2n-1$ sei, wo das Zeichen ∂ zeigt, dass das Paar der Zeilen

$$\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_r} \dots \frac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \ \dots \ X_s \end{array}$$

deren Elemente dem kommutativen Gesetze nicht unterworfen sind, α-mal vorkommt.

Wenn im gewissen Bereich E_1

$$\left|\begin{array}{c} X_1 \ \dots \ X_{2n-1} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1 \ \dots \ X_{2n-1} \end{array}\right|_{n-1} \gtreqless 0$$

ist und die Funktionen $u_1 \dots u_{m-1}$ $(0 \leqslant m-1 < n)$ schon bestimmt sind, nicht alle Determinanten des $2n-m$ Grades

$$\left|\begin{array}{c} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u_1}{\partial x_{i-1}}, \frac{\partial u_1}{\partial x_{i+1}} \dots \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m+1}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{i-1}}, \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{i+1}} \dots \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m+1}} \\ X_1 \ \dots \ X_{i-1}, \ X_{i+1} \ \dots \ X_{2n-m+1} \\ \left.\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i-1}}, \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{2n-m+1}} \\ X_1 \ \dots \ X_{i-1}, \ X_{i+1} \ \dots \ X_{2n-m+1} \end{array}\right|_{n-m} \end{array}\right|$$

$$i = 1 \dots 2n-m+1$$

identisch verschwinden.

Es sei im gewissen Bereiche $E_m (\leqslant E_1)$

$$\left|\begin{array}{c} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} \\ X_1 \ \dots \ X_{2n-m} \\ \left.\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_{2n-m}} \\ X_1 \ \dots \ X_{2n-m} \end{array}\right|_{n-m} \end{array}\right| \gtreqless 0.$$

Alsdann die Funktion u_m ist beliebige von $u_1 \ldots u_{m-1}$ unabhängige Lösung des vollständigen Systems der $p-(2n-m)$ linearen unabhängigen Differentialgleichungen

$$\left|\begin{array}{cccc}
\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f}{\partial x_{2n-m}}, & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & & \\
\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & & \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & & \\
\frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}}, & \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & & \\
X_1 \ \ldots \ X_{2n-m}, & X_{2n-m+\varrho} & & \\
\frac{\partial}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x_{2n-m}} & \frac{\partial}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & \Bigg| & n-m \\
X_1 \ \ldots \ X_{2n-m}, & X_{2n-m+\varrho} & &
\end{array}\right| = 0.$$

$$\varrho = 1 \ldots p-(2n-m)$$

Wenn die Funktion U_m bestimmt ist, so sind nicht alle Determinanten des Grades $2n-m-1$

$$\left|\begin{array}{cccc}
\frac{\partial u}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial u_1}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{i+1}} \ldots \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} & & \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \\
\frac{\partial u_m}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial u_m}{\partial x_{i-1}}, & \frac{\partial u_m}{\partial x_{i+1}} \ldots \frac{\partial u_m}{\partial x_{2n-m}} & & \\
X_1 \ \ldots \ X_{i-1}, & X_{i+1} \ \ldots \ X_{2n-m} & & \\
\frac{\partial}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x_{i-1}}, & \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} \ldots \frac{\partial}{\partial x_{2n-m}} & \Bigg| & n-m-1 \\
X_1 \ \ldots \ X_{i-1}, & X_{i+1} \ \ldots \ X_{2n-m} & &
\end{array}\right|$$

$$i = 1 \ldots 2n-m$$

identisch null.

Wenn man $m = 1, 2 \ldots n$ setzt, so hat man die Funktionen $u_1 \ldots u_n$ mit Hilfe der Integrationen der Ordnung $2n-1, 2n-3, \ldots 1$.

Wenn $2n-1 = p$ ist, die Funktion u_1 ist willkürlich. Man bestimmt die Koeffizienten $U_1 \ldots U_n$ aus dem Systeme der linearen Gleichungen

$$X_k = \sum_1^n {}_i\, U_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad k = 1 \ldots p$$

das nur die n unabhängigen enthält.

Nachdem die Reduction der Differentialgleichung $\omega = 0$ auf die Form

$$\omega = \sum_1^n {}_i\, U_i du_i = 0$$

erledigt ist, man integriert dieselbe nach bekannter Weise mit Hilfe der nur ausführbaren Operazionen.

Der Verfasser benutzt dieselbe Methode für die Reduktion des Differentialausdruckes ω auf die kanonische Form.

S. BERNSTEIN

Sur une propriété de la fonction exponentielle.

Je me propose de démontrer dans cette Note une proposition très simple concernant la fonction exponentielle en me reservant de revenir prochainement sur ses généralisations. Le théorème élémentaire dont il s'agit peut être énoncé de la façon suivante: Si la fonction de la variable réelle $f(x)$ est absolument monotone(*) sur tout l'axe réel, on a, pour toute valeur de x,

$$f(x) \geqslant e^x$$

si $f(0) = f'(0) = 1$.

La fonction exponentielle e^x peut être aussi définie comme la fonction absolument monotone qui, pour $x = 0$, reçoit la valeur 1 avec sa dérivée, et, pour $x = 1$, prend la valeur e; d'ailleurs il n'existe pas de fonction de la nature indiquée qui, pour $x = 1$, reste inférieure à e.

La démonstration la plus courte que nous donnerons plus loin supposera connue la propriété des fonctions absolument monotones d'être analytiques. Je commencerai par donner une autre démonstration qui, quoique plus longue, est à certains égards plus instructive et s'appuie sur le lemme suivant:

Lemme. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ des nombres donnés quelconques, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres positifs donnés; si p_i sont des paramètres non négatifs satisfaisant à la seule condition

$$M = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_n p_n, \tag{1}$$

où M est un nombre fixe, l'ensemble E des points du plan ayant pour coordonnées

$$x = a + \alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_n p_n, \quad y = b + \beta_1 p_1 + \cdots + \beta_n p_n \tag{2}$$

est formé par le plus petit polygone convexe contenant tous les points P_i de coordonnées

$$x_i = a + \frac{\alpha_i}{\lambda_i} M, \quad y_i = b + \frac{\beta_i}{\lambda_i} M \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

(*) La fonction $f(x)$ est absolument monotone, si toutes ses différences successives sont non négatives.

Pour établir ce lemme, remarquons d'abord que l'ensemble E est borné, car $p_i \leqslant \frac{M}{\lambda_i}$ en vertu de (1). De plus E est limité par un contour C convexe, puisque, (x_0, y_0) et (x_1, y_1) faisant partie de l'ensemble E, il en sera de même du point (ξ, η), tel que

$$\xi = \varrho\lambda_0 + (1-\varrho)x_1,$$
$$\eta = \varrho y_0 + (1-\varrho)y_1,$$

lorsque $0 < \varrho < 1$.

Disons, pour abréger, que P est un sommet d'un contour convexe C, si toute droite passant par P possède au moins d'un côté de ce point des points extérieurs à C aussi voisins de P que l'on veut. (Ainsi tous les points d'un contour convexe qui n'a pas de partie rectiligne seraient des sommets). Cette définition étant posée, notre affirmation sera prouvée, si nous montrons que les seuls points qui peuvent être des sommets de C se trouvent parmi les points P_i, dont les coordonnées sont données par les formules (3).

A cet effet, posons $\frac{\lambda_1 p_i}{M} = q_i$; les formules (2) prendront alors la forme

$$x = a + \varphi_1 q_1 + \cdots + \varphi_n q_n, \quad y = b + f_1 q_1 + \cdots + f_n q_n, \tag{2 bis}$$

où

$$\varphi_i = \frac{M\alpha_i}{\lambda_i}, \quad f_i = \frac{M\beta_i}{\lambda_i},$$

tandis que (1) se réduit à

$$1 = q_1 + q_2 + \cdots + q_n \tag{1 bis}$$

avec la condition $q_i \geqslant 0$. Cela étant, soit d'abord i un indice tel qu'il n'existe pas d'autre indice $h \gtreqless i$ pour lequel on ait simultanément $\varphi_h = \varphi_i$, $f_h = f_i$; dans ces conditions, le point (x_0, y_0) pour lequel $q_i > 0$ ne pourrait être un sommet, si en même temps $q_h > 0$, car, en laissant invariables les autres paramètres et en prenant $q_i + \varepsilon$ ef $q_h - \varepsilon$ au lieu de q_i et q_h respectivement, on obtient un nouveau point (x_1, y_1) de l'ensemble E, tel que

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \varepsilon(\varphi_i - \varphi_h), \\ y_1 &= y_0 + \varepsilon(f_i - f_h); \end{aligned} \tag{4}$$

ainsi tous les points de la droite (4) assez voisins de (x_0, y_0) seraient intérieurs au contour C, de sorte que ce point n'est pas un sommet. Supposons ensuite que $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_k$, $f_1 = f_2 = \cdots = f_k$, mais que, pour tous les autres indices h, on n'a pas simultanément $\varphi_h = \varphi_1$ et $f_h = f_1$. Dans ce cas, tous les points (x_0, y_0), pour lesquels $q_1 + \cdots + q_k = Q$, où Q est un nombre fixe, sont identiques, si les valeurs des autres paramètres sont les mêmes. Donc, d'après le même raisonnement, nous concluons d'une façon générale que tous les sommets possibles seront obtenus en faisant successivement $q_1 = 1$, $q_2 = 1, \ldots, q_n = 1$; ces points (qui pourront ne pas être tous différents) auront leurs coordonnées déterminées par (3). C. q. f. d.

Remarque. Le lemme établi subsiste évidemment, lorsque n croît indéfiniment, et il peut alors être présenté sous la forme suivante:

Si $p(x) \geqslant 0$ et

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$$

alors quelles que soient les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$, l'ensemble E des points, ayant pour coordonnées

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,p(x)\,dx, \quad Y = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,p(x)\,dx$$

sera limité par le plus petit contour convexe contenant tous les points de la courbe

$$X = f(x), \quad Y = \varphi(x).$$

Sans nous arrêter sur les applications de cette remarque, indiquons quelques exemples: 1) soit $f(x) = |x|^m$, $\varphi(x) = |x|^l$ où $m > l$, alors $X^l \geqslant Y^m$;

2) si $\int_{-a}^{a} xp(x)\,dx = 0$ et $\int_{-a}^{a} p(x)\,dx = 1$, alors $\left|\int_{-a}^{a} xp(x)\,dx\right| \leqslant \frac{a}{3}$.

Démontrons à présent un second lemme qui résulte du précédent:

Lemme. Si $f(a)$ et ses différences successives

$$\Delta_1 f(a) = f(a+1) - f(a), \quad \Delta_2 f(a) = f(a+2) - 2f(a+1) + f(a),$$
$$\Delta_3 f(a), \ldots, \Delta_n f(a)$$

sont non négatives, on a

$$f(a+n) . f(a+n-2) \geqslant \frac{n}{n-1} f(a+n-1) \left[f(a+n-1) - \frac{1}{n} f(a+n)\right]. \quad (5)$$

En effet, en posant pour abréger $a = 0$, on a

$$\begin{aligned} y &= f(n-2) = f(0) + (n-2)\Delta_1 + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}\Delta_2 + \cdots + \Delta_{n-2}, \\ x &= f(n-1) = f(0) + (n-1)\Delta_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\Delta_1 + \cdots + \Delta_{n-1}, \quad (6) \\ M &= f(n) = f(0) + n\Delta_1 + \cdots + n\Delta_{n-1} + \Delta_n. \end{aligned}$$

Donc, en laissant M fixe, on voit que le point (x, y) défini par les formules (6) se trouve, d'après le lemme précédent, à l'intérieur du plus petit polygone convexe ayant pour sommets les points

$$P_1(M, M),\quad P_2\left(M\frac{n-1}{n},\ M\frac{n-2}{n}\right), \ldots,$$

$$P_k\left(M\frac{n-k+1}{n},\ M\frac{(n-k)(n-k+1)}{n(n-1)}\right), \ldots,\quad P_{n+1}(0, 0).$$

Il est facile de voir que tous ces points, ayant leurs abscisses équidistantes, se trouvent sur la parabole

$$My = \frac{x}{n-1}[nx - M]; \tag{7}$$

par conséquent, le polygone cherché aura pour sommets tous les points considérés, et, outre la relation évidente $y \leqslant x$ qui correspond au côté supérieur $(P_{n+1} P_0)$ de notre polygone, on a, en tenant compte des équations des côtés inférieurs (*),

$$\begin{aligned} &y \geqslant 2x - M \quad \text{pour} \quad M\frac{n-1}{n} \leqslant x \leqslant M, \\ &y \geqslant \frac{n-2}{n-1}\left[2x - \frac{n-1}{n}M\right] \quad \text{pour} \quad M\frac{n-2}{n} \leqslant x \leqslant M\frac{n-1}{n}, \\ &y \geqslant \frac{n-3}{n-1}\left[2x - \frac{n-2}{n}M\right] \quad \text{pour} \quad M\frac{n-3}{n} \leqslant x \leqslant M\frac{n-2}{n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{8}$$

Ainsi, a fortiori, on a $My \geqslant \frac{x}{n-1}[nx - M]$, c'est à dire

$$f(n) \, . \, f(n-2) \geqslant \frac{nf(n-1)}{n-1}\left[f(n-1) - \frac{f(n)}{n}\right], \tag{9}$$

ce qui est équivalent à (5) C. q. f. d.

Posons à présent $a + n - 1 = b$ et supposons que $f(x)$ a ses différences finies de tous les ordres non-négatives sur tout l'axe réel. On aura donc, quel que soit b et n,

$$f(b+1) \, . \, f(b-1) \geqslant \frac{n}{n-1} f(b)\left[f(b) - \frac{1}{n} f(b+1)\right].$$

Par conséquent, si b étant fixe, on fait croître n indéfiniment, on trouve que

$$f(b+1) \, . \, f(b-1) \geqslant [f(b)]^2. \tag{10}$$

(*) On vérifie facilement, grâce aux propriétés connues des paraboles que les arêtes (8) de la parabole (7) sont tangentes à la parabole $My = \frac{n}{n-1}\left[x - \frac{M}{2n}\right]^2$, de sorte que tous les côtés de notre polygone sont comprises entre les deux paraboles considérées, dont la distance verticale est égale à $\frac{M}{4n(n-1)}$.

Ainsi, en posant $b=1$ et $f(0)=1$, $f(1)=t\geqslant 1$, on a $f(2)\geqslant t^2$; en faisant ensuite $b=2$, et substituant dans (10) les valeurs $f(1)=t$, $f(2)=t^2$, on a de même $f(3)\geqslant t^3$. De proche en proche on trouve, pour toute valeur entière positive de n,

$$f(n)\geqslant f(1)\,.\,f(n-1)\geqslant t^n. \tag{11}$$

En appliquant le même procédé en sens inverse, on voit pareillement que l'inégalité

$$f(n)\geqslant t^n \tag{11 bis}$$

subsiste également pour les valeurs entières négatives de n.

Soit h un nombre quelconque; en supposant toujours $f(0)=1$, on aura, en vertu de (11), pour $x=nh$,

$$f(x)=f(nh)\geqslant [f(h)]^n=[f(h)]^{\frac{x}{h}}, \tag{12}$$

en admettant que les différences succesives de $f(x)$ correspondant à l'accroissement fini h sont non-négatives.

Donc, en faisant tendre h vers 0 et en remarquant que

$$\lim_{h=0}\,[f(h)]^{\frac{x}{h}}=e^{xf'(0)},$$

on voit que, en supposant $f'(0)=1$, on a, quel que soit x,

$$f(x)\geqslant e^x, \text{ c. q. f. d.}$$

Le même résultat peut être obtenu plus rapidement, en s'appuyant sur le théorème (*): si la fonction $f(x)$ est absolument monotone sur le segment ab $(a<b)$, elle est développable en série de Taylor suivant les puissances de $(x-a)$ convergente sur tout le segment ab.

Il est aisé alors de vérifier que, si $f(x)$ est absolument monotone sur la partie de l'axe réel $(-\infty, b)$, on a, pour toute valeur de $x\leqslant b$, l'inégalité

$$f(x)\,.\,f''(x)-[f'(x)]^2\geqslant 0. \tag{13}$$

En effet, soit $-n$ un nombre négatif, on a les développements

$$f(x)=a_0+a_1(x+n)+\cdots+a_k(x+n)^k+\cdots,$$
$$f'(x)=a_1+2a_2(x+n)+\cdots+ka_k(x+n)^{k-1}+\cdots,$$
$$f''(x)=2a_2+\cdots+k(k-1)a_kx^{k-2}+\cdots,$$

convergents, pour $-n<x<b$, à coéfficients positifs. D'où

$$(x+n)f'(x)=a_1(x+n)+2a_2(x+n)^2+\cdots+ka_k(x+n)^k+\cdots,$$
$$(x+n)f'(x)+(x+n)^2f''(x)=a_1(x+n)+4a_2(x+n)^2+\cdots+k^2a_k(x+n)^k+\cdots$$

(*) S. Bernstein. „Sur les propriétés des fonctions analytiques d'une variable réelle" Mathem. Ann. 1914.

Donc, en posant $A_k = a_k(x+n)^k \geqslant 0$ et en tenant compte de l'identité

$$[A_0 + A_1 + \cdots + A_k + \cdots]\,[A_1 + 4A_2 + \cdots + k^2 A_k + \cdots] -$$
$$- [A_1 + 2A_2 + \cdots + kA_k + \cdots]^2 = \Sigma A_i A_k (k-i)^2 \geqslant 0,$$

on voit que

$$f(x)\,.\,[f'(x) + (x+n) f''(x)] \geqslant (x+n)\,[f'(x)]^2,$$

ou autrement,

$$f(x)\,.\,f''(x) + \frac{f(x)\,.\,f'(x)}{x+n} \geqslant [f'(x)]^2. \tag{14}$$

Donc, en laissant x fixe et faisant croître n indéfiniment, on a, en effet,

$$f(x) f''(x) \geqslant [f'(x)]^2. \tag{13}$$

L'inégalité (13) est équivalente à

$$[\log f(x)]'' = \frac{f'' f - (f')^2}{f^2} \geqslant 0.$$

Donc, en posant $\log f(x) = \varphi(x)$, on constate que la ligne $y = \varphi(x)$ est convexe, de sorte que, si, pour $x = 0$, $\varphi(x) = 0$, $\varphi'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} = k$, on a pour toute valeur de $x < b$, $\varphi(x) \geqslant kx$, d'où $f(x) \geqslant e^{kx}$.

Montrons aussi que la fonction e^{kx} peut être définie comme il suit: c'est la fonction absolument monotone sur tout l'axe réel, telle que $f(0) = 1$, $f'(0) = k$, $f''(0) = k^2$.

En effet, si en un point on a $f(x) f''(x) - [f'(x)]^2 = 0$, cette égalité est remplie identiquement. Pour le voir remarquons que d'après ce qui précède on a, pour toute valeur de n, quel que soit x,

$$f_{(x)}^{(n-1)}\,.\,f_{(x)}^{(n+1)} \geqslant [f_{(x)}^{(n)}]^2.$$

D'autre part, puisque $F(x) = f(x)\,.\,f''(x) - f'^2(x)$ ne devient jamais négative, on a nécessairement $F'(x) = 0$ au point, où $F(x) = 0$; mais alors

$$F'(x) = f(x) f'''(x) - f'(x)\,.\,f''(x) = f'(x)\left[\frac{f'(x)\,.\,f'''(x)}{f''(x)} - f''(x)\right] = 0,$$

c'est à dire

$$f'(x) f'''(x) - [f''(x)]^2 = 0;$$

donc, en répétant le même raisonnement, on trouve successivement que l'on a au point considéré

$$f^{(n-1)}(x)\,.\,f^{(n+1)}(x) - [f^{(n)}(x)]^2 = 0$$

pour toute valeur de n. Ainsi, on a, pour $x = 0$,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{f'''(x)}{f''(x)} = \cdots = \frac{f^{(n+1)}(x)}{f^{(n)}(x)} = k.$$

Par conséquent, l'hypothèse faite entraîne que

$$f(x) = 1 + kx + \frac{k^2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{k^n x^n}{n!} + \cdots = e^{kx}.$$

Remarquons, enfin, que, si la fonction absolument monotone, pour $x < b$, satisfait pour trois valeurs x_0, x_1, x_2 inférieures à b aux égalités

$$f(x_0) = Ae^{kx_0}, \quad f(x_1) = Ae^{kx_1}, \quad f(x_2) = Ae^{kx_2},$$

où A et k sont des constantes données, on a identiquement $f(x) = Ae^{kx}$.

En effet, d'après ce qui précède, la ligne $y = \log f(x)$ est convexe; donc, si elle passe par 3 points en ligne droite, elle se réduit à une droite entre ces points, et, comme elle est analytique, elle se prolonge également en ligne droite dans les deux sens.

W. GONTCHAROFF

Sur quelques notions fondamentales de la Topologie abstraite

N 1.

C'est à la théorie des ensembles ponctuels dans l'espace Euclidien E_n qu'on rattache ordinarement les principes de l'Analysis situs. On obtient l'Analysis situs général ou Topologie abstraite, si la nature des points ou éléments d'ensembles n'est pas déterminée (*). Il est bien connu que les procédés de la théorie des ensembles sont régis par les lois formelles de l'Algèbre logique, dont on emploie souvent aussi le langage et les notations. En étudiant des relations topologiques, qui existent entre les variétés abstraites, je me suis aperçu que la notion du point n'y joue aucun rôle essentiel et qu'on pourrait entreprendre de s'en passer. Donc, j'ai eu l'idée de rattacher l'Analysis situs directement à l'Algèbre logique sans avoir recours à la théorie des ensembles. L'ouvrage présent est sorti de cet ordre d'idées.

Deux groupes d'axiomes servent de point de départ. Le premier groupe, introduisant la notion primitive de la variété et la relation primitive de l'inclusion n'est pas essentiellement distinct du système d'axiomes de l'Algèbre logique (**). Le second introduit la relation primitive d'être conjoint, ou, plus intuitivement, être à côté de, ce qui sert à caractériser le mode de continuité dans l'espace considéré. En développant la déduction on définit les notions suivantes: point ou élément, variété connexe, composant d'une variété, être située entre deux variétés, variété linéaire (ou ligne) simple, ligne de Jordan. Il va sans dire que ce ne sont que les premiers pas vers le but proposé.

J'ai à insister surtout sur un principe qui m'a guidé dans le choix des définitions, des énoncés et des démonstrations: c'est qu'on ne considère que des propriétés intrinsèques de la variété étudiée, sans faire appel à l'espace environnant. Il est évident que de la ligne de Cantor ou la

(*) Voir, par exemple, M. Fréchet. „Sur les ensembles abstraits" (Ec. Norm., 38).

(**) Schröder. Algebra d. Logik; E. V. Huntington. Sets of independent postulates for the algebra of logic (Trans. Am. M. S. Vol. 5).

définition topologique de la ligne de Jordan fermée proposée par Schoenfliess (*) n'y satisfont pas.

La nature des notions primitives convenablement spécifiée, on retrouve les notions correspondantes de l'espace Euclidien E_n. La notion de la variété linéaire, introduite ici, présente une généralisation de la ligne de Jordan. M. Zoretti a défini la ligne par la propriété d'être irréductible entre deux points (**); il démontre dans l'ouvrage cité que cette définition ne permet pas toujours d'établir les relations d'ordre entre les points de la ligne. On verra que la définition de la ligne, introduite ci-dessous, le permet presque par définition.

N 2.

Les objets considérés, appelés variétés et désignées par des lettres latines majuscules A, B etc., sont supposés appartenir à une classe **X** bien déterminée ou donnée (on dira l'espace **X**). On aura à considérer des classes de variétés faisant partie de **X**: ces classes sont désignées par des lettres **A**, **B** etc.; dans ce cas A représente une variété quelconque de **A**, B celle de **B** etc.

La relation de l'inclusion „A fait partie de B" ou „B contient A" s'écrit: $A \prec B$ ou $B \succ A$ (c'est la même chose). La relation d'égalité $A = B$ est, par définition, équivalente au système de deux relations $A \prec B$, $A \succ B$ (***).

Groupe d'axiomes A

$\mathrm{I}_{1,2}$. 1°. $A \prec A$

2°. Si $A \prec B$, $B \prec C$, on a $A \prec C$.

$\mathrm{II}_{1,2}$. *1° Quelle que soit la classe donnée des variétés* **A**, *il existe une variété $\Pi(\mathbf{A})$ qui possède la propriété suivante: la relation $X \prec \Pi(\mathbf{A})$ est équivalente au système des relations $X \prec A$, où A est une variété quelconque de* **A**.

2°. Quelle que soit la classe donnée des variétés **A**, *il existe une variété $\Sigma(\mathbf{A})$ qui possède la propriété suivante: la relation $X \succ \Sigma.(\mathbf{A})$ est équivalente au système des relations $X \succ A$, où A est une variété quelconque de* **A**.

Dans le cas où la classe **A** est formée d'un nombre fini de variétés A_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ on écrira aussi:

$$\Pi(\mathbf{A}) = A_1 A_2 \ldots A_n, \quad \Sigma(\mathbf{A}) = A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

On démontre l'unicité de $\Pi(\mathbf{A})$ et de $\Sigma(\mathbf{A})$. On appelle $\Pi(\mathbf{A})$ produit et $\Sigma(\mathbf{A})$ somme des variétés de la classe **A**.

(*) A. Schönfliess. Die Entwickelung d. Lehre von d. Punktmannigfaltigkeiten (Jahresbericht d. Deutsch. Math., Ver. 1908, Ergänzungsband II p. 119).

(**) Acta Mathem., 1913.

(***) Il est à remarquer que l'égalité $A = B$ ne signifie pas en général l'identité de A et de B.

X étant la classe de toutes les variétés considérées, posons:

$$\Pi(\mathbf{X}) = 0, \quad \Sigma\cdot(\mathbf{X}) = \Omega.$$

0 et Ω sont appelées (resp.) variété n u l l e et variété t o t a l e. On a $0 \prec X$, $X \prec \Omega$ quel que soit X.

Si la classe **A** est vide, on a à poser: $\Pi(\mathbf{A}) = \Omega$, $\Sigma\cdot(\mathbf{A}) = 0$.

Au cas où $\Pi(\mathbf{A}) = 0$ on écrira tout simplement $\Sigma(\mathbf{A})$ ou $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ au lieu de $\Sigma\cdot(\mathbf{A})$ et $A_1 \dotplus A_2 \dotplus \cdots \dotplus A_n$.

III. **A** *désignant une classe de variétés donnée,* $B\mathbf{A}$ *celle qu'on obtient en multipliant chaque variété de* **A** *par* B *on a*

$$B\,\Sigma\cdot(\mathbf{A}) \prec \Sigma\cdot(B\mathbf{A}).$$

Puisque la relation $B\,\Sigma\cdot(\mathbf{A}) \succ \Sigma\cdot(B\mathbf{A})$ est aisément démontrable, on en déduit:

$$B\,\Sigma\cdot(\mathbf{A}) = \Sigma\cdot(B\mathbf{A}).$$

IV. *Quelle que soit la variété A, il existe une variété* $\bar{A}$ *qui satisfait aux relations suivantes*:

$$A \dotplus \bar{A} = \Omega, \quad A\bar{A} = 0.$$

La variété $\bar{A}$ est unique, ce qu'on démontre facilement. Nous avons à distinguer les axiomes $\mathrm{II}_{1,2}$ et III f i n i s ou t r a n s f i n i s, selon que la classe **A** est supposée être formée d'un nombre fini on infini de variétés. Le système classique de Schröder n'admet que les axiomes finis. Tout de même je ne vois aucune nécessité à éviter dans la Topologie générale des procédés qu'on emploie sans scrupules dans la Théorie des ensembles. Quoiqu'il en soit, on verra ce qui serait à modifier dans la théorie suivante si l'on s'était décidé à rejeter les axiomes transfinis.

Il est bien connu que chacun des axiomes II_1 et II_2 est une conséquence des autres axiomes: c'est par raison de symétrie qu'on les introduit tous les deux. D'ailleurs ce n'est pas la question de l'indépendance des axiomes que nons avons à étudier.

Il n'est pas nécessaire à rappeler ici les lois des opérations formelles qu'on déduit des axiomes *A I—IV*.

La variété A est dite é l é m e n t ou p o i n t, si les conditions $X \dotplus 0$ (*), $X \prec A$ entraînent $X = A$. L'existence des éléments n'est pas postulée, ainsi que leur absence.

Les propriétés suivantes des éléments sont à remarquer:

1) un élément A et une variété quelconque B étant donnée, on a ou bien $A \prec B$ ou bien $AB = 0$,

2) deux éléments A et B non égaux étant donnés, on a $AB = 0$,

3) un élément A et une classe de variétés **B** étant donnés, si $A \prec \Sigma\cdot(\mathbf{B})$, il existe une variété B de la classe **B** (au moins) telle que $A \prec B$.

(*) Le trait vertical signifie la non-existence de la relation.

Soit $\mathbf{E}_A$ la classe de tous les éléments faisant partie de A. Alors $\Sigma(\mathbf{E}_A) \prec A$. Si, de plus, la relation

$$\Sigma(\mathbf{E}_A) = A$$

est vérifiée, la variété A est dite élémentaire. La condition nécessaire et suffisante pour que A soit élémentaire est que chaque partie de A non nulle contienne au moins un élément.

On démontre:

1) si $A \prec B$, B étant élémentaire, A est aussi élémentaire,

2) si toutes les variétés A de la classe $\mathbf{A}$ sont élémentaires, $\Sigma(\mathbf{A})$ est aussi élémentaire,

3) une variété quelconque est la somme de deux variétés A et B telles que $AB = 0$, A est élémentaire, B ne contient aucun élément. D'ailleurs les cas $A = 0$ ou $B = 0$ ne sont pas exclus.

L'exemple d'une variété élémentaire est fourni par l'ensemble $\mathbf{E}$ des éléments quelconques: on définit les variétés comme sous-ensembles de $\mathbf{E}$ et la relation $A \prec B$ signifiera que A est sous-ensemble de B. Alors $\mathbf{E}\,(= \Omega)$ et tous les sous-ensembles de $\mathbf{E}$ sont élémentaires.

J'emprunte à M. S. Bernstein l'exemple d'une variété non nulle sans élément (*). La classe $\mathbf{X}$ est formée de toutes les suites possibles des nombres 0 et 1 (fractions dyadiques si l'on veut:

$$A \equiv (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots) \equiv [\alpha_n].$$

La relation $A \prec B$ veut dire que l'une de trois circonstances suivantes (au moins) a lieu:

1°. ou bien la suite $[\alpha_n]$ contient un nombre fini ou nul de nombres 1,

2°. ou bien la suite $[\beta_n]$ contient un nombre fini on nul de nombres 0,

3°. ou bien on a $\alpha_n \leqslant \beta_n$, $(n = 1, 2, 3 \ldots)$.

La variété $\Omega \equiv (1, 1, 1 \ldots)$ ne contient aucun élément, ainsi que toute autre variété qui n'est pas égale à $0 \equiv (0, 0, 0 \ldots)$.

N 3.

La relation primitive „A est conjoint de B" est désignée par $A \asymp B$.

Groupe d'axiomes *B*

I. *Si* $A \asymp B$, *on a* $B \asymp A$ *aussi*

on dit tout simplement que les variétés A et B sont conjointes.

$\mathrm{II}_{1,2}$. $$0 \not\asymp A$$

$$0 \neq A \prec B \ \textit{entraine}\ A \asymp B.$$

(*) „Les axiomes de la Théorie des probabilités" (Commun. de la Soc. Math. de Kharkow, T. XV, N 5—6, p. 245).

En particulier, on a, A étant non nulle, $A \asymp \Omega$, $A \asymp A$.

III. *Les relations,* $A \asymp B$, $A^* \succ A$ *entraînent* $A^* \asymp B$.

Donc, si $A \asymp B$, $A^* \succ A$, $B^* \succ B$, on a $A^* \asymp B^*$ (I et III).

Si $AB \neq 0$, on a $A \asymp B$ (II et III).

IV. *Si* $A \asymp B + C$, *on a l'une des relations (au moins)*

$$A \asymp B \quad ou \quad A \asymp C.$$

Il s'ensuit: si $A \asymp B_1 + B_2 + \cdots + B_n$ (somme finie!), on a $A \asymp B_k$, k étant un (au moins) des nombres $1, 2 \ldots n$.

Les propositions suivantes sont conséquences de III et IV:

1) De $A \divideontimes B$, $A^* \prec A$, $B^* \prec B$ il suit $A^* \divideontimes B^*$,

2) De $A \divideontimes B$, $A \divideontimes C$ il suit $A \divideontimes B + C$.

Considérons le cas spécial (qui est le plus important) de la classe de variétés élémentaires. Supposons que la notion de la limite d'une suite d'éléments $[A_n]$ est introduite jouissant de deux propriétés suivantes: 1°. si l'élément A est la limite de la suite $[A_n]$, il est aussi la limite de chaque suite partielle $[A_{p_n}]$; 2°. l'élément A est la limite de la suite $[A]$ dont tous les termes sont égaux à A. On définit, comme d'habitude, la variété (ou ensemble) dérivée A', ainsi que les dérivées d'ordres supérieurs finis on transfinis.

Sauf indication contraire, dans ce cas spécial la relation $A \asymp B$ est interprétée comme équivalente à la relation

$$AB + AB' + A'B \neq 0,$$

ce qui signifie: ou bien les ensembles A et B ont un élément commun ou bien il existe un élément-limite de l'un de ces ensembles qui fait partie de l'autre.

D'ailleurs, on pourrait interpréter la relation $A \asymp B$ comme équivalente à

$$A(B + B' + B'' + \cdots + B^{(\lambda)}) + B(A + A' + A'' + \cdots + A^{(\lambda)}) \neq 0$$

ou

$$(A + A' + A'' + \cdots + A^{(\lambda)})(B + B' + B'' + \cdots + B^{(\lambda)}) \neq 0,$$

λ désignant un nombre quelconque fini ou transfini.

N 4.

Revenons au cas général.

La variété A est appelée c o n n e x e, si elle n'est pas la somme de deux variétés non nulles et non conjointes, c'est-à-dire si des relations

$$A = X + Y, \quad X \divideontimes Y$$

il suit ou bien $X = 0$ ou bien $Y = 0$.

Il est évident que chaque élément est connexe, 0 aussi est connexe.

Théorème 1. S i l a v a r i é t é c o n n e x e A f a i t p a r t i e d e $X + Y$, o ù $X \divideontimes Y$, on a o u b i e n $A \prec X$ o u b i e n $A \prec Y$.

Dém. De $A \prec X + Y$ on déduit $A = AX + AY$. Puisque $X \divideontimes Y$, $AX \prec X$, $AY \prec Y$, on a $AX \divideontimes AY$. Or, A étant connexe, l'une des variétés AX et AY est égale à 0. Soit $AY = 0$. Alors $A = AX \prec X$.

Théorème 2. Si les variétés connexes A et B sont conjointes, leur somme $A \dotplus B$ est connexe.

Dém. Soit $A \dotplus B$ non connexe: $A \dotplus B = X + Y$, $X \divideontimes Y$, $X \neq 0$, $Y \neq 0$. En vertu du th. 1 on a ou bien $A \prec X$ ou bien $A \prec Y$. Soit $A \prec X$. De même on a ou bien $B \prec X$ ou bien $B \prec Y$. En admettant que $B \prec X$, on obtiendrait $A \dotplus B \prec X$, $Y = 0$. Soit, donc, $B \prec Y$. Alors, de $A \prec X$ et $X \divideontimes Y$ il s'ensuit $A \divideontimes B$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Théorème 3. Soit **A** une classe de variétés connexes (dont le nombre est > 1). Si $\Sigma = \Sigma \cdot (\mathbf{A})$ n'est pas connexe, on peut séparer des variétés de la classe **A** en deux classes $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ (toutes deux non vides) d'une telle manière que deux variétés A_1 et A_2 appartenant aux classes différentes soient toujours non conjointes.

Dém. En effet, soit $\Sigma = X + Y$, $X \divideontimes Y$, $X \neq 0$, $Y \neq 0$. Chaque variété A de **A** fait partie ou bien de X ou bien de Y. Soit $\mathbf{A}_1$ la classe de variétés A qui font partie de X; de même, $\mathbf{A}_2$ la classe de variétés A qui font partie de Y. Si, par exemple, la classe $\mathbf{A}_2$ était vide, on aurait $Y = 0$. Soient A_1 une variété de la classe $\mathbf{A}_1$, A_2 une variété de la classe $\mathbf{A}_2$. Puisque $A_1 \prec X$, $A_2 \prec Y$, $X \divideontimes Y$, on a $A_1 \divideontimes A_2$.

Théorème 4. Inversement, soit **A** une classe **finie** de variétés connexes et non nulles; si l'on peut séparer **A** en deux classes non vides de la manière indiquée dans le théorème précédent, alors $\Sigma = \Sigma \cdot (\mathbf{A})$ n'est pas connexe.

Dém. On pose $X = \Sigma \cdot (\mathbf{A}_1)$, $Y = \Sigma \cdot (\mathbf{A}_2)$ et applique l'axiome IV *B*.

La généralisation au cas de la classe **A** infinie n'est pas possible, comme l'exemple d'un ensemble continu quelconque de E_n le montre.

La classe de variétés **A** est dite monotone s'il existe la relation d' inclusion entre deux variétés quelconques lui appartenant, c'est-à-dire si, quelles que soient A_1 et A_2 de **A**, on a ou bien $A_1 \prec A_2$ ou bien $A_1 \succ A_2$.

Théorème 5. Soit **A** une classe monotone de variétés connexes et non nulles. La somme $\Sigma = \Sigma \cdot (\mathbf{A})$ est connexe.

Dém. Dans le cas contraire, soient $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ deux classes construites d'après le th. 3. Soit A_1 une variété de $\mathbf{A}_1$, A_2 une variété de $\mathbf{A}_2$. Alors on a $A_1 \divideontimes A_2$, $A_1 A_2 = 0$. Puisque **A** est monotone on peut supposer $A_1 \prec A_2$. Par conséquent, $A_1 = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

N 5.

La variété U est dite composant de la variété A, si elle satisfait aux conditions suivantes: 1°. U est connexe, 2°. $U \neq 0$, 3°. $U \prec A$, 4°. Si $U \prec X \prec A$ et si X est connexe, on a $X = U$.

Théorème 1. Si la variété B connexe et non nulle fait partie de la variété A, il existe un composant de A qui contient B.

Dém. Soit $\mathbf{C}_B^A$ la classe de variétés connexes, contenant B et contenu par A: par exemple, B apartient à $\mathbf{C}_B^A$. On s'assure que $\Sigma = \Sigma(\mathbf{C}_B^A)$ est le composant de A qui contient B. En effet, Σ est connexe: autrement on séparerait la classe $\mathbf{C}_B^A$ en deux classes (th. 3 N 4) d'une telle manière que des variétés appartenant aux classes différentes ne soient pas conjointes, ce qui est impossible, puisque toutes les variétés de $\mathbf{C}_B^A$ contiennent une partie commune $B \neq 0$. On a $\Sigma \prec A$, puisque toutes les variétés de $\mathbf{C}_B^A$ font partie de A. Enfin, supposons X connexe et $\Sigma \prec X \prec A$. Alors $B \prec \Sigma \prec X$, et X appartient à $\mathbf{C}_B^A$; donc, $X \prec \Sigma$, d'où $X = \Sigma$ c. q. f. d. (*).

Il est évident que, inversement, si la variété n'a pas de parties connexes, elle n'a pas de components.

Théorème 2. Deux composants de A non égaux ne sont pas conjoints.

Dém. Soient U_1 et U_2 deux composants de A tels que $U_1 \asymp U_2$. En vertu du th. 2 N 4, $U_1 \dotplus U_2$ est connexe. Des relations $U_1 \prec U_1 \dotplus U_2 \prec A$, $U_2 \prec U_1 \dotplus U_2 \prec A$ on conclut, U_1 et U_2 étant composants de A: $U_1 \dotplus U_2 = U_1$, $U_1 \dotplus U_2 = U_2$, d'où $U_1 = U_2$.

Théorème 3. Une variété quelconque A est la somme de tous ses composants et d'une variété ne contenant pas de variétés connexes non nulles.

Dém. En désignant par $\mathbf{U}_A$ la classe des composants de A, on a $\Sigma(\mathbf{U}_A) \prec \mathrm{A}$. En posant $Z = \mathrm{A}\overline{\Sigma(\mathbf{U}_A)}$, on obtient $\mathrm{A} = \Sigma(\mathbf{U}_A) \dotplus Z$ et s'assure aisément qu'aucune partie non nulle de Z n'est connexe.

En particulier, les cas $Z = 0$ ou $\Sigma(\mathbf{U}_A) = 0$ ne sont pas exclus.

Nous réservons le nom de variété régulière à une variété qui est égale à la somme de ses composants;

$$\mathrm{A} = \Sigma(\mathbf{U}_A).$$

Toutes les variétés élémentaires sont régulières.

La proposition suivante est réciproque aux théorèmes 2—3.

Théorème 4. Soit $\mathbf{U}$ une classe de variétés connexes et non nulles. Posons $A = \Sigma(\mathbf{U})$. Si l'on a $U \divideontimes A\overline{U}$ quelle que soit la variété U de la classe $\mathbf{U}$, la classe $\mathbf{U}$ est la classe de composants de A.

Dém. Si X est variété connexe, on déduit de $U \prec X \prec A$ que $X = U \dotplus X\overline{U}$, et, puisque $U \divideontimes A\overline{U}$ entraîne $U \divideontimes X\overline{U}$, U étant non nulle, on conclut $X\overline{U} = 0$, donc, $X \prec U$, $X = U$. Cela veut dire que U est un composant de A.

Inversement, soit V un composant de A. Puisque $V \prec A = \Sigma(\mathbf{U})$, on a $V = \Sigma(V\mathbf{U})$. Toutes les variétés de la classe $V\mathbf{U}$ ne peuvent pas être

(*) En renonçant à l'axiome II, A transfini on aurait à prendre ce théorème pour l'axiome nouveau.

nulles (car $V \neq 0$), donc soit $VU^* \neq 0$. Alors $V = VU^* + V\overline{U^*}$, et de $U^* \asymp A\overline{U^*}$, $VU^* \prec U^*$, $V\overline{U^*} \prec A\overline{U^*}$ on déduit, V étant connexe, $VU^* = 0$ (puisque $VU^* \neq 0$). Donc, $V = VU^*$, $V \prec U^* \prec A$. U^* étant connexe et V composant de A, on en conclut $V = U^*$ c. q. f. d.

Corollaire. En particulier, si U est une classe **finie** de variétés U non nulles, connexes, et que $U_1 \asymp U_2$, quelles que soient U_1 et U_2 de U ($U_1 \neq U_2$), U est la classe de composants de $A = \Sigma$(U).

Il suffit de se rappeler l'axiome IV B.

Théorème 5. Si U est un composant de A, et $B \asymp A$, U est composant de $A + B$ aussi.

Dém. Admettons $U \prec X \prec A + B$, X étant connexe. En vertu du th. 1 N 4 on conclut $X \prec A$, parce que de $X \prec B$ on déduirait $U \prec B$, tandis que $UB = 0$. Alors de $U \prec X \prec A$ il suit que $X = U$, puisque U est composant de A.

Théorème 6. Si U est un composant de $A + B$, et $U \prec A$, U est un composant de A aussi.

Dém. X étant connexe, $U \prec X \prec A + B$ entraîne $X = U$. A fortiori $U \prec X \prec A$ l'entraîne.

Soit B une partie connexe et non nulle de A. On désignera le composant de A qui contient B par U^A_B.

Théorème 7. B_1 et B_2 étant deux parties connexes et non nulles de A, s'il existe une variété connexe C telle que

$$B_1,\ B_2 \prec C \prec A,$$

B_1 et B_2 font partie d'un même composant de A:

$$U^A_{B_1} = U^A_{B_2}.$$

Dém. $U^A_{B_1} + C$ étant connexe (th. 2 N 4), on a $U^A_{B_1} \prec U^A_{B_1} + C \prec A$, d'où il suit $U^A_{B_1} + C = U^A_{B_1}$, $C \prec U^A_{B_1}$. De même $C \prec U^A_{B_2}$. Donc, $U^A_{B_1} U^A_{B_2} \neq 0$ et, enfin $U^A_{B_1} = U^A_{B_2}$ (th. 2 N 5).

Corollaire. B^* étant connexe, si $0 \neq B^* \prec U^A_B$, on a $U^A_{B^*} = U^A_B$. (On prend: $C = U^A_B$).

Théorème 8. B étant connexe et non nulle, la relation $B \prec A \prec A^*$ entraîne $U^A_B \prec U^{A^*}_B$.

Dém. $U^A_B + U^{A^*}_B$ étant connexe, de $U^{A^*}_B \prec U^A_B + U^{A^*}_B \prec A^*$ on déduit $U^A_B + U^{A^*}_B = U^{A^*}_B$, d'où il vient $U^A_B \prec U^{A^*}_B$.

Théorème 9. Soit $0 \neq Q \prec A$, A et Q étant supposées connexes. Alors, si U est un composant de $A\overline{Q}$, $A\overline{U}$ est connexe.

(Cette proposition est d'importance particulière pour la théorie qui va suivre).

Dém. Supposons que $A\overline{U}$ ne soit pas connexe:

$$A\overline{U} = X + Y,\quad X \asymp Y,\quad X \neq 0,\quad Y \neq 0.$$

Q étant connexe et faisant partie de $A\overline{U}$ (car $U \prec A\overline{Q}$), on a ou bien $Q \prec X$ ou bien $Q \prec Y$ (th. 1 N 4). Soit $Q \prec X$; alors $Y \prec A\overline{Q}$.

Considérons la variété $U+Y$. Elle ne peut être connexe: en effet, $U+Y$ étant connexe, de $U \prec U+Y \prec A\overline{Q}$ on déduirait $U+Y=U$, ce qui est incompatible avec $Y \neq 0$. Par conséquent, on peut poser:

$$U+Y=X_1+Y_1, \quad X_1 \divideontimes Y_1, \quad X_1 \neq 0, \quad Y_1 \neq 0.$$

Puisque U est connexe, nons avons ou bien $U \prec X_1$, ou bien $U \prec Y_1$ (th. 1 N 4). Soit $U \prec X_1$. Donc, $Y_1 \prec Y$, et de $X \divideontimes Y$ il suit $X \divideontimes Y_1$.

On a, plus loin:

$$A=U+A\overline{U}=U+(X+Y)=X+(U+Y)=X+(X_1+Y_1)=(X+X_1)+Y_1.$$

En vertu de l'axiome IV B les relations $X \divideontimes Y_1$, $X_1 \divideontimes Y_1$ ont pour conséquence $X+X_1 \divideontimes Y_1$. Puisque $X+X_1 \neq 0$, $Y_1 \neq 0$, A n'est pas connexe, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc, $A\overline{U}$ est connexe.

Immédiatement, on obtient la généralisation suivante.

Théorème 10. Soient A et Q deux variétés connexes telles que $0 \neq Q \prec A$. Alors, si Σ est la somme d'une classe **finie** de composants de $A\overline{Q}$, $A\overline{\Sigma}$ est connexe.

Ce n'est pas le cas pour une classe infinie, comme l'exemple suivant va le montrer. Considérons le plan Euclidien. A soit formé: 1) du segment $Q(0 \leqslant x \leqslant 1,\ y=0)$, 2) des segments $U_n(x=a_n,\ 0<y\leqslant 1,\ 1 \geqslant a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots,\ \lim a_n=0,\ n=1, 2, 3 \cdots)$, 3) du point $P(x=0,\ y=1)$. Ainsi l'on a $A=Q+\sum_{n=1}^{\infty} U_n+P$. Il est aisé de s'assurer que A est connexe. Les segments U_n sont composants de $A\overline{Q}$ (ainsi que le point P). Cependant $A\overline{\sum_1^{\infty} U_n}=Q+P$ n'est pas connexe.

N 6.

On dit que Q est situé entre P et R dans A, si les conditions suivantes sont satisfaites: 1°. $P, Q, R \neq 0$, 2°. P, Q, R sont connexes, 3°. $PQ=QR=RP=0$, 4°. $P, Q, R \prec A$, 5°. $U_P^A=U_R^A$, 6°. $U_P^{A\overline{Q}} \neq U_R^{A\overline{Q}}$.

On représentera ce fait par la notation:

$$P|Q|R(A).$$

Il est évident que les relations $P|Q|R(A)$ et $R|Q|P(A)$ sont équivalentes.

Théorème 1. La relation $P|Q|R(A)$ implique $U_P^A=U_Q^A=U_R^A$.

Dém. D'après 5° on a $U_P^A=U_R^A=U$. Soit $U_Q^A \neq U$. Alors $U_Q^A U=0$ (th. 2 N 5), donc $QU=0$, $U \prec A\overline{Q}$. Puisque $P, R \prec U$, on a $U_P^{A\overline{Q}}=U_R^{A\overline{Q}}$ (th. 7 N 5) ce qui est incompatible avec l'hypothèse $P|Q|R(A)$.

Théorème 2. P^* étant une variété connexe, telle que $0 \neq P^* \prec A$, $P^*Q=P^*R=0$, $P^* \times P$, la relation $P|Q|R(A)$ entraîne $P^*|Q|R(A)$.

Dém. D'abord, on a $U_{P^*}^A = U_R^A$. En effet, puisque $P \dotplus P^*$ est connexe, le th. 7 N 5 nous donne $U_{P^*}^A = U_P^A$, d'où il suit $U_{P^*}^A = U_R^A$, puisque $U_P^A = U_R^A$. De même $U_{P^*}^{A\overline{Q}} = U_P^{A\overline{Q}}$, et de $U_P^{A\overline{Q}} \neq U_R^{A\overline{Q}}$ on conclut $U_{P^*}^{A\overline{Q}} \neq$ $\neq U_R^{A\overline{Q}}$.

Théorème 3. Q^* étant connexe, telle que $Q \prec Q^* \prec A$, $Q^*P = Q^*R = 0$, la relation $P|Q|R(A)$ entraîne $P|Q^*|R(A)$.

Dém. Du théorème 8 N 5 il résulte: $U_P^{A\overline{Q}^*} \prec U_P^{A\overline{Q}}$, puisque $P \prec \overline{AQ}^* \prec$ $\prec \overline{AQ}$. De même, $U_R^{A\overline{Q}^*} \prec U_R^{A\overline{Q}}$. Donc, $U_P^{A\overline{Q}} \neq U_R^{A\overline{Q}}$ entraînant $U_P^{A\overline{Q}} \ast U_R^{A\overline{Q}}$ (th. 2 N 5), on a $U_P^{A\overline{Q}^*} \ast U_R^{A\overline{Q}^*}$, d'où $U_P^{A\overline{Q}^*} \neq U_R^{A\overline{Q}^*}$.

Théorème 4. B étant supposée connexe, telle que $B \prec A$, $P, Q, R \prec B$, la relation $P|Q|R(A)$ entraîne $P|Q|R(B)$.

Dém. De $U_P^{A\overline{Q}} \ast U_R^{A\overline{Q}}$, $U_P^{B\overline{Q}} \prec U_P^{A\overline{Q}}$, $U_R^{B\overline{Q}} \prec U_R^{A\overline{Q}}$ on conclut $U_P^{B\overline{Q}} \ast$ $\ast U_R^{B\overline{Q}}$, d'où il suit $U_P^{B\overline{Q}} \neq U_R^{B\overline{Q}}$.

Théorème 5. Chacune des relations

$$P|Q|R(A), \quad Q|R|P(A), \quad R|P|Q(A)$$

est incompatible avec une autre.

Dém. On s'appuie sur le th. 9 N 5.

Soit $P|Q|R(A)$. Posons: $U_P^A = U_R^A = B$. Si $U_Q^A \neq B$, les relations $Q|R|P(A)$ et $R|P|Q(A)$ n'ont pas lieu, puisque $U_Q^A \neq U_P^A$, $U_Q^A \neq U_R^A$.

Supposons donc: $U_P^A = U_Q^A = U_R^A = B$. Alors on a $P|Q|R(B)$ (th. 4).

Soit, pour abréger, $U_P^{B\overline{Q}} = U$, $U_R^{B\overline{Q}} = U^*$.

En vertu du th. 9 N 5 $B\overline{U}$ est connexe.

Puisque $P \prec U$, on a $B\overline{U} \prec B\overline{P}$.

D'un autre côté $R \prec U^*$, et puisque $UU^* = 0$, on a $R \prec B\overline{U}$.

Enfin, de $U \prec B\overline{Q}$ résulte $Q \prec B\overline{U}$.

Donc, $U_Q^{B\overline{P}} = U_R^{B\overline{P}}$ (th. 7 N 5).

Cela veut dire que la relation $R|P|Q(B)$ n'a pas lieu.

Par conséquent, la relation $R|P|Q(A)$ n'a pas lieu aussi (th. 4).

De même, on démontre l'impossibilité de $Q|R|P(A)$.

Théorème 6. Etant donné $B \succ A$, de $P|Q|R(A)$ résulte $P|Q|R(B)$ ou bien il n'existe aucune des relations

$$P|Q|R(B), \quad Q|R|P(B), \quad R|P|Q(B).$$

Si, en outre, A est un composant de B, on a nécessairement $P|Q|R(B)$.

Dém. En effet, de $Q|R|P(B)$ on déduirait, par exemple, $Q|R|P(A)$ (th. 3) ce qui est incompatible avec $P|Q|R(A)$.

Soit A un composant de B. Supposons que la relation $P|Q|R(B)$ n'est pas satisfaite. Alors $U_P^{B\overline{Q}} = U_R^{B\overline{Q}} = U \prec A$, donc $U \prec A\overline{Q}$. Puisque $P, R \prec U \prec A\overline{Q}$, U étant connexe, on en conclut $U_P^{A\overline{Q}} = U_R^{A\overline{Q}}$ (th. 7 N 5) ce qui est incompatible avec $P|Q|R(A)$.

R e m a r q u e. Dans les théorèmes suivants, la variété A étant supposée toujours la même, on écrira tout simplement $P|Q|R$ au lieu de $P|Q|R(A)$.

Théorème 7. S étant supposée connexe, telle que $0 \neq S \prec A$, $PS = QS = RS = 0$, $U_S^A = U_P^A$, la relation $P|Q|R$ entraîne l'une des relations $P|Q|S$ ou $R|Q|S$ (au moins).

Dém. D'abord, la condition 5° est remplie: $U_S^A = U_P^A = U_R^A$. En supposant les relations $P|Q|S$ et $R|Q|S$ non satisfaites, on aurait $U_P^{A\bar{Q}} = U_S^{A\bar{Q}}$ $U_R^{A\bar{Q}} = U_S^{A\bar{Q}}$; donc, on en déduirait $U_P^{A\bar{Q}} = U_R^{A\bar{Q}}$, c'est-à-dire $P|Q|R$ ne serait pas satisfaite.

Théorème 8. Si $P|Q|R$ et $Q|R|S$, on a $P|R|S$ et $P|Q|S$.

Dém. On a $PS = 0$. Autrement $P + S$ serait connexe, et l'on conclurait $P + S|Q|R$ et $Q|R|P + S$ (th. 2) ce qui est impossible en vertu du th. 5.

On déduit du th. 1: $U_P^A = U_Q^A = U_R^A = U_S^A$.

Puisque $P|Q|R$ est satisfaite, $P|R|Q$ ne l'est pas (th. 5). Donc, $U_P^{A\bar{R}} = U_Q^{A\bar{R}}$. D'un autre côté, $Q|R|S$ entraîne $U_Q^{A\bar{R}} \neq U_S^{A\bar{R}}$. Il en résulte $U_P^{A\bar{R}} \neq U_S^{A\bar{R}}$, d'oú il suit $P|R|S$.

On obtient $P|Q|S$ par le même raisonnement après qu'on change de place les relations $P|Q|R$ et $Q|R|S$.

Théorème 9. Si $P|Q|R$ et $Q|S|R$, on a $P|S|R$ et $P|Q|S$.

Dém. On démontre comme dans le théorème précédent: $PS = 0$, $U_P^A = U_Q^A = U_R^A = U_S^A$.

Posons $U_Q^{A\bar{S}} = U$, $U_R^{A\bar{S}} = U^*$. On a $UU^* = 0$, d'où il résulte $QU^* = 0$, $U^* \prec A\bar{Q}$.

Admettons que $P|S|R$ n'a pas lieu. Alors $U_P^{A\bar{S}} = U_R^{A\bar{S}} = U^*$. Donc, $P \prec U^*$, $R \prec U^*$.

En vertu du th. 7 N 5 on obtient $U_P^{A\bar{Q}} = U_R^{A\bar{Q}}$, c'est-à-dire la relation $P|Q|R$ n'est pas satisfaite, contrairement à l' hypothèse. Donc, on a $P|S|R$.

D' autre part, de $P|Q|R$ on déduit ou bien $P|Q|S$ ou bien $R|Q|S$ (th. 7) Mais $R|Q|S$ est incompatible avec $Q|S|R$ (th. 5); donc, on a $P|Q|S$.

Théorème 10. Soit $QS = 0$. Si $P|Q|R$ et $P|S|R$, on a ou bien $P|S|Q$ et $S|Q|R$ ou bien $P|Q|S$ et $Q|S|R$.

Dém. On a d'abord: $U_P^A = U_Q^A = U_R^A = U_S^A$.

De $P|Q|R$ on déduit, en vertu du th. 7: ou bien $P|Q|S$ ou bien $R|Q|S$. De même, en partant de la relation $P|S|R$, on obtient ou bien $P|S|Q$ ou bien $R|S|Q$. Les relations $P|Q|S$ et $P|S|Q$ étant incompatibles (th. 5), ainsi que $R|Q|S$ et $R|S|Q$, il reste à prendre ou bien $P|Q|S$ et $R|S|Q$ ou bien $R|Q|S$ et $P|S|Q$.

Théorème 11. Si les relations $P|Q|R$, $S|Q|R$ sont remplies, la relation $P|R|S$ ne l'est pas.

Dém. En effet, de $P|R|S$ et $R|Q|S$ il résulte $P|R|Q$ (th. 9), ce qui est incompatible avec $P|Q|R$ (th. 5).

N 7.

Nous dirons que les variétés de la classe **P** sont alignées dans A, si, quelles que soint P_1, P_2, P_3 de **P** (non égales entre elles), l'une des relations.

$$P_1 | P_2 | P_3 (A), \quad P_2 | P_3 | P_1 (A), \quad P_3 | P_1 | P_2 (A)$$

est toujours satisfaite. On sait d'ailleurs que deux de ces relations ne peuvent subsister simultanément.

La classe **P** est dite ordonnée, si une définition de l'ordre est donnée au moyen de la relation $P_1 \subset P_2$ („P_1 précéde P_2"), telle que: 1° quelles que soient P_1 et P_2 $(P_1 \neq P_2)$ de **P**, on a ou bien $P_1 \subset P_2$ ou bien $P_2 \subset P_1$, et non simultanément, 2° $P_1 \subset P_2$ et $P_2 \subset P_3$ entraînent $P_1 \subset P_3$ (transitivité).

La relation $P_2 \supset P_1$ („P_2 suit P_1") est définie comme équivalente à $P_1 \subset P_2$.

Théorème. Si les variétés de la classe **P** sont alignées dans A, on peut définir les relations d'ordre dans la classe **P** d'une telle manière que $P_1 \subset P_2 \subset P_3$ entraîne $P_1 | P_2 | P_3 (A)$, quelles que soient P_1, P_2, P_3 de **P** (non égales entre elles). (Par conséquent, $P_1 | P_2 | P_3 (A)$ entraînera ou bien $P_1 \subset P_2 \subset P_3$ ou bien $P_3 \subset P_2 \subset P_1$).

Autrement dit, si les variétés de **P** sont alignées dans A, la relation à trois termes „être situé entre dans A" peut être réduite à une relation á deux termes „précéder".

On démontre le théorème en s'appuyant sur les théorèmes 8—10 du N 6.

En choisissant d'abord arbitrairement $\underset{\cdot}{P}$ et $\dot{P}$ de **P**, on pose arbitrairement aussi:

$$\underset{\cdot}{P} \subset \dot{P}.$$

On sépare toutes les variétés P de **P** autres que $\underset{\cdot}{P}$ et $\dot{P}$ en trois classes **P**', **P**'', **P**''' suivant que la relation $P | \underset{\cdot}{P} | \dot{P}$ ou $\underset{\cdot}{P} | P | \dot{P}$ ou $\underset{\cdot}{P} | \dot{P} | P$ est satisfaite (*). Chaque variété appartient á une seule des trois classes (th. 5 N 6). Admettons que P appartienne à **P**'. Alors, de $P | \underset{\cdot}{P} | \dot{P}$ il doit suivre ou bien $P \subset \underset{\cdot}{P} \subset \dot{P}$ ou bien $\dot{P} \subset \underset{\cdot}{P} \subset P$. Or, la dernière relation ne subsiste pas, puisque $\underset{\cdot}{P} \subset \dot{P}$; donc, on a à poser $P \subset \underset{\cdot}{P}$, $P \subset \dot{P}$.

De même, on pose, P appartenant à **P**'': $P \supset \underset{\cdot}{P}$, $P \subset \dot{P}$, et, P appartenant à **P**''': $P \supset \underset{\cdot}{P}$, $P \supset \dot{P}$.

(*) Il n'est pas exclu que certaines des classes **P**', **P**'', **P**''' soient vides.

Soient P_1 et P_2 ($P_1 \neq P_2$) deux variétés de **P** autres que $\underset{\cdot}{P}$ et $\dot{P}$. On a à distinguer six cas suivant que P_1 et P_2 appartiennent à l' une ou l'autre des classes **P**′, **P**″, **P**‴, comme le tableau suivant le montre:

	P′	**P**″	**P**‴
1	● ●		
2		● ●	
3			● ●
4	●	●	
5		●	●
6	●		●

Considérons d'abord le cas 4: soit P_1 la variété appartenant à **P**′, P_2 — celle appartenant à **P**″. On a $P_1 \subset \underset{\cdot}{P}$, $\underset{\cdot}{P} \subset P_2$; donc, pour satisfaire à la transitivité, on posera $P_1 \subset P_2$.

En général, P_1 et P_2 appartenant à des classes différentes (cas 4, 5, 6) on a à poser $P_1 \subset P_2$ ou $P_2 \subset P_1$ suivant que l'indice de la classe à laquelle appartient P_1 est supérieur ou inférieur à celui de la classe à laquelle appartient P_2.

Dans le cas 1 on a $P_1 | \underset{\cdot}{P} | \dot{P}$ et $P_2 | \underset{\cdot}{P} | \dot{P}$; donc, $P_1 | \dot{P} | P_2$ n'est pas satisfaite (th. 11 N 6). Par conséquent, on a ou bien $P_1 | P_2 | \dot{P}$ ou bien $P_2 | P_1 | \dot{P}$. Soit, pour fixer les idées, $P_1 | P_2 | \dot{P}$ ce qui entraîne $P_1 | P_2 | \underset{\cdot}{P}$ (th. 9). Il doit en suivre ou bien $P_1 \subset P_2 \subset \dot{P}$ ou bien $P_1 \supset P_2 \supset \dot{P}$; le dernier étant impossible, puisque P_1 et P_2 appartiennent à **P**′, on pose nécessairement $P_1 \subset P_2$.

De même, dans le cas 3 on a ou bien $\underset{\cdot}{P} | P_1 | P_2$ ou bien $\underset{\cdot}{P} | P_2 | P_1$. On pose (respectivement) $P_1 \subset P_2$ ou $P_2 \subset P_1$.

Enfin, dans le cas 2 de $\underset{\cdot}{P} | P_1 | \dot{P}$ et $\underset{\cdot}{P} | P_2 | \dot{P}$ on déduit ou bien $\underset{\cdot}{P} | P_1 | P_2$, $P_1 | P_2 | \dot{P}$ ou bien $\underset{\cdot}{P} | P_2 | P_1$, $P_2 | P_1 | \dot{P}$; on a à poser (resp.) $P_1 \subset P_2$ ou $P_2 \subset P_1$.

On a défini ainsi une relation $P_1 \subset P_2$ ou $P_2 \subset P_1$ entre P_1 et P_2, P_1 et P_2 étant soumis à une seule condition $P_1 \neq P_2$. Nous avons à vérifier maintenant que 1) cette relation est transitive, 2) de $P_1 \subset P_2 \subset P_3$ il suit $P_1 | P_2 | P_3$.

Evidemmeut, il suffit de supposer que P_1, P_2, P_3 sont autres que P et $\dot{P}$. Dix cas sont possibles, indiqués par le tableau suivant:

	P′	P″	P‴
1	• • •		
2		• • •	
3			• • •
4	• •	•	
5	• •		•
6	•	• •	
7		• •	•
8	•		• •
9		•	• •
10	•	•	•

Dans les cas 1, 2, 4, 6, soit $P_1 \subset P_2$, $P_2 \subset P_3$, c'est-à-dire $P_1 | P_2 | \dot{P}$, $P_2 | P_3 | \dot{P}$. Donc, $P_1 | P_2 | P_3$ et $P_1 | P_3 | \dot{P}$ (th. 9), la dernière relation ayant pour conséquence $P_1 \subset P_3$.

Les cas 3, 2, 9, 7 se laissent traiter d' une manière semblable.

Dans les cas 5, 10 soit $P_1 \subset P_2 \subset \dot{P}$; P_1, $P_2 \subset \dot{P} \subset P_3$. De là on déduit $P_1 | P_2 | \dot{P}$, $P_1 | \dot{P} | P_3$, $P_2 | \dot{P} | P_3$. En vertu des th. 8 ou 9 on en obtient $P_1 | P_2 | P_3$ et $P_1 | \dot{P} | P_3$, ou $P_1 \subset P_3$.

De même, dans les cas 8, 10.

R e m a r q u e. En revoyant la démonstration précédente, on s'aperçoit que, P et $\dot{P}$ étant choisis arbitrairement et la relation $P \subset \dot{P}$ étant imposée, toutes les autres relations en sont conséquences nécessaires. Il est évident qu'en changeant le sens de la relation initiale, c'est-à-dire en posant $P \supset \dot{P}$, on aurait à changer le sens de toutes les autres relations. On s'assure que, quel que soit le choix de deux variétés initiales P et $\dot{P}$, on vient toujours à l'une de ces deux systèmes de relations. Donc: c'est de deux manières différentes qu'il est possible d'ordonner (ou orienter) la classe P. Toutes les relations d'ordre changent de sens en passant de l' une orientation à l'autre.

N 8.

Une variété L s'appelle variété linéaire (ou ligne) simple si: 1°. chaque variété connexe P (qui n'est pas élément) telle que $0 \neq P \prec L$ contient une partie connexe Q telle que $Q \neq 0$, $Q \neq P$, 2°. P et Q étant parties connexes de L, $Q\bar{P}$ est une variété régulière (N 5), 3°. L est connexe, 4°. quelle que soit la classe **P**, satisfaisant aux conditions énumerées au début du N 7 (en remplaçant A par L), les variétés de cette classe sont alignées dans L. D' ailleurs, en vertu du théorème du N 7, il est suffisant à supposer (condition 4°) que les variétés des classes formées par trois variétés soient alignées dans L.

Théorème 1. Une partie connexe de la variété linéaire est aussi linéaire.

Pour la démonstration il suffit de se rappeler le th. 4 N 6.

Théorème 2. L étant linéaire et une variété connexe Q^* satisfaisant á la condition $0 \neq Q^* \prec Q$, de $P|Q|R(L)$ il suit $P|Q^*|R(L)$.

Dém. Puisque P, Q^*, R sont alignées dans L, l'une des relations

$$P|Q^*|R(L), \quad Q^*|R|P(L), \quad R|P|Q^*(L)$$

est satisfaite. Cependant $Q^*|R|P(L)$ (resp. $R|P|Q^*(L)$) entraînerait $Q|R|P(L)$ (resp. $R|P|Q(L)$ (th. 2 N 6) ce qui est incompatible avec $P|Q|R(L)$ (th. 5 N 6). Donc, on a $P|Q^*|R(L)$.

Théorème 3. P étant une partie connexe et non nulle de la variété linéaire L, $L\bar{P}$ est connexe ou bien consiste de deux components.

Dém. D'apres 2°, $L\bar{P}$ est régulière. Soient U_1, U_2, U_3 — trois components de $L\bar{P}$. Alors on a

$$U_1|P|U_2(L), \quad U_2|P|U_3(L), \quad U_3|P|U_1(L).$$

D'autre part, U_1, U_2, U_3 étant alignées dans L, on a l'une des relations

$$U_1|U_2|U_3(L), \; U_2|U_3|U_1(L), \quad U_3|U_1|U_2(L),$$

soit la première. Alors (en vertu du th. 9 N 6) on a:

$$P|U_2|U_3(L),$$

ce qui est incompatible avec $U_2|P|U_3(L)$.

Une partie S non nulle et connexe de L soit appelée segment de L, si $L\bar{S}$ est connexe et non nulle. Pour que S soit un segment de L, il est nécessaire et suffisant que les conditions suivantes soient satisfaites: 1°. $S \neq 0$, $S \neq L$, 2°. S est connexe, 3°. $S \prec L$, 4°. S n'est pas entre deux variétés dans L. Il est évident que, S étant un segment de L, $L\bar{S}$ l'est aussi.

S'il existe deux components de $L\bar{P}$, P étant supposée une partie connexe et non nulle de L, on les désignera par P' et P''.

Théorème 4. Si la variété linéaire L n'est pas un élément (ce qui n'est pas exclu par la définition), elle contient des segments. En particulier, P étant une partie connexe (non segment de L) et non nulle de L, P' et P'', ainsi que $P+P'$ et $P+P''$ sont des segments de L.

Dém. D' après 1°, L contient une partie connexe P telle que $P \neq 0$, $P \neq L$. Supposons que P n' est pas un segment de L. Pour s' assurer que $P+P'$ et $P+P''$ sont connexes, il suffit de se rapporter au th. 9 N 5.

Si S_1, S_2, S_3 sont des segments de L, il est impossible que les relations $S_1S_2 = S_2S_3 = S_3S_1 = 0$ soient satisfaites (on obtiendrait alors l'une des relations $S_1 | S_2 | S_3 (L)$, $S_2 | S_3 | S_1 (L)$, $S_3 | S_1 | S_2 (L)$. De plus, on démontre la proposition suivante.

Théorème 5. S_1, S_2, S_3 étant des segments de L, l' une (au moins) des relations de l'inclusion

$$S_2 \prec S_3 \quad S_3 \prec S_1 \quad S_1 \prec S_2$$
$$S_3 \prec S_2 \quad S_1 \prec S_3 \quad S_2 \prec S_1$$

est satisfaite.

Dém. Remarquons d'abord que, si un segment S contient une partie connexe P (non segment) de L, on a ou bien $S \succ P'$ ou bien $S \succ P''$. En effet, $S \succ P$ entraîne $A\overline{S} \prec A\overline{P} = P' + P''$. Puisque $P' \not\prec\!\!\succ P''$, on a ou bien $A\overline{S} \prec P'$ ou bien $A\overline{S} \prec P''$ (th. 1 N 4). Soit $A\overline{S} \prec P'$. Alors $S \succ P + P'' \succ P''$.

Admettons maintenant qu'aucune des six relations ci-dessus n'est satisfaite, c'est-á-dire soit

$$S_i \not\prec S_j \ (i, j = 1, 2, 3 \ ; \ i \neq j).$$

Alors $S_i\overline{S}_j \neq 0$. En vertu de la condition 2°, $S_i\overline{S}_j$ est régulière. Donc $S_i\overline{S}_j$, contient une variété P_{ij} connexe et non nulle. On a, par conséquent:

$$P_{ij} \prec S_i \qquad (i, j = 1, 2, 3; \ i \neq j) \tag{1}$$
$$P_{ij}S_j = 0 \tag{2}$$

Conformément au th. 3:

$$L = P_{ij} + P'_{ij} + P''_{ij}$$

(où l' on convient de poser $P''_{ij} = 0$ si P_{ij} est segment de L). D'après la remarque faite plus haut on peut supposer:

$$S_i \succ P''_{ij}. \tag{3}$$

La relation (2) fournit $S_j \prec P'_{ij} + P''_{ij}$, d'où il suit ou bien $S_j \prec P'_{ij}$ ou bien $S_j \prec P''_{ij}$ (th. 1 N 4). Si $S_j \prec P''_{ij}$, on a, à cause de (3): $S_j \prec S_i$, et le théorème est démontré.

Il reste à supposer:

$$S_j \prec P'_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3; \ i \neq j) \tag{4}$$

(1) et (4) donnent en particulier:

$$P_{12} \prec S_1 \prec P'_{31}$$
$$P_{23} \prec S_2 \prec P'_{12}, \qquad (5)$$
$$P_{31} \prec S_3 \prec P'_{23},$$

d'où il suit que $P_{12}P_{31} = P_{23}P_{12} = P_{31}P_{23} = 0$. On en conclut que P_{12}, P_{23}, P_{31} sont alignées dans L, ce qui entraîne l'une des relations $P_{12}|P_{23}|P_{31}(L)$, $P_{23}|P_{31}|P_{12}(L)$, $P_{31}|P_{12}|P_{23}(L)$. Supposons, par exemple, que c'est la première qui a lieu: $P_{12}|P_{23}|P_{31}(L)$. Cela veut dire que P_{12} et P_{31} font partie de deux components différents de $L\overline{P}_{23}$. Puisque $P_{31} \prec P'_{23}$ (à cause de (5)), on a $P_{12} \prec P''_{23}$. On en conclut, à l'aide de $P''_{23} \prec S_2$ (3), que $P_{12} \prec S_2$. La relation dernière est en contradiction avec $P_{12}S_2 = 0$ (2). Donc, la supposition (4) est à rejeter.

Théorème 6. Si S_1 et S_2 sont deux segments de L tels que $S_1 \not\prec S_2$, $S_2 \not\prec S_1$, l'une (au moins) des relations

$$S_1S_2 = 0, \quad S_1 \dotplus S_2 = L$$

est satisfaite.

Dém. Considérons trois segments S_1, S_2 et $L\overline{S}_1$. Puisque les relations

$$S_1 \prec S_2, \quad S_1 \prec L\overline{S}_1$$
$$S_2 \prec S_1, \quad L\overline{S}_1 \prec S_1$$

ne sont pas satisfaites, ou a, en vertu du théorème précédent, ou bien $S_2 \prec L\overline{S}_1$, ou bien $L\overline{S}_1 \prec S_2$, ce qui revient (resp.) à $S_1S_2 = 0$ ou $S_1 \dotplus S_2 = L$.

Théorème 7. S'il existe une relation de l'inclusion entre les segments S_1 et S_2, ainsi que entre les segments S_2 et S_3, il en existe une entre S_1 et S_3 aussi.

Dém. Quatre cas sont possibles: 1) $S_1 \prec S_2$, $S_2 \prec S_3$, 2) $S_1 \prec S_2$, $S_2 \prec S_3$ 3) $S_1 \prec S_2$, $S_2 \prec S_3$, 4) $S_1 \succ S_2$, $S_2 \prec S_3$. Il suffit de considérer les cas 3 — 4.

Dans le cas 3 supposons que $S_1 \not\prec S_3$, $S_3 \not\prec S_1$. Alors on a ou bien $S_1S_3 = 0$ ou bien $S_1 \dotplus S_3 = L$ (th. 6). Si $S_1S_3 = 0$, il n'existe pas de relations de l'inclusion entre les segments S_1, S_3, $L\overline{S}_2$ ce qui est en contradiction avec le th. 5. Si $S_1 \dotplus S_3 = L$, on conclut $S_2 \succ S_1 \dotplus S_3 = L$, $S_2 = L$, donc S_2 n'est pas un segment.

Le cas 4 se ramène au cas 3, car $S_1 \succ S_2$ est équivalent à $L\overline{S}_2 \succ L\overline{S}_1$, $S_2 \prec S_3$ à $L\overline{S}_3 \prec L\overline{S}_2$.

Théorème 8. Soit S la classe de tous les segments de L. La classe S peut être séparée en deux classes S' et S'' telles qu'il existe ou non une relation de l'inclusion entre deux segments suivant qu'ils appartiennent à une même classe ou bien à des classes différentes.

C'est le corollaire des théorèmes 5 et 7.

Théorème 9. Les segments S' et S'' appartenant respectivement aux classes $\mathbf{S}'$ et $\mathbf{S}''$, $S'S''$ est connexe.

Dém. De la relation $S'S'' = S'\overline{LS''}$ ou conclut que $S'S''$ est régulière (2°). Soient U_1 et U_2 deux composants non égaux de $S'S''$, ainsi que $U_1 \divideontimes U_2$.

Si S'' appartient à la classe $\mathbf{S}''$, le segment $\overline{LS''}$ appartient à la classe $\mathbf{S}'$. Donc, on a ou bien $S' \prec \overline{LS''}$ ou bien $S' \succ \overline{LS''}$. Puisque $S'S'' \neq 0$, $S' \prec \overline{LS''}$ n'est pas possible, et, par conséquent, $S' \succ \overline{LS''}$. En se rappelant que $S'S'' = S'\overline{LS''}$, on obtient: $U_1 | \overline{LS''} | U_2 (S')$. Il en suit $U_1 | \overline{LS''} | U_2 (L)$, puisque de $U_1 | U_2 | \overline{LS''} (L)$, par exemple, on conclurait $U_1 | U_2 | \overline{LS''} (S')$. Or $U_1 | \overline{LS''} | U_2 (L)$ n'est pas possible, car $\overline{LS''}$ est un segment de L.

Donc, $S'S''$, étant régulière et ne contenant plus d'un composant, est connexe.

Théorème 10. S_1 et S_2 étant deux segments de L, tels que $S_1 \prec S_2$, S_1 est un segment de S_2.

Dém. En effet, en vertu du théorème précédent, $S_2\overline{S_1} = S_2 . L\overline{S_1}$ est connexe.

Théorème 11. Si $P | Q | R (L)$, S est connexe, $S < L$, $SP \neq 0$, $SR \neq 0$, on a $S \succ Q$.

Dém. Soit, au contraire, $Q\overline{S} \neq 0$. Puisque $Q\overline{S}$, $(= Q.L\overline{S})$, $S\overline{P}(= P.L\overline{S})$ $S\overline{R}(= R.L\overline{S})$ sont régulières (2°), on peut en extraire (resp.) des components U, V, W. $P | Q | R (L)$ a pour conséquence $V | U | W (L)$ (th. 2 N 6 et th. 2 N 8). La dernière relation, d'autre part, n'est pas possible, puisque, S étant connexe, de $V_1 \ W \prec S$ on conclut $U_V^{L\overline{U}} = U_W^{L\overline{U}}$ (th. 7 N 5).

Théorème 12. P_1 et P_2 étant parties connexes de L, P_1P_2 est connexe.

Dém. Soit $P_1P_2 \neq 0$.

1) Le théorème est démontré dans le cas où P_1 et P_2 sont des segments de L.

2) Soit $P_1 (= S)$, un segment de L, et $L = P_2 + P_2' + P_2''$, $P_2' \neq 0$, $P_2'' \neq 0$. Puisque $P_2 + P_2'$ et $P_2 + P_2''$ sont des segments de L (th. 4), $S(P_2 + P_2')$ et $S(P_2 + P_2'')$ sont connexes. Donc, si $SP_2' = 0$ ou $SP_2'' = 0$, le théorème est démontré. Supposons $SP_2' \neq 0$, $SP_2'' \neq 0$. Alors, se rappelant que $P_2' | P_2 | P_2'' (L)$, on conclut à l' aide du th. 11: $P_2 \prec S$. Par conséquent, $P_2S = P_2$ est connexe.

3) Passons au cas général. Soit $L = P_1 + P_1' + P_1''$. Puisque $P_1 + P_1'$ et $P_1 + P_1''$ sont des segments de L, $(P_1 + P_1') \ P_2$ et $(P_1 + P_1'') \ P_2$ sont connexes. Si $P_1'P_2 = 0$ ou $P_1''P_2 = 0$, le théorème est démontré. Soit $P_1'P_2 \neq 0$, $P_1''P_2 \neq 0$. Alors le th. 11 donne, puisque $P_1' | P_1 | P_1'' (L)$: $P_1 \prec P_2$, d'où il suit que $P_1P_2 (= P_1)$ est connexe.

Théorème 13. Soit $\mathbf{S}'_*$ une classe de segments de L qui appartiennent à la classe $\mathbf{S}'$. Alors $\Sigma = \Sigma(\mathbf{S}'_*)$ est un segment de la classe $\mathbf{S}'$ ou bien égale à L.

Dém. Σ est connexe en vertu du th. 5 N 4. Si l'on avait $\Sigma' | \Sigma | \Sigma'' (L)$, on aurait de même $\Sigma' | S_* | \Sigma'' (L)$, où S_* est un segment quelconque de la classe $\mathbf{S}'_*$, ce qui est en contradiction avec la définition du segment.

Théorème 14. Soit $\mathbf{S}'_*$ une classe de segments de L qui appartiennent à la classe $\mathbf{S}'$. Alors $\Pi = \Pi(\mathbf{S}'_*)$ est un segment de la classe $\mathbf{S}'$ ou bien est nulle.

Dém. Il suffit de remarquer que $L\overline{\Pi}$ est égale à la somme des segments de la classe $L\overline{\mathbf{S}'_*}$.

Théorème 15. $\mathbf{P}$ étant une classe de variétés connexes, faisant partie de L, $\Pi = \Pi(\mathbf{P})$ est connexe.

Dém. Soit $L = P + P' + P''$ ($P'' \neq 0$ ou $P'' = 0$), P étant une variété quelconque de $\mathbf{P}$, P' et P'' des segments des classes $\mathbf{S}'$ et $\mathbf{S}''$ respectivement. Soit $\mathbf{P}'$ la classe des segments P', $\mathbf{P}''$ celle de P''.

Il suffit de remarquer que $\Pi = L\overline{\Sigma(\mathbf{P}')} . L\overline{\Sigma(\mathbf{P}'')}$.

N 9.

Une variété A est dite irréductible entre M et N, si elle satisfait aux conditions 1°—3° du N 8 et, en outre, 4°. $A \asymp M$, $A \asymp N$, 5°. il n'existe aucune partie connexe B de A qui vérifie les relations $B \asymp M$, $B \asymp N$, $B \neq A$.

Théorème 1. Soit L une variété linéaire, jouissant de la propriété suivante: quels que soient des segments S' et S'' (appartenants aux classes $\mathbf{S}'$ et $\mathbf{S}''$ respectivement), on a:

$$S' \asymp M \quad S'' \asymp N$$
$$S' \not\asymp N \quad S'' \not\asymp M.$$

Alors L est irréductible entre M et N.

Dém. On a $L \asymp M$ (resp. $L \asymp N$), puisque $S' \asymp M$ (resp. $S'' \asymp N$). D'autre part, soit P une partie connexe de L. Si P est un segment de la classe $\mathbf{S}'$ (resp. $\mathbf{S}''$), on a $P \not\asymp N$ (resp. $P \not\asymp M$). Si P n'est pas un segment de L, posons $L = P + P' + P''$, $P' \neq 0$, $P'' \neq 0$. $P + P'$ (resp. $P + P''$) étant un segment de L de la classe $\mathbf{S}'$ (resp. $\mathbf{S}''$), on a $P + P' \not\asymp N$ $P + P'' \not\asymp M$. Donc, $P \not\asymp M$, $P \not\asymp N$.

Théorème 2. Soit A une variété irréductible entre M et N. Alors A est linéaire. Des segments de A satisfont au relations du théorème précédent.

Dém. Soient P_1, P_2, P_3 trois parties de A, connexes et non nulles, telles que $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_1 = 0$. Supposons qu'aucune des relations $P_1 | P_2 | P_3 (L)$, $P_2 | P_3 | P_1 (L)$, $P_3 | P_1 | P_2 (L)$ n'est satisfaite. Alors, posons:

$$U_{P_2}^{A\overline{P_1}} = U_{P_3}^{A\overline{P_1}} = U_1$$
$$U_{P_3}^{A\overline{P_2}} = U_{P_1}^{A\overline{P_2}} = U_2$$
$$U_{P_1}^{A\overline{P_3}} = U_{P_2}^{A\overline{P_3}} = U_3,$$

ce qui entraîne $P_i \prec U_j (i, j=1, 2, 3; i \neq j)$. On en conclut $A\overline{U}_j \prec A\overline{P}_i$, et puisque $P_j \prec A\overline{U}_j$, $A\overline{U}_j$ étant connexe (th. 9 N 5), on a $U^{A\overline{P}_i}_{A\overline{U}_j} = U^{A\overline{P}_i}_{P_j} = U_i$, d'où il suit $A\overline{U}_j \prec U_i$ $(i, j=1, 2, 3; i \neq j)$.

S'il était $U_1 \ast M$, $U_1 \ast N$, on obtiendrait $A\overline{U}_1 \times M$ (axiome IV B), de même $A\overline{U}_1 \times N$ ce qui, $A\overline{U}_1$ étant connexe, signifierait que A n'est pas irréductible. Donc, supposons, par exemple, $U_1 \times M$. Alors $U_1 \ast N$ à cause de l'irréducibilité de A. Par conséquent, $A\overline{U}_1 \times N$ (axiome IV): puisque $A\overline{U}_1 \prec U_2$, on a, plus loin: $U_2 \times N$. On continue de la manière semblable: $U_2 \ast M$, $A\overline{U}_2 \times M$, $U_3 \times M$, $U_3 \ast N$, $A\overline{U}_3 \times N$, $U_1 \times N$. La dernière relation, jointe à $U_1 \times M$, est en contradiction avec l'irréducibilité de A.

Donc, il reste à supposer que P_1, P_2, P_3 sont alignées dans A, c'est-à-dire A est linéaire.

Soient $\mathbf{S}'$ et $\mathbf{S}''$ deux classes de segments de A.

Un segment S'_* de la classe $\mathbf{S}'$ est conjoint à l'une des variétés M, N. En effet, de $S'_* \ast M$, $S'_* \ast N$ on déduirait que $L\overline{S}'_* \times M$, $L\overline{S}'_* \times N$ ce qui est impossible; de même, il faut rejeter $S'_* \times M$, $S'_* \times N$.

Soit $S'_* \times M$, $S'_* \ast N$. Alors $L\overline{S}'_*$ (de la classe $\mathbf{S}''$) satisfait aux relations: $L\overline{S}'_* \ast M$, $L\overline{S}'_* \times N$.

On s'assure sans peine qu'on a $S' \times M$, $S' \ast N$; $S'' \ast M$, $S'' \times N$, quels que soient les segments S' et S'' des classes $\mathbf{S}'$ et $\mathbf{S}''$ resp. (th. 8 N 8).

Il serait possible de prendre l'irréducibilité entre M et N pour la propriété définissant les variétés linéaires. Cependant l'irréducibilité entre M et N n'est pas une propriété intrinsèque de la variété considérée (voir le N 1). C'est pourquoi j'ai procédé autrement.

Il n'est pas nécessaire à insister sur le fait que l'irréducibilité ici définie n'est pas équivalente à l'irréducibilité de M. Zoretti, même pour le cas de l'espace Euclidien, ainsi que la notion de la ligne elle-même.

N 10.

Dans le cas où L est une variété connexe élémentaire, la condition nécessaire et suffisante pour que L soit linéaire consiste en ce que tous ses éléments soient alignées dans L.

Les démonstrations des théorèmes du N 8 sont simplifiées beaucoup dans ce cas. Le théorème du N 7 peut être appliqué à la classe E_L de tous les éléments de L. Un segment S de L peut être défini par ce qu'on appelle „Section de Dedekind".

Considérons le cas particulier de l'espace Euclidien E_n. On appelle ordinairement ligne simple de Jordan l'ensemble J de points de l'espace E_n homéomorphe (*) à l'un des intervalles $|(0 \leqslant t \leqslant 1)$, $\dot{|}(0 \leqslant t < 1)$, $\ddot{|}(0 < t < 1)$.

(*) Deux ensembles sont dits homéomorphes, s'il existe une correspondance biunivoque et bicontinue entre eux.

Ou s'assure aisément que *la ligne de Jordan est une variété linéaire dans le sens précisé dans le* N 8. Il est suffisant de le vérifier pour les intervalles $\mathbf{I}$, $\dot{\mathbf{I}}$, $\ddot{\mathbf{I}}$. Trois éléments $t=t_1$, $t=t_2$, $t=t_3$ étant donnés, soit, par exemple, $t_1<t_2<t_3$. Alors, en posant $U=(t<t_2)$, $V=(t>t_2)$, on a $t_1 \prec U$, $t_3 \prec V$, $U \ast V$, puisque $UV' \dotplus U'V \dotplus UV=0$. Donc, $t_1|t_2|t_3$ (1).

La notion de la variété linéaire est, cependant, plus large que celle de la ligne de Jordan. L'ensemble de points consistant de la courbe $y=\sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ et du point $x=y=0$ en donne la preuve.

Il est intéressant d'indiquer une classe des variétés linéaires qui, dans le cas de l'espace Euclidien, soit confondue avec la classe des lignes de Jordan.

Définition. Soit L une variété linéaire, P une partie connexe et non nulle quelconque de L. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux classes quelconques de variétés connexes et non nulles, faisant partie de L. Supposons, de plus, que, A étant une variété de $\mathbf{A}$, il existe toujours une variété B de $\mathbf{B}$, satisfaisant à la relation:

$$A|B|P(L).$$

Si, chaque fois que les conditions énumerées sont remplies, la relation $P \bowtie \Sigma(\mathbf{A})$ entraîne $P \bowtie \Sigma(\mathbf{B})$, *la variété* L *est appelée ligne simple de Jordan.*

Dans le cas où L est élémentaire il suffit de prendre pour $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux classes d'éléments.

Il est facile à vérifier que la ligne de Jordan au sens habituel satisfait à la définition ci-dessus. Il suffit de considérer les intervalles $\mathbf{I}$, $\dot{\mathbf{I}}$, $\ddot{\mathbf{I}}$. Soit $P=(t=p)$, $\mathbf{A}$ soit la classe de points $\{t=a\}$, $\mathbf{B}$ la classe de points $\{t=b\}$, telles que la relation $p<a$ (resp. $p>a$) entraîne l'existence d'un point b tel que $p<b<a$ (resp. $p>b>a$). Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=p$. Alors, en choisissant des points b_n d'une telle manière qu'il soit $p<b_n<a_n$ ou $p>b_n>a_n$ suivant que $p<a_n$ ou $p>a_n$, on en conclut: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=p$. Donc, les intervales $\mathbf{I}$, $\dot{\mathbf{I}}$, $\ddot{\mathbf{I}}$ et, par conséquent, toutes les lignes de Jordan (dans le sens habituel) satisfont à notre définition.

La proposition inverse, affirmant que chaque variété linéaire, satisfaisant à la définition précédente, est homéomorphe à l'un des intervalles $\mathbf{I}$, $\dot{\mathbf{I}}$, $\ddot{\mathbf{I}}$, est demontrée dans un autre ouvrage.

В. БРЖЕЧКА

Решение численных уравнений (*)

Существует довольно много приемов вычисления корней с численными коэффициентами; regula falsi, способ Newton'a, способ Lagrange'a, способ Graeffe.

Преимущество способа Graeffe перед всякими другими способами заключается в том, что он не требует отделения корней и пригоден в случае комплексных корней, хотя следует заметить, что в случае комплексных корней при способе Graeffe приходится производить слишком много вычислений; но практическое значение способа Graeffe вне всякого сомнения.

Предлагаемый ниже способ решения уравнений имеет те же преимущества, что и способ Graeffe, т. е. применим в случае комплексных корней и не требует отделения корней; правда, казалось бы, что при наличии теоремы Sturm'a, вполне разрешающей вопрос об отделении корней, не особенно важно указанное обстоятельство, что способ не требует отделения корней, но практика показывает, что применение теоремы Sturm'a затруднительно по длинноте и утомительности сопряженных с ним вычислений.

§ 1. Пусть имеем уравнение n-той степени, которое будем писать в виде

$$x^n - a_{1,1}x^{n-1} - a_{2,1}x^{n-2} - a_{3,1}x^{n-3} - \cdots - a_{n-1,1}x - a_{n,1} = 0; \tag{1}$$

и допустим, что α_1 такой корень уравнения (1), что

$$|\alpha_1| > |\alpha_2|,\ |\alpha_3|,\ |\alpha_4| \ldots |\alpha_{n-1}|,\ |\alpha_n|,$$

т. е. модуль α_1 больше модуля каждого из остальных корней.

Умножим обе части уравнения (1) на x и получим:

$$x^{n+1} - a_{1,1}x^n - a_{2,1}x^{n-1} - a_{3,1}x^{n-2} - \cdots - a_{n-1,1}x^2 - a_{n,1}x = 0;$$

(*) Предлагаемый способ в одном направлении основан на мысли, которая восходит еще к Dan. Bernoulli.

См. 1) D. Bernoulli. Commentationes Petropolitanae 3.1728. p. 92.

2) Jacobi. Observatiunculae etc. Werke, Bd. 3, S. 280.

в последнем уравнении заменим x^n, пользуясь уравнением (1), имеем:

$$x^{n+1}-a_{1,1}(a_{1,1}x^{n-1}+a_{2,1}x^{n-2}+\cdots+a_{n-1,1}x+a_{n,1})-a_{2,1}x^{n-1}-a_{3,1}x^{n-2}-\cdots-a_{n,1}x=0;$$

или

$$x^{n+1}-(a_{1,1}^2+a_{2,1})x^{n-1}-(a_{1,1}a_{2,1}+a_{3,1})x^{n-2}-(a_{1,1}a_{3,1}+a_{4,1})x^{n-3}-\cdots-a_{1,1}a_{n,1}=0;$$

или

$$x^{n+1}-a_{1,2}x^{n-1}-a_{2,2}x^{n-2}-a_{3,2}x^{n-3}-\cdots-a_{n,2}=0,$$

где

$$a_{1,2}=a_{1,1}^2+a_{2,1};\ a_{2,2}=a_{1,1}a_{2,1}+a_{3,1};\ a_{3,2}=a_{1,1}a_{3,1}+a_{4,1};\ldots;a_{n,2}=a_{1,1}+a_{n,1};$$

обе части последнего уравнения опять умножаем на x и освободимся от x^n, пользуясь уравнением первым (1), получим:

$$x^{n+2}-a_{1,3}x^{n-1}-a_{2,3}x^{n-2}-a_{3,3}x^{n-3}-\cdots-a_{n,2}=0,$$

где

$$a_{1,3}=a_{1,1}a_{1,2}+a_{2,2};\ a_{2,3}=a_{2,1}a_{1,2}+a_{3,2};\ a_{3,3}=a_{3,1}a_{3,2}+a_{4,2};\ldots;a_{n,3}=a_{1,2}a_{n,1}.$$

Предположим, что эту операцию умножения на x и освобождения от x^n на основании уравнения (1) мы проделаем k раз, тогда прийдем к уравнению:

$$x^{n+k}-a_{1,k+1}x^{n-1}-a_{2,k+1}x^{n-1}-a_{3,k+1}x^{n-3}-\cdots-a_{n,k+1}=0, \tag{2}$$

где

$$\left.\begin{array}{ll} a_{1,k+1}=a_{1,1}a_{1,k}+a_{2,k}; & a_{2,k}=a_{2,1}a_{1,k}+a_{3,k}; \\ a_{3,k+1}=a_{3,1}a_{1,k}+a_{4,k}; & a_{n,k+1}=a_{n,1}a_{1,k}. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Умножим обе части уравнения (2) на x и, заменяя x^n, получим

$$x^{n+k+1}-a_{1,k+2}x^{n-1}-a_{2,k+2}x^{n-2}-a_{3,k+2}x^{n-3}-\cdots-a_{n,k+2}=0;$$

составим отношения

$$\frac{a_{1,k+2}}{a_{1,k+1}},\ \frac{a_{2,k+2}}{a_{2,k+1}},\ \frac{a_{3,k+2}}{a_{3,k+1}},\ \ldots\ \frac{a_{n,k+2}}{a_{n,k+1}} \tag{4}$$

и покажем, что каждое из написанных отношений при $k\to\infty$ имеет предел и этот предел будет как раз α_1.

Пользуясь равенствами (3), можем написать:

$$\begin{aligned} a_{1,k+1}&=a_{1,1}a_{1,k}+a_{2,k}=a_{1,1}a_{1,k}+a_{2,1}a_{2,k-1}+a_{3,k-1}=\\ &=a_{1,1}a_{1,k}+a_{2,1}a_{1,k-1}+a_{3,1}a_{1,k-2}+a_{n,k-2}=\\ &=a_{1,1}a_{1,k}+a_{2,1}a_{1,k-1}+a_{3,1}a_{1,k-2}+a_{4,1}a_{1,k-3}+\cdots+a_{n,1}a_{k-n+1}. \end{aligned}$$

Итак мы пришли к равенству

$$a_{1,k+1}=a_{1,1}a_{1,k}+a_{2,1}a_{1,k-1}+a_{3,1}a_{1,k-2}+\cdots+a_{n,1}a_{1,k-n+1}; \tag{5}$$

ясно, конечно, что можно написать такое равенство

$$a_{1,k+2}=a_{1,1}a_{1,k+1}+a_{2,1}a_{1,k}+a_{3,1}a_{1,k-1}+\cdots+a_{n,1}a_{1,k-n+1};$$

и можно, конечно, написать такое равенство:

$$a_{1,k+n}=a_{1,1}a_{1,k+n-1}+a_{2,1}a_{1,k+n-2}+a_{3,1}a_{1,k+n-3}+\cdots+a_{n,1}a_{1,k}$$

или

$$a_{1,k+n}-a_{1,1}a_{1,k+n-1}-a_{2,1}a_{1,k+n-2}-a_{3,1}a_{1,k+n-3}-\cdots-a_{n,1}a_{1,k}=0. \quad (6)$$

Шестое можем считать уравнением в конечных разностях. Если мы имеем уравнение в конечных разностях, например:

$$y_x a_0+y_{x+1}a_1+\cdots+y_{x+n}a_n=0,$$

то решением этого уравнения будет:

$$y_x=c_1r_1^x+c_2r_2^x+\cdots+c_nr_n^x,$$

при чем r_1, r_2, $r_3\ldots r_n$ корни уравнения:

$$r^n a_n+r^{n-1}a_{n-1}+\cdots+ra_1+a_0=0,$$

и все эти корни различны; c_1, c_2, $c_3\ldots c_n$ можно всегда найти, как только нам известно y_x, например, хотя бы для $x=0,\ 1,\ 2\ldots n-1$.

Принимая во внимание все только что сказанное, займемся равенством (6), т. е. поставим себе задачу определения $a_{1,k}$? Напишем для шестого характеристическое уравнение:

$$r^n-a_{1,1}r^{n-1}-a_{2,1}r^{n-2}-a_{3,1}r^{n-3}-\cdots-a_{n,1}=0;$$

ясно, конечно, что корни последнего уравнения совпадают с корнями уравнения (1). Корень α_1 уравнения (1) согласно нашему предположению такой, что

$$|\alpha_1|>|\alpha_2|,\ |\alpha_3|\ldots|\alpha_n|.$$

Решение уравнения (6) напишется так:

$$a_{1,k}=c_1\alpha_1^k+c_2\alpha_2^k+c_3\alpha_3^k+\cdots+c_n\alpha_n^k; \quad (7)$$

из последнего имеем, очевидно:

$$a_{1,k+1}=c_1\alpha_1^{k+1}+c_2\alpha_2^{k+1}+c_3\alpha_3^{k+1}+\cdots+c_n\alpha_n^{k+1}, \quad (8)$$

составим отношение $a_{1,k+1}$ к $a_{1,k}$, находим:

$$\frac{a_{1,k+1}}{a_{1,k}}=\frac{c_1\alpha_1^{k+1}+c_2\alpha_2^{k+1}+c_3\alpha_3^{k+1}+\cdots+c_n\alpha_n^{k+1}}{c_1\alpha_1^k+c_2\alpha_2^k+c_3\alpha_3^k+\cdots+c_n\alpha_n^k};$$

далее пишем:

$$\frac{a_{1,k+1}}{a_{1,k}}=\frac{\alpha_1^{k+1}}{\alpha_1^k}\cdot\frac{c_1+c_2\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{k+1}+c_3\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^{k+1}+\cdots+c_n\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^{k+1}}{c_1+c_2\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^k+c_3\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^k+\cdots+c_n\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^k},$$

перейдя к пределу при $k\to\infty$, имеем:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{1,k+1}}{a_{1,k}}=\alpha_1\cdot\frac{c_1}{c_1}=\alpha_1,$$

так как $\lim\left(\frac{a_p}{a_1}\right)^k = 0$, для $P = 2, 3, 4 \ldots n$, ибо $k \to \infty$, а для $p = 2, 3, 4 \ldots n$ $|a_p| < |a_1|$ и $c_1 \neq 0$.

Покажем, что $c_1 \neq 0$; с целью сокращения письма поведем рассуждения на таком уравнении:

$$x^4 - a_{1,1}x^3 - a_{2,1}x^2 - a_{3,1}x - a_{4,1} = 0;$$

имеем:

$$(1_1) \qquad a_{1,1} = \sum_1^4 a_i;$$

$$(1_2) \qquad a_{1,2} = a_{1,1}a_{1,1} + a_{2,1} = a_{1,1}\sum_1^4 a_i - \sum_1^4 a_i a_e;$$

$$(1_3) \qquad a_{1,3} = a_{1,2}a_{1,1} + a_{2,2} = a_{1,2}a_{1,1} + a_{1,1}a_{2,1} + a_{3,1} =$$

$$= a_{1,2}\sum_1^4 a_i - a_{1,1}\sum a_i a_e + a_{3,1};$$

$$(1_4) \qquad a_{1,4} = a_{1,3}a_{1,1} + a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,1}a_{3,1} + a_{4,1} =$$

$$= a_{1,3}\sum a_i - a_{1,2}\sum a_i a_e + a_{1,1}\sum a_i \,.\, a_e a_p - a_1 a_2 a_3 a_4.$$

С другой стороны, если $c_1 = 0$, то $a_{1,4} = c_2 a_2^4 + c_3 a_3^4 + c_4 a_4^4$, и в таком случае имеет место:

$$(1_4') \qquad a_{1,4} = a_{1,3}\sum_2^4 a_i - a_{1,2}\sum_2^4 a_i a_e + a_{1,1}\sum_2^4 a_i a_e a_p.$$

Вычитая $(1_4')$ из (1_4), получим:

$$a_{1,3}a_1 - a_{1,2}a_1\sum_2^4 a_i + a_{1,1}a_1\sum a_i a_e - a_1 a_2 a_3 a_4 = 0;$$

сокращая на $a_1 \neq 0$, получим:

$$(1_3') \qquad a_{1,3} = a_{1,2}\sum_2^4 a_i - a_{1,1}\sum_2^4 a_i a_e + a_2 a_3 a_4.$$

Вычитая $(1_3')$ из (1_3), после преобразований получим:

$$(1_2') \qquad a_{1,2} = a_{1,1}\sum_2^4 a_i - \sum_2^4 a_i a_e.$$

Вычитая $(1_2')$ из (1_2), найдем:

$$a_{1,1}a_1 - a_1(a_2 + a_3 + a_4) = 0,$$

и так как $a_1 \neq 0$, то $a_{1,1} = a_2 + a_3 + a_4$, а это невозможно, следовательно $c_1 \neq 0$.

Теперь необходимо доказать, что и остальные отношения (4) стремятся при $k \to \infty$ к пределу, равному α_1; начнем с последнего отношения и при доказательстве будем пользоваться равенствами (3):

$$\frac{a_{n,k+1}}{a_{n,k}} = \frac{a_{n,1}a_{1,k}}{a_{n,1}a_{1,k-1}} = \frac{a_{1,k}}{a_{1,k-1}},$$

откуда ясно, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n,k+1}}{a_{n,k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{1,k}}{a_{1,k-1}} = \alpha_1.$$

Далее ищем (пользуемся равенствами 3):

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n-1,k+1}}{a_{n-1,k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{n-1,1}a_{1,k} + a_{n,k}}{a_{n-1,1}a_{1,k-1} + a_{n,k-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{n-1,1}a_{1,k} + a_{n,1}a_{1,k-1}}{a_{n-1,1}a_{1,k-1} + a_{n,1}a_{1,k-2}} =$$

$$= \lim \left[\frac{a_{1,k-1}}{a_{1,k-2}} \cdot \frac{a_{n-1,1}\dfrac{a_{1,k}}{a_{1,k-1}} + a_{n,1}}{a_{n-1,1}\dfrac{a_{1,k-1}}{a_{1,k-2}} + a_{n,1}} \right] = \alpha_1 \cdot \frac{a_{n-1,1}\alpha_1 + a_{n,1}}{a_{n-1,1}\alpha_1 + a_{n,1}} = \alpha_1 \text{ (*)},$$

что и требовалось доказать.

Очевидно, что, продолжая наши рассуждения таким же образом, мы докажем существование предела каждого из отношений (4), причем будет для всех отношений один и тот же предел, а именно α_1.

После того как нами доказано существование предела, то ясно, что любое из отношений (4) можно принять за приближенное значение корня α_1; и перед нами сейчас другая задача, а именно чрезвычайно важно для практики оценить ту погрешность, которую мы делаем, останавливаясь на каком-нибудь приближении; с целью нахождения ошибки выпишем два уравнения, а именно:

$$\left.\begin{aligned} &x^{n+k} - a_{1,k+1}x^{n-1} - a_{2,k+1}x^{n-2} - a_{3,k+1}x^{n-3} - \cdots - a_{n,k+1} = 0 \\ &x^{n+k+1} - a_{1,k+2}x^{n-1} - a_{2,k+2}x^{n-2} - a_{3,k+2}x^{n-3} - \cdots - a_{n,k+2} = 0 \end{aligned}\right| \begin{matrix} a_{1,k+2} \\ a_{1,k+1} \end{matrix} \Bigg|.$$

Исключаем из двух последних уравнений x^{n-1}, умножая для этого первое на $a_{1,k+2}$, второе на $a_{1,k+1}$, и вычитаем из второго первое, находим:

$$a_{1,k+1}x^{n+k+1} - a_{1,k+2}x^{n+k} + (a_{2,k+1}a_{1,k+2} - a_{2,k+2}a_{1,k+1})\,x^{n-2} + (a_{3,k+1}a_{1,k+2} -$$
$$- a_{3,k+2}a_{1,k+1})\,x^{n-3} + \cdots + (a_{n,k+1}a_{1,k+2} - a_{n,k+2}a_{1,k+1}) = 0;$$

деля обе части последнего на $x^{n+k}a_{1,k+1}$, находим:

$$x - \frac{a_{1,k+2}}{a_{1,k+1}} + \frac{(a_{2,k+1}a_{1,k+2} - a_{2,k+2}a_{1,k+1})\,x^{n-2} + (a_{3,k+1}a_{1,k+2} - a_{3,k+2}a_{1,k+1})\,x^{n-3}}{a_{1,k+1}\,(a_{1,k+1}x^{n-1} + a_{2,k+2}x^{n-2} + \cdots + a_{n,k+1})} +$$
$$+ \cdots + \frac{(a_{n,k+2} - a_{n,k+2}a_{1,k+1})}{a_{1,k+1}\,(a_{1,k+1}x^{n-1} + a_{2,k+2}x^{n-2} + \cdots + a_{n,k+1})} = 0,$$

где в последнем члене x^{n+k} заменено на основании (2), так как по

(*) $a_{n-1,1}\alpha_1 + a_{n,1} \neq 0$.

доказанному $\lim \frac{a_{1,k+1}}{a_{1,k}} = \alpha_1$, то, приняв за корень $\frac{a_{1.k+1}}{a_{1,k}}$, допускаем ошибку, равную:

$$\frac{(a_{2,k+1}a_{1,k+2} - a_{2,k+2}a_{1,k+1})\,x^{n-2} + (a_{3,k+1}a_{1,k+2} - a_{3,k+2}a_{1,k+1})x^{n-3} + \cdots}{a_{1,k+1}\,(a_{1,k+1}x^{n-1} + a_{2,k+1}x^{n-2} + \cdots + a_{n,k+1})}$$

$$\frac{\cdots + (a_{n,k+1}a_{1,k+2} - a_{n,k+2}a_{1,k+1})}{a_{1,k+1}\,(a_{1,k+1}x^{n-1} + a_{2,k+1}x^{n-2} + \cdots + a_{n,k+1})}.$$

Предположим теперь, что мы желаем по предлагаемому способу найти корень, абсолютная величина которого больше абсолютной величины каждого из остальных корней, то интересно знать, когда же остановиться в преобразованиях? И во время этого процесса преобразования видно ли, что корень, обладающий указанными свойствами, имеется?

Очевидно, что утвердительным ответом на первый и второй вопрос является наличие обстоятельства:

$$\frac{a_{1,k+1}}{a_{1,k}} = \frac{a_{2,k+1}}{a_{2,k}} = \frac{a_{3,k+1}}{a_{3,k}} = \cdots = \frac{a_{n,k+1}}{a_{n,k}},$$

т. е. пропорциональность (приближенная) коэффициентов.

Теперь остается доказать еще одно обстоятельство, которое будет играть при применении предлагаемого способа важную роль, а именно, что, приравняв нулю все, что остается после отбрасывания члена x^{n+k} в уравнении (2), т. е.

$$a_{1,k+1}\,x^{n-1} + a_{2,k+1}x^{n-2} + \cdots + a_{n,k+1} = 0,$$

получим уравнение, которое приближенное дает корни $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n$. Покажем, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{2,k+1}}{a_{1,k+1}} = -\sum_2^n{}_i\, \alpha_i = \alpha_1 - a_{1,1}.$$

Пользуясь равенствами (3), имеем:

$$a_{1,k+1} = a_{1,1}a_{1,k} + a_{2,k};$$

следовательно:

$$a_{1,k+2} = a_{1,1}a_{1,k+1} + a_{2,k+1},$$

отсюда:

$$a_{2,k+1} = a_{1,k+2} - a_{1,1}a_{1,k+1},$$

а потому:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{2,k+1}}{a_{1,k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{1.k+2} - a_{1,1}a_{1,k+1}}{a_{1,k+1}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{a_{1.k+2}}{a_{1,k+1}} - a_{1,1}\right) = \alpha_1 - a_{1,1}$$

что и требовалось доказать.

Точно так же найдем, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{3,k+1}}{a_{1,k+1}} = \sum_2^n{}_{i,}\ k\alpha_i\alpha_k.$$

Действительно:

$$\sum_{2}^{n} i,\ k\alpha_i\alpha_k = \sum_{1}^{n} i,\ k\alpha_i\alpha_k + \alpha_1 \sum_{2}^{n} i,\ k\alpha_i = \sum_{2}^{n} i,\ k\alpha_i\alpha_k + \alpha_1 (a_{1,1} - \alpha_1).$$

Отсюда имеем:

$$\sum_{2}^{n} i,\ k\alpha_i\alpha_k = \sum_{1}^{n} i,\ k\alpha_i\alpha_k - \alpha_1 (a_{1,1} - \alpha_1) = -a_{2,1} - \alpha_1 (a_{1,1} - \alpha_1).$$

Пишем:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{3,k+1}}{a_{1,k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{2,k+2} - a_{2,1}a_{1,k+1}}{a_{1,k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{1,k+3} - a_1,\ a_{1,k+2} - a_{2,1}a_{1,k+1}}{a_{1,k+1}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{a_{1,k+3}}{a_{1,k+2}} \cdot \frac{a_{1,k+2}}{a_{1,k+1}} - a_{1,1} \frac{a_{1,k+2}}{a_{1,k+1}} - a_{2,1} \right) = \alpha_1^2 - a_{1,1}\alpha_1 - a_{2,1},$$

что и требовалось доказать.

Применяя те же рассуждения, мы легко сможем показать, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{4,k}}{a_{1,k}} = -\sum_{2}^{n} \alpha_i\alpha_k\alpha_2; \quad \lim_{k\to\infty} \frac{a_{5,k}}{a_{1,k}} = \sum_{2}^{n} \alpha_i\alpha_k\alpha_e\alpha_s; \ldots$$

$$\ldots \lim_{k\to\infty} \frac{a_{n,k}}{a_{1,k}} = (-1)^n \alpha_2\alpha_3\alpha_4 \cdots \alpha_n.$$

Итак, можно теперь утверждать, что указанное нами уравнение действительно будет давать приближенно корни $\alpha_2\ \alpha_3 \ldots \alpha_n$.

§ 2. Предположим, что корни нашего уравнения (1):

$$\alpha_1 \text{ и } \alpha_2$$

такие, что

$$|\alpha_1|,\ |\alpha_2| > |\alpha_3|,\ |\alpha_4|, \ldots,\ |\alpha_n|$$

и

$$\alpha_1 \neq \alpha_2.$$

Напишем уравнение (2) и еще два уравнения, получающиеся из него путем умножения на x:

$(1')\ x^{n+k} - a_{1,k+1}x^{n-1} - a_{2,k+1}x^{n-2} - a_{3,k+1}x^{n-3} - \ldots - a_{n,k+1} = 0;$

$(1'')\ x^{n+k+1} - a_{1,k+2}x^{n-1} - a_{2,k+2}x^{n-2} - a_{3,k+2}x^{n-3} - \ldots - a_{n,k+2} = 0;$

$(1''')\ x^{n+k+2} - a_{1,k+3}x^{n-1} - a_{2,k+3}x^{n-2} - a_{3,k+3}x^{n-3} - \ldots - a_{n,k+3} = 0.$

Исключим x^{n-1} из $(1')$ и $(1'')$ и из $(1'')$ и $(1''')$, получим:

$$x^{n+k+1}a_{1,k+1} - a_{1,k+2}x^{n+k} - (a_{2,k+2}a_{1,k+1} - a_{2,k+1}a_{1,k+2})\,x^{n-2} -$$

$$-(a_{3,k+2}a_{1,k+1} - a_{3,k+1}a_{1,k+2})\,x^{n-3} - \ldots - (a_{n,k+2}a_{1,k+1} - a_{n,k+1}a_{1,k+2}) = 0; \quad (1'''')$$

$$x^{n+k+2}a_{1,k+2} - x^{n+k+1}a_{1,k+3} - (a_{2,k+3}a_{1,k+2} - a_{2,k+2}a_{1,k+1})\,x^{n-2} -$$

$$-(a_{3,k+3}a_{1,k+2} - a_{3,k+2}a_{1,k+3})\,x^{n-3} - \ldots - (a_{n,k+3}a_{1,k+2} - a_{1,k+3}a_{n,k+2}) = 0, \quad (1''''')$$

и покажем теперь, что корни уравнения:

$$(a_{2,k+2}a_{1,k+1}-a_{2,k+1}a_{1,k+2})\,x^{n-2}+(a_{3,k+2}a_{1,k+1}-a_{3,k+1}a_{1,k+2})\,x^{n-3}+\dots$$
$$\dots+(a_{n,k+2}a_{1,k+1}-a_{n,k+1}a_{1,k+2})=0$$

дадут нам приближенно:

$$a_3,\ a_4,\dots,\ a_n,$$

а уравнения:

$$\frac{a_{1,k+2}x^2-a_{1,k+3}x}{a_{1,k+1}x-a_{1,k+2}}=\frac{a_{2,k+3}a_{1,k+2}-a_{2,k+2}a_{1,k+3}}{a_{2,k+2}a_{1,k+1}-a_{2,k+1}a_{1,k+2}},$$
$$\frac{a_{1,k+2}-x^2-a_{1,k-3}x}{a_{1,k+1}x-a_{1,k+2}}=\gamma_{n-3},\ \gamma_{n-4},\ \gamma_{n-5},\dots,\ \gamma_0,$$

где $\gamma_{n-3},\ \gamma_{n-4},\ \gamma_{n-5},\dots,\ \gamma_0$ означают отношение коэффициентов при $x^{n-3},\ x^{n-4},\ x^{n-5},\dots,\ x^0$ уравнений $(1'''')$ и $(1''')$ даст приближенно корни a_1 и a_2; найдем:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2,k+3}a_{1,k+2}-a_{2,k+2}a_{1,k+3}}{a_{2,k+2}a_{1,k+1}-a_{2,k+1}a_{1,k+2}}?$$

мы знаем, что

$$a_{1,k+4}=a_{1,1}a_{1,k+3}+a_{2,k+3},$$

отсюда:

$$a_{2,k+3}=a_{1,k+4}-a_{1,1}a_{1,k+3};$$

далее найдем точно так же:

$$a_{2,k+2}=a_{1,k+3}-a_{1,1}a_{1,k+2};$$
$$a_{2,k+1}=a_{1,k+2}-a_{1,1}a_{1,k+1};$$

подставляя в то выражение, lim которого нас интересует, имеем:

$$\frac{(a_{1,k+4}-a_{1,1}a_{1,k+3})\,a_{1,k+2}-(a_{1,k+3}-a_{1,1}a_{1,k+2})\,a_{1,k+3}}{(a_{1,k+3}-a_{1,1}a_{1,k+2})\,a_{1,k+1}-(a_{1,k+2}-a_{1,1}a_{1,k+1})\,a_{1,k+2}}=$$
$$=\frac{a_{1,k+4}a_{1,k+2}-a_{1,k+3}^2}{a_{1,k+3}a_{1,k+1}-a_{1,k+2}^2}.$$

Далее мы знаем, что

$$a_{1,k}=c_1a_1^k+c_2a_2^k+c_3a_3^k+\dots+c_na_n^k$$
$$a_{1,k+1}=c_1a_1^{k+1}+c_2a_2^{k+1}+c_3a_3^{k+1}+\dots+c_na_n^{k+1}$$

и т. д.; подставляя, имеем:

$$\frac{(c_1a_1^{k+4}+c_2a_2^{k+4}+c_3a_3^{k+4}+\dots+c_na_n^{k+4})(c_1a_1^{k+2}+c_2a_2^{k+2}+c_3a_3^{k+2}+\dots+c_na_n^{k+2})}{(c_1a_1^{k+3}+c_2a_2^{k+3}+c_3a_3^{k+3}+\dots+c_na_n^{k+3})(c_1a_1^{k+1}+c_2a_2^{k+1}+c_3a_3^{k+1}+\dots+c_na_n^{k+1})}-$$
$$-\frac{(c_1a_1^{k+3}+c_2a_2^{k+3}+c_3a_3^{k+3}+\dots+c_na_n^{k+3})^2}{(c_1a_1^{k+2}+c_2a_2^{k+2}+c_3a_3^{k+2}+c_na_n^{k+2})^2}=$$
$$=\frac{c_1c_2a_1^{k+4}a_2^{k+2}+c_1c_2a_1^{k+2}a_2^{k+4}-2c_1c_2a_1^{k+3}a_2^{k+3}+L}{c_1c_2a_1^{k+3}a_2^{k+1}+c_1c_2a_1^{k+1}a_2^{k+3}-2c_1c_2a_1^{k+2}a_2^{k+2}+M},$$

где выписаны сначала члены, содержащие α_1 и α_2, т. е. члены типа $\alpha_1^p \alpha_2^q$, так как члены этого типа при нахождении предела будут играть главную роль; буквами L и M обозначены суммы членов типа:

$$\alpha_k^p \alpha_e^q,$$

при чем, если $k=1,2$, то $l \neq 1,2$; числителя и знаменателя последнего выражения делим на α_1^{k+1}, α_2^{k+1} и получим:

$$\frac{c_1 c_2 \alpha_1^3 \alpha_2 + c_1 c_2 \alpha_1 \alpha_2^3 - 2c_1 c_2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \dfrac{L}{\alpha_1^{k+1} \alpha_2^{k+1}}}{c_1 c_2 \alpha_1^2 + c_1 c_2 \alpha_2^2 - 2c_1 c_2 \alpha_1 \alpha_2 + \dfrac{M}{\alpha_1^{k+1} \alpha_2^{k+1}}},$$

предел последнего выражения при $k \to \infty$ в силу того, что

$$|\alpha_1|, |\alpha_2| > |\alpha_3|, |\alpha_4|, \ldots, |\alpha_n|$$

и в силу того, что L и M не содержат членов типа $\alpha_1^p \alpha_2^q$, будет:

$$\frac{c_1c_2\alpha_1^3\alpha_2 + c_1c_2\alpha_1\alpha_2^3 - 2c_1c_2\alpha_1^2\alpha_2^2}{c_1c_2\alpha_1^2 + c_1c_2\alpha_2^2 - 2c_1c_2\alpha_1\alpha_2} = \frac{c_1c_2(^*)\,\alpha_1\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2)^2}{c_1c_2(\alpha_1-\alpha_2)^2} = \alpha_1\alpha_2;$$

итак:

$$\lim \frac{a_{2,k+3}a_{1,k+2} - a_{2,k+2}a_{1,k+3}}{a_{2,k+2}a_{1,k+1} - a_{2,k+1}a_{1,k+2}} = \alpha_1\alpha_2.$$

Применяя те же рассуждения, можно доказать, что

$$\lim_{k\to} \left[\frac{a_{1,k+3}}{a_{1,k+2}} - \frac{a_{1,k+1}}{a_{1,k+2}} \cdot \frac{a_{2,k+3}a_{1,k+2} - a_{2,k+2}a_{1,k+3}}{a_{2,k+2}a_{1,k+1} - a_{2,k+1}a_{1,k+2}}\right] = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Наконец, пользуясь равенствами (3), мы легко докажем, что при $k \to \infty$ корни уравнения (9) стремятся к корням $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \ldots \alpha_n$.

Дальше можно было бы пойти таким путем и предположить, что, например, корни $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ такие, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \ldots \alpha_n$ и т. д., и путем исключения из предложенных уравнений $1'$, $1''$, $1'''$ мы сможем найти все корни.

Пример 1.

Решить уравнение (**):

$$x^3 - 2x - 2 = 0; \tag{1}$$

имеем:

$$x^4 - 2x^2 - 2x = 0; \tag{1'}$$

(*) $c_2 \neq 0$ и $c_1 \neq 0$.

(**) Это уравнение решено у Weber'a. Lehrbuch der Algebra. Bd. I, стр. 393; оно решено как трехчленное уравнение по методу Гаусса и найдено:

$$x_1 = 1{,}769292; \quad x_{2,3} = 0{,}884646 \pm 0{,}589740\, i.$$

возводя (1) в четвертую степень и заменяя x^4 и x^3 на основании (1) и (1′), получим:

$$x^{12}-2^4(8x^2+14x+9)=0; \tag{1″}$$

возводя в квадрат (1″) и заменяя x^4 и x^3 на основании (1′) и (1), имеем:

$$x^{24}-2^8(468x^2+828x+529)=0; \tag{1‴}$$

умножая на x (1‴) и заменяя x^3 и т. д., получим:

$$x^{25}-2^8(828x^2+1465x+936)=0. \tag{1⁗}$$

Отношение коэффициентов при x^2, x, x^0 уравнений (1‴) и (1⁗) дает:

$$\frac{828}{468}=1{,}76923\ldots;\quad \frac{1465}{828}=1{,}76932\ldots;$$
$$\frac{936}{529}=1{,}76937\ldots$$

Пропорциональность коэффициентов указывает на то, что уравнение (1) имеет один корень, больше, чем два другие, приближенное значение этого корня будет:

$$x=1{,}769\ldots$$

два других корня найдем из уравнения:

$$468x^2+828x+529=0;$$
$$x_{1,2}=-0{,}88461\pm 0{,}589743\,i$$

тоже с четвертым верным знаком.

Если бы пожелали найти более точные значения корней, то можно было бы пойти двумя путями:

1. Еще повысить степень уравнения (1⁗).
2. Найти поправку h для корня по формуле:

$$h=-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}\,(*),$$

которая применима как в случае действительных корней, так и мнимых.

Пример 2 (**):

$$x^5-x^3-2x^2-2x-1=0. \tag{1}$$

(*) См. 1) А. Н. Крылов. Лекции о приближенных вычислениях, изд. 1907 года 2) C. Runge und H. König. Numerisches Rechnen. Стр. 152, 155, изд. 1924. 3) Praktische Analysis von H. von Sanden. Стр. 152—156, изд. 1923 г.

(**) Пример взят из Lehrbuch der Algebra H. Weber'a, стр. 389; пример там решен по способу Греффе, и найдено для $x_1=1{,}73471\ldots$; там же показано, что уравнение имеет один действительный корень и 4 комплексных; см. стр. 350.

Пишем, как и раньше:

$$x^6 - x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x = 0; \quad x^7 - 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 2x - 1 = 0;$$
$$x^8 - 3x^4 - 5x^3 - 6x^2 - 5x - 2 = 0;$$

возводя (1) в квадрат, заменяя x^6 и т. д.;

Потом еще раз в квадрат и наконец последнее умножаем на x, получаем:

$$x^{20} - 2229x^4 - 3867x^3 - 4479x^2 - 3311x - 1285 = 0; \tag{1'}$$
$$x^{21} - 3867x^4 - 6708x^3 - 7769x^2 - 5743x - 2229 = 0. \tag{1''}$$

Взяв отношение коэффициентов (1″) и (1′), имеем:

$$\frac{3867}{2229} = 1{,}734858\ldots; \quad \frac{6708}{3867} = 1{,}7347\ldots; \quad \frac{7769}{4479} = 1{,}7345\ldots;$$
$$\frac{5743}{3311} = 1{,}7345\ldots; \quad \frac{2229}{1285} = 1{,}73463\ldots; \quad \boldsymbol{x_1 = 1{,}735}.$$

Найдем теперь комплексные корни; с этой целью выпишем уравнения:

$$\begin{array}{ll|r|} (1') & x^{20} - 2229x^4 - 3867x^3 - 4479x^2 - 3311x - 1285 = 0; & -\ 852 \\ (1'') & x^{21} - 3867x^4 - 6708x^3 - 7769x^2 - 5743x - 2229 = 0: & 3192 \\ (1''') & x^{22} - 6708x^4 - 11636x^3 - 13477x^2 - 9963x - 3867 = 0; & -1557 \end{array}$$

и умножим обе части каждого из выписанных уравнений на:

$$\begin{array}{ll} (1') & 3867 . 11636 - 6708 . \ 6708 = -852; \\ (1'') & 6708 . \ 3867 - 2229 . 11636 = 3192; \\ (1''') & 2229 . \ 6708 - 3867 . \ 3867 = -1557; \end{array}$$

сложив (1′) (1″) (1‴), получим:

$$-1557x^{22} + 3192x^{21} - 852x^{20} - 1149x^2 - 1707x - 771 = 0;$$

отбрасывая в последнем члены, содержащие x^{20}, x^{21} и x^{22}, получим уравнение:

$$1149x^2 + 1707x + 771 = 0,$$

решая которое, найдем пару комплексных корней, а именно пару комплексных корней по модулю меньших,
находим:

$$\boldsymbol{x_{2,3} = 0{,}743 \pm 0{,}345\,i}.$$

Отбросив, например, в (1″) уравнении член, содержащий x^{21}, получим уравнение:

$$3867x^4 + 6708x^3 + 7769x^2 + 5743x + 2229 = 0,$$

которое приближенно даст 4 комплексных корня и в том числе $x_{2,3}$; следовательно, называя 4 и 5 корень:

$$u \pm vi,$$

имеем:

$$2u - \frac{1707}{1149} = -\frac{6708}{3867}; \quad (u^2 + v^2) \cdot \frac{771}{1149} = \frac{2229}{3867};$$

из первого находим:

$$u = -0{,}125;$$

второе дает:

$$v = +0{,}893.$$

Следовательно:

$$\boldsymbol{x_{4,5} = -0{,}125 \pm 0{,}893\, i}.$$

Проверка: Должно быть:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0;$$

имеем:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0{,}002.$$

Д. М. СИНЦОВ

О системах интегральных кривых Пфаффова уравнения $Pdx+Qdy+Rdz=0$

§ 1. Определения. Частные случаи.

1. Пусть имеем уравнение в полных дифференциалах:

$$Pdx+Qdy+Rdz=0. \tag{1}$$

Мы можем, независимо от теории точечно-линейных коннексов, представить его себе полученным в связи с системою кривых (конгруэнции кривых), определенной дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \tag{2}$$

касательные которых определяются уравнением:

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}=\frac{Z-z}{R}, \tag{3}$$

если будем искать направления, ортогональные к кривым (2).

Тогда (1) и выражает условие ортогональности.

При этом направления, выходящие из точки (x, y, z), лежат в плоскости:

$$P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0, \tag{4}$$

а прямая (3) будет нормальна к этой плоскости.

Каждой точке таким образом подчиняется совершенно определенная плоскость — (1), — что и подало A. Voss'у мысль придать этим конфигурациям наименование Punkt-Ebenen Systeme (P.-E. Systeme) (*).

Исключение составляют те точки, координаты которых выполняют три уравнения:

$$P=0,\quad Q=0,\quad R=0.$$

(*) Mathematische Annalen B. 23.

При P, Q, R степени m, число таких точек равно m^3. Для этих точек соответствующая плоскость (4) становится неопределенною, за нее может быть взята всякая проходящая через (x, y, z).

Является теперь вопрос, будет ли соответствие и однозначно обратимым. На этот вопрос приходится ответить отрицательно.

Действительно, для того, чтобы найти все точки, которым принадлежит проходящая через них плоскость:

$$ux + vy + wz + \bar{\omega} = 0, \tag{a}$$

надо решить уравнения:

$$\frac{P}{u} = \frac{Q}{v} = \frac{R}{w} = \frac{Px + Qy + Rz}{-\bar{\omega}},$$

или уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} -\bar{\omega}P &= u(Px + Qy + Rz) \\ -\bar{\omega}Q &= v(Px + Qy + Rz) \\ -\bar{\omega}R &= w(Px + Qy + Rz) \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

Умножая на x, y, z и складывая, имеем:

$$(Px + Qy + Rz)(ux + vy + wz + \bar{\omega}) = 0.$$

Из уравнений (b) независимых, таким образом, оказывается всего два, третьим же должно быть присоединено (a). Подсчет числа корней пока отложим.

Если ищем точки, лежащие в плоскостях, параллельных данной, то имеем только:
$$\frac{P}{u} = \frac{Q}{v} = \frac{R}{w}$$
и, решая их совместно, имеем ∞ точек, образующих кривую.

Нам представляются при этом следующие особенные случаи.

2. 1°) Дифференциальное выражение (1) есть точный дифференциал; условия этого:

$$P_y' - Q_x' = 0, \quad Q_z' - R_y' = 0, \quad R_x' - P_z' = 0.$$

Тогда (1) интегрируется по известным правилам и дает:

$$U = \text{Const}\; U = F(xyz).$$

И если нам дана некоторая поверхность, например, эллипсоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

то мы можем, взяв дифференциал, рассматривать уравнение:

$$\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} + \frac{zdz}{c^2} = 0, \quad \frac{x(X - x)}{a^2} + \frac{y(Y - y)}{b^2} + \frac{z(Z - z)}{c^2} = 0,$$

которое каждой точке подчиняет определенную плоскость. Таким образом, и вообще, исходя из определенной поверхности:

$$F(x, y, z) = 0, \tag{a}$$

мы можем перейти к

$$F_x' dx + F_y' dy + F_z' dz = 0, \tag{b}$$

т. е. вместо данной поверхности рассматривать систему поверхностей:

$$F(x, y, z) = \text{Const}$$

или

$$F(x, y, z) = F(x_1, y_1, z_1). \tag{c}$$

Можно сказать: рассматривая поверхность, мы рассматриваем наряду с ее уравнением:

$$F(x, y, z) = 0 \tag{a}$$

уравнение:

$$F_x'(X - x) + F_y'(Y - y) + F_z'(Z - z) = 0. \tag{d}$$

Мы обращаем обычно внимание, главным образом, на точки поверхности и их касательные плоскости. Но мы можем составить уравнение (d) для любой точки пространства. Таким образом устанавливается корреляция между точками и плоскостями, устанавливается для каждой точки проходящая через нее плоскость и эта плоскость, в случае, если точка находится на поверхности (a), будет ее касательной.

Вообще же это будет плоскость, касательная к поверхности (c), где x_1, y_1, z_1 координаты взятой точки.

Таким образом, рассматривая вместо (a) уравнение (b), мы рассматриваем не одну поверхность (a), но и все поверхности (c), проходящие через каждую точку пространства, точки которого таким образом распределяются на ∞' поверхностей пучка (c), проходящего через кривую пересечения поверхности (a) с ∞-но удаленною плоскостью.

В дальнейшем кривые, рассматриваемые в теории поверхностей, как начерченные на поверхности, мы можем мыслить связанными с таким пучком и проходящими через любую точку пространства.

3. 2°) (1) не есть точный дифференциал, но можно найти интегрирующий множитель. Условие этого, как известно (*):

$$P(Q_z' - R_y') + Q(R_x' - P_z') + R(P_y' - Q_x') = 0,$$

что в виде символического определителя может быть записано:

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0,$$

(*) См., например, мою заметку: „Условия интегрируемости полных дифференциалов $\Sigma X dx$“. Изв. Казанск. Ф.-М. О. (2) т.

где по раскрытии должно быть положено:

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot Q \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$$

и т. д.

В этом случае существует такая функция M, что

$$M(Pdx + Qdy + Rdz) = dU,$$

и снова имеем ∞' поверхностей $U = \text{Const}$, которые проходят через каждую точку пространства.

4. 3°) Все плоскости (4) касаются одной поверхности (но не в точках, которым они принадлежат).

Рассмотрим, при каких условиях это имеет место.

Перепишем (4) под видом:

$$PX + QY + RZ - V = 0,$$

где

$$V = Px + Qy + Rz.$$

Если существует такая поверхность:

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0, \tag{5}$$

касательные в точках которой суть все плоскости (4), то должно быть:

$$\Phi_\xi' X + \Phi_\eta' Y + \Phi_\zeta' Z - (\xi\Phi_\xi' + \eta\Phi_\eta' + \zeta\Phi_\zeta') = 0$$

тождественно с (4):

$$\frac{P}{\Phi_\xi'} = \frac{Q}{\Phi_\eta'} = \frac{R}{\Phi_\zeta'} = \frac{Px + Qy + Rz}{\xi\Phi_\xi' + \eta\Phi_\eta' + \zeta\Phi_\zeta'}, \tag{6}$$

и так как плоскость (4) проходит через точку (ξ, η, ζ), то

$$P\xi + Q\eta + R\zeta - V = 0.$$

Таким образом, последнее из соотношений (6) есть следствие первых трех, или

$$P = \mu\Phi_\xi', \quad Q = \mu\Phi_\eta', \quad R = \mu\Phi_\zeta'. \tag{7}$$

Таким образом $\frac{P}{V}, \frac{Q}{V}, \frac{R}{V}$ являются тангенциальными неоднородными координатами плоскости, касательной к поверхности:

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0, \tag{5}$$

т. е. между этими тремя величинами $\frac{P}{V}, \frac{Q}{V}, \frac{R}{V}$ должна существовать функциональная зависимость, получаемая исключением ξ, η, ζ из (5) и (7), условием чего должно быть:

$$\frac{\partial\left(\frac{P}{V},\ \frac{Q}{V},\ \frac{R}{V}\right)}{\partial(x,\ y,\ z)}=0,$$

где

$$V=Px+Qy+Rz.$$

Раскрывая имеем:

$$1=\begin{vmatrix} \frac{1}{V}P_x-\frac{P}{V^2}V_x & \frac{1}{V}Q_x{}'-\frac{Q}{V^2}V_x & \frac{1}{V}R_x{}'-\frac{R}{V^2}V_x \\ \frac{1}{V}P_y{}'-\frac{P}{V^2}V_y & \frac{1}{V}Q_y{}'-\frac{Q}{V^2}V_y{}' & \frac{1}{V}R_y{}'-\frac{R}{V^2}V_y{}' \\ \frac{1}{V}P_z{}'-\frac{P}{V^2}V_z{}' & \frac{1}{V}Q_z{}'-\frac{Q}{V^2}V_z{}' & \frac{1}{V}R_z{}'-\frac{R}{V^2}V_z{}' \end{vmatrix},$$

которое преобразуем в определитель 4-го порядка, добавляя 4-й столбец 0, 0, 0, 1 и 4-ую строку P, Q, R, 1, а в этом последнем последнюю строку, умноженную соответственно на $\frac{V_x{}'}{V^2}$, $\frac{V_y{}'}{V^2}$, $\frac{V_z{}'}{V^2}$, прибавляя к 1-й, 2-й и 3-й:

$$\equiv\frac{1}{V^4}\begin{vmatrix} P_x{}' & Q_x{}' & R_x{}' & V_x{}' \\ P_y & Q_y & R_y & V_y \\ P_z{}' & Q_z{}' & R_z{}' & V_z{}' \\ P & Q & R & V \end{vmatrix}\equiv\frac{1}{V^4}\begin{vmatrix} P_x{}' & Q_x{}' & R_x{}' & xP_x{}'+yQ_x{}'+zR_x{}'+P \\ P_y & Q_y{}' & R_y{}' & xP_y{}'+yQ_y{}'+zR_y{}'+Q \\ P_z{}' & Q_z{}' & R_z{}' & xP_z{}'+yQ_z{}'+zR_z{}'+R \\ P & Q & R & xP+yQ+zR \end{vmatrix}\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{V^4}\begin{vmatrix} P_x{}' & Q_x{}' & R_x{}' & P \\ P_y{}' & Q_y{}' & R_y{}' & Q \\ P_z{}' & Q_z{}' & R_z{}' & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix}.$$

Определитель этот обозначим:

$$\Delta=\begin{vmatrix} P_x{}' & Q_x{}' & R_x{}' & P \\ P_y{}' & Q_y{}' & R_y{}' & Q \\ P_z{}' & Q_z{}' & R_z{}' & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix} \qquad (8')$$

Итак, если тождественно:

$$\Delta=0, \qquad (8)$$

все плоскости (4) касаются одной и той же поверхности (которую A. Voss называет Ordnungsfläche).

Эта поверхность определяется в неоднородных тангенциальных координатах уравнениями:

$$u=\frac{P}{V}, \quad v=\frac{Q}{V}, \quad w=\frac{R}{V}, \tag{9}$$

которые при выполнении условия (8) приводят к уравнению:

$$\Pi(u, v, w)=0.$$

Но исключение x, y, z из (9) или

$$P-uV=0, \quad Q-vV=0, \quad R-wV=0,$$

при условии (8) может привести или к одному уравнению, тогда получаем как Ordnungsfläche собственную поверхность, или к двум, и тогда получаем поверхность развертывающуюся, или к трем, тогда Ordnungsfläche приводится к одной или нескольким точкам. Такой случай, например, представится, если тождественно:

$$Px+Qy+Rz=0,$$

когда всем точкам пространства принадлежат плоскости, проходящие через начало координат. Наконец, Ordnungsfläche может вырождаться в кривую двоякой кривизны. В этом последнем случае Π должно выполнять дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка.

Условие этого, — чтобы миноры второго порядка определителя

$$\frac{\partial\left(\frac{P}{V}, \frac{Q}{V}, \frac{R}{V}\right)}{\partial(x, y, z)}$$

обращались в нуль:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P}{V}\right):\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{V}\right):\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{R}{V}\right)=\frac{\partial\left(\frac{P}{V}\right)}{\partial y}:\frac{\partial\left(\frac{Q}{V}\right)}{\partial y}:\frac{\partial\left(\frac{R}{V}\right)}{\partial y}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P}{V}\right):\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Q}{V}\right):\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{R}{V}\right).$$

Если определитель Δ не обращается тождественно в 0, то уравнение:

$$\Delta=0 \tag{8}$$

определяет некоторую ковариантную поверхность, которую A. Voss называет Wendefläche.

5. Общий случай, — когда ни одно из перечисленных условий не выполнено, — приводит нас к своеобразной системе кривых, которые являются кривыми главной коинциденции некоторого пространственного конвекса с элементом (точка, прямая), — который я для краткости на-

зываю Бонсдорфовым конвексом. A. Voss (*) изучал их, называя их Punkt-Ebenen-Systemes. Ими занимался R. Lilientahl (**). S. Lie называет уравнения типа (1) Пфаффовыми уравнениями (***).

Уравнениями подобного вида занимался еще Эйлер. Ср. Goursat Cours d'Analyse, t. II.

Тесно связанными с этим вопросом занимался также H. Liebmann. M. Ann. 52. 1899.

Обращая внимание на геометрическую сторону, мы сначала займемся изучением свойств этих систем кривых, распространяя на них те понятия и определения, которые вводятся в теории поверхностей. Многое из этого дано уже A. Voss'ом, я лишь систематизирую и несколько пополняю полученные им результаты. Моя задача изложить последовательно теорию кривых системы (1) в том порядке, как это делается в теории поверхностей (следуя, например, Vessiot) и показать наблюдаемое при этом своего рода расщепление свойств.

6. Можно сказать, что уравнение (10) каждой точке (x, y, z) пространства подчиняет определенную плоскость (кроме $P=Q=R=0$).

Спрашивается, обратно, каким точкам принадлежит данная плоскость. Для получения ответа на этот вопрос берем произвольную плоскость:

$$ux+vy+wz+\omega=0. \tag{a}$$

Она будет совпадать с плоскостью (4) при выполнении условий:

$$\frac{P}{u}=\frac{Q}{v}=\frac{R}{w}=-\frac{(Px+Qy+Rz}{\omega},$$

которые определяют точки (x, y, z).

Кроме того, точка эта должна лежать в плоскости (a). Поэтому, имеем:

$$ux+vy+wz+\omega=0,$$

и, следовательно, к 4-м отношениям можно добавить, как их следствие—5-е:

$$\frac{Px+Qy+Rz-(Px+Qy+Rz)}{ux+vy+wz+\omega}=\frac{0}{ux+vy+wz+\omega}.$$

Чтобы это отношение могло равняться предыдущим, должно быть поэтому:

$$ux+vy+wz+\omega=0,$$

т. е. это уравнение заменяет собою одно из 4-х отношений, являясь их следствием. Таким образом, для определения точек плоскости (a),

(*) a) Geometrische Interpretation d. Differentialgleichung $Pdx+Qdy+Rdz=0$. M. Ann. 16 S. 556—559. b) Zur Theorie der algemeinen Punkt-Ebenen-Systeme. M. Ann. 23 S. 45—81. 3) Theorie d. rationalen algebraischen Punkt-Ebenen-Systeme M. Ann. 23 S. 395—411.

(**) Über die Krümmung d. Kurvenschaaren M. Ann. 32 S. 545—565. Его же—Grundlagen d. Krümmungslehre d. Kurvenschaaren. 1896. S. 114.

(***) Geometrie der Berührungstransformationen. B. I, 1896.

которым она принадлежит, имеем уравнения:

$$Pv-Qu=0,\quad Q\omega-Rv=0,\quad ux+vy+wz+\omega=0.$$

Если P, Q, R — многочлены степени m, то число решений будет таким образом равно m^2.

Если P, Q, R — степени m, то число точек, которым принадлежит одна и та же проходящая через них плоскость (а), равно m^2.

7. *Элементы дуги Р.-Е. системы.* Первая дифференциальная форма в теории поверхностей — элемент дуги кривой, начерченной на поверхности:

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,$$

где

$$E=\Sigma x_u'^2,\quad F=\Sigma x_u' x_v',\quad G=\Sigma x_v'^2,$$

форма, принимающая при уравнении поверхности $z=f(x, y)$ вид:

$$ds^2=(1+p^2)\,dx^2+2pqdxdy+(1+q^2)\,dy^2.$$

В Р.-Е. системе мы имеем систему кривых, дифференциалы координат точек которых связаны соотношением:

$$Pdx+Qdy+Rdz=0. \qquad (1)$$

Следовательно:

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

может быть представлено в одном из трех видов:

$$ds^2=\frac{(P^2+R^2)\,dx^2+2PQdxdy+(Q^2+R^2)\,dy^2}{R^2},$$

$$ds^2=\frac{(Q^2+P^2)\,dx^2+2PRdxdz+(R^2+Q^2)\,dz^2}{Q^2},$$

$$ds^2=\frac{(P^2+Q^2)\,dy^2+2QRdydz+(P^2+R^2)\,dz^2}{P^2}.$$

Первое предполагает $R\neq 0$, 2-ое $Q\neq 0$, 3-ье $P\neq 0$, поскольку мы рассматриваем только *обыкновенные* точки (для которых P, Q, R неравны одновременно 0). То же самое неявно подразумевается и в обычной дифференциальной геометрии — теории поверхностей, где оставляются обычно в стороне особенные точки поверхностей. Три вида линейного элемента Р.-Е. системы, т. е. дифференциала дуги интегральной кривой (1) применим и к тому случаю, когда (1) есть точный дифференциал, когда мы имеем в обычной теории элемент дуги поверхности. Написав ее уравнение под видом:

$$dF(x, y, z)=0.$$

Мы имеем возможность, не выделяя роли ни одной из координат, брать за элемент дуги кривой на поверхности любой из 3-х видов.

Если имеем обыкновенную точку, то хотя один из 3-х коэффициентов, P, Q или R отличны от 0, и, следовательно, хотя один из трех видов линейных элементов применим, и если мы в дальнейшем исключаем, например, dz, то с тем же правом мы могли бы исключать dx или dy.

Случай $P=Q=R=0$ должен быть рассмотрен особо.

§ 2. Асимптотические линии

8. Система кривых, определенная уравнением (1):

$$Pdx+Qdy+Rdz=0$$

обладает тем свойством, что кривые, проходящие через точку (x, y, z), имеют свои касательные в этой точке, лежащие в плоскости:

$$P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0. \tag{4}$$

Если мы от точки (x, y, z) перемещаемся вдоль одной из прямых:

$$\frac{X-x}{l}=\frac{Y-y}{m}=\frac{Z-z}{n} \quad (Pl+Qm+Rn=0)$$

в бесконечно близкую точку: $(x+dx, \quad y+dy, \quad z+dz)$, то

$$Pdx+Qdy+Rdz=0$$

в силу уравнения (1).

Не все эти кривые имеют одинаково тесное отношение к плоскости (4).

Определяем, при каких условиях эта плоскость будет иметь прикосновение 2-го порядка, т. е. будет соприкасающейся плоскостью для соответствующей кривой. Для этого результат подстановки:

$$\left(x+x'\Delta t+\frac{x^4}{\lambda v}\Delta t^2+\frac{x'''}{1.24}\Delta t^3, \ldots, y+y'\Delta t+\cdots, z+z'\Delta t_n\right)$$

в (4) должно быть бесконечно-малою 3-его порядка относительно Δt. Т.-е., кроме

$$Px'+Qy'+Rz'=0, \tag{1'}$$

уже выполненного в силу (1) и показывающего, что каждая из этих кривых касается плоскости (4), должна быть еще и

$$Px''+Qy''+Rz''=0. \tag{10}$$

Но в силу (1'):

$$(Px'+Qy'+Rz')\equiv P'x'+Q'y'+R'z'+Px''+Qy''+Rz''=0.$$

С помощью (10) это выражение сводится к

$$P'x'+Q'y'+R'z'=0 \tag{11}$$

или, по умножении на dt^2, к

$$dPdx+dQdy+dRdz=0. \tag{11'}$$

Уравнение (11') 2-ой степени относительно дифференциалов; вместе с (1) оно определяет два направления. Эти направления можно назвать направлениями главных касательных (или асимптотическими направлениями). Развертывая его, мы имеем:

$$\begin{aligned} P'_x dx^2+Q'_y dy^2+R'_z dz^2+(P'_y+Q'_x)\,dxdy+\\ +(P'_z+R'_x)\,dxdz+(Q'_z+R'_y)\,dydz=0 \end{aligned} \tag{11''}$$

или для производных, которые пропорциональны косинусам l, m, n соответственной прямой:

$$\begin{aligned} P'_x x'^2+Q'_y y'^2+R'_z z'^2+(P'_y+Q'_x)\,x'y'+\\ +(P'_z+R'_x)\,x'z'+(Q'_z+R'_y)\,y'z'=0, \end{aligned}$$

что должно быть рассматриваемо совместно с (1) или (1').

Соответствующие (11) прямые образуют конус:

$$\begin{aligned} P'_x(X-x)^2+Q'_y(Y-y)^2+R'_z(Z-z)^2+(P'_y+Q'_x)(X-x)(Y-y)+\\ +(P'_z+R'_x)(X-x)(Z-z)+(Q'_z+R'_y)(Y-y)(Z-z)=0. \end{aligned} \tag{12}$$

Главные касательные получаются в пересечении его плоскостью (4). Получаются или две вещественных и различных прямых, две совпадающих или две мнимых сопряженных. В случае, если две прямые совпадают, плоскость (4) касается конуса.

Для определения условия этого, переносим начало в точку (x, y, z), так что $X-x=\xi$, $Y-y=\eta$, $Z-z=\zeta$. Уравнение (12) примет вид:

$$\begin{aligned} P'_x\xi^2+Q'_y\eta^2+R'_z\zeta^2+(P'_y+Q'_x)\,\zeta\eta+(P'_z+R'_x)\,\xi\zeta+\\ +(Q'_z+R'_y)\,\eta\zeta=0, \end{aligned} \tag{12'}$$

при условии (1)

$$P\xi+Q\eta+R\zeta=0. \tag{12''}$$

Для касания должно быть:

$$\left.\begin{aligned} 2P'_x\xi+(P'_y+Q'_x)\eta+(P'_z+R'_x)\zeta=\mu P\\ (P'_y+Q'_x)\xi+2Q'_y\eta+(Q'_z+R'_y)\zeta=\mu Q\\ (P'_z+R'_x)\xi+(Q'_z+R'_y)\eta+2R'_z\zeta=\mu R\\ P\xi+Qy+Rz=0 \end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

Исключая μ, ξ, η, ζ, получаем, как условие совместности, равенство нулю определителя:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 2P'_x & Q'_x + P'_y & R'_x + P'_z & P \\ Q'_x + P'_y & 2Q'_y & Q'_z + R'_y & Q \\ R'_x + P'_z & R'_y + Q'_z & 2R'_z & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix} = 1. \tag{14}$$

По аналогии со случаем кривых, образующих поверхность, можем сказать, что в этом последнем случае мы имеем параболическую точку, в случае двух вещественных прямых — гиперболическую и в случае мнимых — эллиптическую точку.

Различать эти случаи можно по знаку этого же определителя (который, заметим, при $Pdx + Qdy + Rdz \equiv dz - pdx - qdy$ обращается в $4\ (rt - s^2)$). Таким образом, мы должны считать, что $\Delta' < 0$ соответствует эллиптической точке и $\Delta' > 0$ — гиперболической.

Действительно, если (12′) умножим на R^2 и заменим $R\zeta$ через $-(P\xi + Q\eta)$, то получим однородное уравнение относительно ξ, η, которое, решенное в отношении $\frac{\eta}{\xi}$, даст дискриминант:

$$[R^2(P'_y + Q'_x) - 2PQR'_z - PR(Q'_z + R'_x) - QR(P'_z + R'_x)]^2 -$$
$$- 4\,[R^2P'_x - PR(P'_z + R'_x) + P^2R'_z]\,.\,[R^2Q'_y - QR(Q'_z + R'_y) + Q^2R'_z],$$

что, по приведении, обращается в $R^2\Delta'$.

10. Можно поставить вопрос: когда все направления будут главными, т. е., когда плоскость точек будет соприкасающейся для всех направлений?

Условия этого: (12′) уничтожается в силу (12″) независимо от ξ, η, ζ, — т. е.

$$\left.\begin{aligned} & R^2(P'_y + Q'_x) - R\{P(Q'_z + R'_x) + Q(P'_z + R'_x)\} + 2PQR'_z = 0 \\ & R^2P'_x - PR(P'_z + R'_x) + P^2R'_z = 0 \\ & R^2Q'_y - QR(Q'_z + R'_y) + Q^2R'_z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Если же уравнение самого конуса (12′) обращается тождественно в 0, то должно быть:

$$P'_x = 0, \quad Q'_y = 0, \quad R'_z = 0, \quad P'_y + Q'_x = 0, \quad P'_z + R'_x = 0, \quad Q'_z + R'_y = 0,$$

и приходим к

$$P = cy - bz, \quad Q = az - cx, \quad R = bx - ay,$$

и (1) обращается в

$$0 = a(zdy - ydz) + b(xdz - zdx) + c(ydx - xdy),$$

т. е. соответствует некоторому линейному комплексу.

11. Примем плоскость (4) за плоскость XOY, точку (x, y, z) за начало координат. Тогда $P=0$, $Q=0$ (и, следовательно, в силу делаемого предположения $R \neq 0$). При этом (1) дает $dz=0$.

Уравнение (6) принимает вид:

$$dx(P'_x dx + P'_y dy) + dy(Q'_x dx + Q'_y dy) = 0$$

или

$$P'_x dx^2 + (P'_y + Q'_x)\,dxdy + dy^2 . Q'_y = 0,$$

квадратное уравнение, которое имеет два корня вещественных и различных, если

$$(P'_y + Q'_x)^2 - 4P'_x Q'_y > 0;$$

эти корни будут вещественные равные, если $(P'_y + Q'_x)^2 - 4P'_x Q'_y = 0$, и мнимые сопряженные, если

$$(P'_y + Q'_x)^2 - 4P'_x Q'_y < 0;$$

но левая часть есть как раз то выражение, к которому сводится при этом Δ (вплоть до положительного множителя R^2):

$$(\Delta')_{P=Q=0} = -R^2 [4P'_x Q'_y - (Q'_x + P'_y)^2];$$

таким образом, знак Δ' говорит нам, к которому из трех типов относится точка (x, y, z) пространства. С этими условиями мы встретимся и далее. Заметим еще, что два корня уравнения будут давать в произведении -1, а, следовательно, направления главных касательных будут взаимно-перпендикулярны, если $P'_x + Q'_y = 0$ (в нашей частной системе координат).

В общем случае расположения координатных осей то же условие выразится таким образом:

условие перпендикулярности направлений (dx, dy, dz), и $(d'x, d'y, d'z)$

$$dxd'x + dyd'y + dzd'z = 0.$$

Умножая на $R^2 \neq 0$ и заменяя Rdz и $Rd'z$ по (1), получим:

$$(R^2 + P^2)\,dxd'x + PQ\,(dxd'y + dyd'x) + (R^2 + Q^2)\,dyd'y = 0.$$

Здесь

$$\frac{dxd'x}{C} = \frac{dyd'x + dxd'y}{-B} = \frac{dyd'y}{A},$$

где C, B, A — коэффициенты уравнения, получаемого из (11″) такого же данного с помощью (1) — те же самые. Это те, которые приравнены нулю в (15). Вставляя эти значения, получаем по приведении и сокращении на R^2:

$$P^2(Q'_y + R'_z) - PQ(P'_y + Q'_x) + Q^2(P'_x + R'_z) -$$
$$-R\{P(P'_z + R'_x) + Q(Q'_z + R'_y)\} + R^2(P'_x + Q'_y) = 0.$$

При $P = Q = 0$ все сводится к последнему члену.

12. К уравнению главных касательных можно притти и следующим образом. Уравнение асимптотических линий поверхности:

$$r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 = 0$$

может быть написано также

$$dx dp + dy dq = 0.$$

Оно выражает, что перпендикуляр из точки бесконечно близкой к точке прикосновения на касательную плоскость — бесконечно-малая 3-го порядка.

В нашем случае (1)

$$dz = -\frac{P}{R} dx - \frac{Q}{R} dy.$$

Следовательно, роль p и q играют $-\frac{P}{R}$ и $-\frac{Q}{R}$. Таким образом, должны иметь:

$$dx\, d\left(\frac{P}{R}\right) + dy\, d\left(\frac{Q}{R}\right) = 0$$

или

$$R(dx dP + dy dQ) - (P dx + Q dy)\, dR = 0.$$

Заменяя обратно: $-(P dx + Q dy)$ через $R dz$., получаем:

$$R(dx dP + dy dQ + dz dR) = 0.$$

$R \neq 0$ и может быть отброшено. Вывод применим и в том случае, если условия интегрируемости выполнимы.

Вообще мы можем этому уравнению придать несколько иной смысл. Если точке (x, y, z) принадлежит плоскость (4), то точке бесконечно-близкой $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$

$$\begin{gathered}(P + dP)(X - x - dx) + (Q + dQ)(Y - y - dy) + \\ + (R + dR)(Z - z - dz) = 0.\end{gathered} \tag{4'}$$

Предполагая, что эта точка лежит в плоскости (4), имеем, что (1) выполнено, и тогда условие:

$$dx\, dP + dy\, dQ + dz\, dR = 0$$

выражает, что плоскость (4') проходит через точку (x, y, z) (с точностью до бесконечно-малых 3-го порядка). Иными словами, если из точки (xyz) в плоскости (4) бесконечно-мало переместиться по направлению (dx, dy, dz), то точке $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ будет принадлежать плоскость (4'). Перпендикуляр на нее из (x, y, z) будет

$$\frac{-dx(P + dP) - dy(Q + dQ) - dz(R + dR)}{\sqrt{(P + dP)^2 + (Q + dQ)^2 + (R + dR)^2}}.$$

С точностью до бесконечно-малых 3-го порядка (не выписаны члены $\frac{1}{2} d^2P$, $\frac{1}{2} d^2Q$, $\frac{1}{2} d^2R$ и т. д.).

Но так как (dx, dy, dz) по условию выполняют (1), то эта главная часть сводится к

$$\pm \frac{dx\,dP + dy\,dQ + dz\,dR}{\sqrt{\Sigma (P + dP)^2}}.$$

Этот перпендикуляр является величиною 2-го порядка. Он будет величиною 3-го порядка:

$$\frac{1}{2}\,\frac{dx\,d^2P + dy\,d^2Q + dz\,d^2R}{\sqrt{\Sigma (P + dP)^2}}$$

если dx, dy, dz выполняют сверх (1) еще и уравнение:

$$dx\,dP + dy\,dQ + dz\,dR = 0.$$

13. Поверхность $\Delta' = 0$ A. Voss называет ф о к а л ь н о ю п о в е р х н о с т ь ю (Brennfläche), но она, повидимому, не связана с фокальною поверхностью конгруэнции, связанной с *P.-E.* системою.

Поверхность $\Delta' = 0$ отделяет ту область пространства, которая заполнена эллиптическими точками, от области, заполненной гиперболическими.

14. Между определителями Δ' и Δ существует следующее соотношение:

$$\Delta' = 4\Delta + G^2,$$

где G — левая часть условия интегрируемости.

Доказательство этого довольно продолжительно: мы представляем Δ' под видом:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 2P'_x & 2P'_y + (Q'_x - P'_y) & 2P'_z + (R'_x - P'_z) & P \\ 2Q'_x + (P'_y - Q'_x) & 2Q'_y & 2Q'_z + (R'_y - Q'_z) & Q \\ 2R'_x + (P'_z - R'_x) & 2R'_y + (Q'_z - R'_y) & 2R'_z & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix}$$

и разлагаем на сумму 8 определителей:

$$1)\ \begin{vmatrix} 2P'_x & 2P'_y & 2P'_z & P \\ 2Q'_x & 2Q'_y & 2Q'_z & Q \\ 2R'_x & 2R'_y & 2R'_z & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix} = 4\Delta, \quad 2)\ \begin{vmatrix} 2P'_x & Q'_x - P'_y & 2P'_z & P \\ 2Q'_x & 0 & 2Q'_z & Q \\ 2R'_x & Q'_z - R'_y & 2R'_z & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix},$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 0 & 2P'_y & 2P'_z & P \\ P'_y - Q'_x & 2Q'_y & 2Q'_z & Q \\ P'_z - R'_x & 2R'_y & 2R'_z & R \\ 0 & Q & R & 0 \end{vmatrix}, \quad 4)\ \begin{vmatrix} 0 & O'_x - P'_y & 2P'_z & P \\ P'_y - Q'_x & 0 & 2Q'_z & Q \\ P'_z - R'_x & Q'_z - R'_y & 2R'_z & R \\ 0 & 0 & R & 0 \end{vmatrix},$$

$$5)\ \begin{vmatrix} 2P'_x & 2P'_y & R'_x - P'_z & P \\ 2Q'_x & 2Q'_y & R'_y - Q'_z & Q \\ 2R'_x & 2R'_y & 0 & R \\ P & Q & 0 & 0 \end{vmatrix},\quad 6)\ \begin{vmatrix} 2P'_x & Q'_x - P'_y & R'_x - P'_z & P \\ 2Q'_x & 0 & R'_y - Q'_z & Q \\ 2R'_x & Q'_z - R'_y & 0 & R \\ P & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$7)\ \begin{vmatrix} 0 & 2P'_y & R'_x - P''_z & P \\ P'_y - Q'_x & 2Q'_y & R'_y - Q'_z & Q \\ P'_z - R'_x & 2R'_y & 0 & R \\ 0 & Q & 0 & 0 \end{vmatrix},\quad 8)\ \begin{vmatrix} 0 & Q'_x - P'_y & R'_x - P'_z & P \\ P'_y - Q'_x & 0 & R'_y - Q'_z & Q \\ P'_z - R'_x & Q'_z - R'_y & 0 & R \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

6) Равен $-P[(Q'_x - P'_y)R + Q(P'_z - R'_x) + P(-Q'_z + R'_y)]\,(Q'_z - R'_y) =$
$= G\ P(R'_y - Q'_z)$,

4) $\equiv - RG\,(P'_y - Q'_x)$,

7) $\equiv - GQ\,(P'_z - R'_x)$.

Таким образом:

$$(4) + (6) + (7) = -G^2.$$

Точно так же найдем:

$$(2) + (3) + (5) = 2G^2.$$

Итак:

$$\Delta' = 4\Delta + G^2.$$

§ 3. Минимальные кривые (изотропные направления)

15. Если для линейных элементов, выполняющих уравнение:

$$(1)\quad Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

поставим условие:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

то, умножая на R^2 и заменяя dz по (1), получим уравнение:

$$R^2(dx^2 + dy^2) + (Pdx + Qdy)^2 = 0$$

или

$$(P^2 + R^2)^2 + 2PQdxdy + (R^2 + Q^2)^2dy^2 = 0, \tag{16}$$

которое каждой точке подчиняет д в а направления (мнимые), вообще различные и совпадающие только при

$$P^2Q^2 - (P^2 + R^2)(R^2 + Q^2) = 0,$$

т. е. при

$$R^2(P^2 + Q^2 + R^2) = 0,$$

или, если отбросить $R=0$, — решение, введенное при умножении на R^2:

$$P^2+Q^2+R^2=0. \tag{17}$$

Если это последнее выражение обращается тождественно в 0, основные формулы неприменимы.

Плоскость (4):

$$P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0,$$

системы касается изотропного конуса

$$u^2+v^2+w^2=0; \qquad \overline{\omega}=0,$$

в силу (17), она есть изотропная плоскость: таким образом все плоскости такой Р.-Е. системы изотропны.

Возьмем кривую двойной кривизны минимальную, для которой $dx^2+dy^2+dz^2=0$ и, следовательно, $dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z=0$. По тожеству Эйлера:

$$0=(dx^2+dy^2+dz^2)(d^2x^2+d^2y^2+d^2z)^2-(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)^2,$$

т.-е. $0=(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dxd^2y-dyd^2x)^2$, или

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=0,$$

где λ, μ, ν—косинусы углов соприкосновения плоскости осями. Таким образом, если взять кривую минимальную, то ее соприкасающиеся плоскости изотропны и, следовательно, огибают изотропную развертывающуюся.

Для наших Р.-Е. систем отсюда вытекает: асимптотические направления. Р.-Е. системы, в которой $P^2+Q^2+R^2=0$ огибают такие изотропные кривые (кривые минимума), и их Р.-Е. плоскости огибают изотропные развертывающиеся.

§ 4. Сопряженные направления

16. Сопряженными поверхностями в теории поверхностей называют такие, которые связаны так, что одно есть направление касательной, к кривой, начерченной на поверхности в точке ее, а другое — хзрактеристика развертывающейся, касающейся поверхности вдоль этой кривой. Так как в нашей системе нет ни поверхности, ни кривой на ней, ни развертывающейся, то надо посмотреть, как строятся сопряженные направления по элементам.

Берем некоторую точку поверхности и некоторое направление в этой точке к ней касательное. Оно лежит в касательной плоскости, и, перейдя по нему в бесконечно-близкую точку, получим в ней вторую касательную плоскость, которая пересекается с первой по прямой, вообще отличной от исходного направления и являющеюся именно характеристикой развертывающейся, огибаемой касательными вдоль кривой плоскостями, — оно и будет направлением, сопряженным первому.

В бесконечно-малом, следовательно, можно и не говорить о кривой и развертывающейся, а только о двух направлениях: берем в некотором направлении в касательной плоскости бесконечно-близкую точку, и соответствующая касательная плоскость пересекается с первой по прямой, сопряженной первому направлению (при чем симметричность связи сама по себе еще не указывает взаимности). Такое определение вполне приложимо к P.-E. системам.

Берем в плоскости, принадлежащей точке (x, y, z), произвольную проходящую через (x, y, z) прямую и на ней бесконечно-близкую к (x, y, z) точку $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$. Очевидно, если плоскость определена уравнением (4), то выполнено (1) $Pdx+Qdy+Rdz=0$.

Второй точке соответствует плоскость:

$$(P+dP)(X-x-dx)+(Q+dQ)(Y-y-dy)+$$
$$+(R+dR)(Z-z-dz)=0,$$

которая пересекается с первой по прямой, которой мы хотим найти направление. Прямая:

$$X-x-dx=\delta\,.\,l,\quad Y-y-dy=\delta\,.\,m,\quad Z-z-dz=\delta\,.\,n$$

лежит в первой плоскости, а потому:

$$Pdx+Qdy+Rdz+\delta\,(Pl+Qm+Rn)=0,$$

и так как по (1) $Pdx+Qdy+Rdz=0$ и $\delta\neq 0$, должно быть:

$$Pl+Qm+Rn=0,$$

и сверх того прямая лежит и во второй:

$$\delta\,(Pl+Qm+Rn)+ldP+mdQ+ndR=0$$

Таким образом, имеем еще:

$$ldP+mdQ+ndR=0,$$

т. е.

$$\frac{l}{QdR-RdQ}=\frac{m}{RdP-PdR}=\frac{n}{PdQ-QdP},$$

и так как перемещения вдоль этой прямой $d'x$, $d'y$, $d'z$ пропорциональны l, m, n, то

$$\frac{d'x}{QdR-RdQ}=\frac{d'y}{RdP-PdR}=\frac{d'z}{PdQ-QdP}; \tag{18}$$

вводя множителя пропорциональности S, имеем:

$$Sd'x=QdR-RdQ,\ Sd'y=RdP-PdR,\ Sd'z=PdQ-QdP. \tag{18'}$$

Умножая на P, Q, R соответственно и складывая, имеем:

$$S(Pd'x+Qd'y+Rd'z)=0,$$

или
$$Pd'x + Qd'y + Rd'z = 0, \tag{19}$$
т. е. направление $(d'x, d'y, d'z)$ лежит также в плоскости (4).

Кроме того, эти уравнения, умноженные на dP, dQ, dR, дают:
$$dP\,d'x + dQd'y + dRd'z = 0, \tag{20}$$
т. е. это направление лежит в плоскости:
$$dP(X - x - dx) + dQ\,(Y - y - dy) + dR\,(Z - z - dz) = 0.$$

Между двумя направлениями у с т а н о в л е н а п р о е к т и в н о с т ь, но в отличие от случая поверхностей взаимности между ними не существует — п р о е к т и в н о с т ь н е и н в о л ю ц и о н н а я.

Если бы хотели избежать безконечно малых, то имели бы:
$$\frac{l}{(QR'_x - RQ'_x)L + (QR'_y - RQ'_y)M + (QR'_z - RQ'_z)N} = \\ = \frac{m}{(RP'_x - PR'_x)L + (RP'_y - PR'_y)M + (RP'_z - PR'_z)N} = \\ = \frac{n}{(PQ'_x - QP'_x)L + (PQ'_y - QP'_y)M + (PQ'_z - QP'_z)N}, \tag{21}$$
где L, M, N означают косинусы углов направления dx, dy, dz с осями.

18. Двойные элементы этой проективности определяются условиями:
$$S\,.\,L = (QR'_x - RQ'_x)\,L + (QR'_y - RQ'_y)\,M + (QR'_z - RQ'_z)\,N$$
и т. д., где S общее значение 3-х отношений при $l = L$ и т. д.

Совместность этих уравнений требует уничтожения определителя.
$$0 = \begin{vmatrix} (QR'_x - RQ'_x) - S & QR'_y - RQ'_y & QR'_z - RQ'_z \\ RP'_x - PR'_x & (RP'_y - PR'_y) - S & RP'_z - PR'_z \\ PQ'_x - QP'_x & PQ'_y - QP'_y & (PQ'_z - QP'_z) - S \end{vmatrix}. \tag{22}$$
Здесь свободный член:
$$K = \begin{vmatrix} QR'_x - RQ'_x, & QR'_y - RQ'_y, & QR'_z - RQ'_z \\ RP'_x - PR'_x & RP'_y - PR'_y, & RP'_z - PR'_z \\ PQ'_x - QP'_x, & PQ'_y - QP'_y, & PQ'_z - QP'_z \end{vmatrix} \equiv$$
$$\equiv \begin{vmatrix} P'_x & Q'_x & R'_x \\ P'_y & Q'_y & R'_y \\ P'_z & Q'_z & R'_z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0\,, & -P, & Q \\ R\,, & 0\,, & -P \\ -Q, & P, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
ибо второй множитель равен нулю.

Таким образом, уравнение, определяющее S для двойных элементов, сводится к

$$-S^3 + S^2 G - \Delta . S = 0,$$

или по сокращении на $-S$:

$$S^2 - G . S + \Delta = 0, \tag{26}$$

где

$$G = (QR'_x - RQ'_x) + (RP'_y - PR'_y) + (PQ'_z - QP'_z) = P(Q'_z - R'_y) +$$

$$+ Q(R'_x - P'_z) + R(P'_y - Q'_x) \equiv \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \Delta = {} & (QR'_x - RQ'_x)(RP'_y - PR'_y) + (QR'_x - RQ'_x)(PQ'_z - QP'_z) + \\ & + (RP'_z - PR'_z)(PQ'_z - QP'_z) - (QR'_z - RQ'_z)(PQ'_x - QP'_x) - \\ & - (RP'_z - PR'_z)(PQ'_y - QP'_y) - (QR'_y - RQ'_y)(RP'_x - PR'_x) = \\ = {} & P^2(Q'_y R'_z - R'_y Q'_z) + Q^2(P'_x R'_z - R'_x P'_z) + R^2(P'_x Q'_y - Q'_x P'_y) + \\ & + PQ\{R'_y P'_z - R'_z P'_y) + (Q'_z R'_x - R'_z Q'_x)\} + \\ & + PR\{(P'_y Q'_z - Q'_y P'_z) + (Q'_y P'_x - P'_y Q'_x)\} + \\ & + QR\{(Q'_x P'_z - P'_x Q'_z) + (P'_x R'_y - P'_y R'_x)\}, \end{aligned}$$

что равносильно:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} P'_x & P'_y & P'_z & P \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z & Q \\ R'_x & Q'_y & R'_z & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix}.$$

Итак, уравнение для S:

$$S^2 - G . S' - \Delta = 0.$$

Оно имеет вещественные корни при $G^2 + 4\Delta > 0$,
„ „ мнимые сопряженные при $G^2 + 4\Delta < 0$,
„ „ равные „ при $G^2 + 4\Delta = 0$.

В первом случае проективность г и п е р б о л и ч е с к а я, во втором — э л л и п т и ч е с к а я и в третьем — п а р а б о л и ч е с к а я.

Так как

$$G^2 + 4\Delta = \Delta',$$

то данная на основании понятия о сопряженных линиях классификация точек пространства совпадает с тою, которую мы получили выше, исходя из понятия об а с и м п т о т и ч е с к и х л и н и я х.

19. И в том и в другом случае мы приходим к результату, совершенно не связывая с понятием об индикатриссе Дюпена, которая, разумеется, в данном случае отпадает так, как она обычно вводится.

И потому, этот картинный прием в теории поверхностей может быть обойден. Надо признать, что он в обычном виде вносит некоторую нестройность в изложение теории кривизны (связывать или не связывать ее с соприкасающимся параболоидом), — в ней внимание обращается не на распределение точек в отношении нормали, а распределение точек поверхности в отношении касательной плоскости, когда мы берем параллельные сечения касательной плоскости и получаем в случае эллиптической точки, что точки поверхности вблизи ее лежат по одну сторону касательной плоскости, — в случае гиперболической — по обе, располагаясь в дополнительных углах асимптотических направлений. В дальнейшем (§ 6) мы к этому вернемся в другом аспекте.

20. Возвращаемся к уравнениям (18′):

$$Sd'x = QdR - RdQ,\ Sd'y = RdP - PdR,\ Sd'z = PdQ - QdP \qquad (18')$$

и выведенным из них соотношениям (19) и (20).

Обменим в них места dx, dy, dz и $d'x$, $d'y$, $d'z$. Первое из этих двух заменится на (1) (основное), а второе перепишем:

$$\begin{aligned} d'x(P'_x dx + Q'_x\, dy + R'_x dz) + d'y(P'_y dx + Q'_y dy + \\ + R'_y dz) + d'z(P'_z dx + Q'_z dy + R'_x dz) = 0. \end{aligned} \qquad (20')$$

Выражение это совпадет с предыдущим (20), если

$$P'_y = Q'_x, \quad R'_x = P'_z, \quad Q'_z = R'_y.$$

Это выражает, что левая часть (1) точный дифференциал. Но, учитывая, что это выражение и (18) должно быть равно нулю, заметим, что не должно происходить изменения при таком обмене dx, dy, dz и $d'x$, $d'y$, $d'z$ в выражении:

$$dPd'x + dQd'y + dRd'z + (Pd'x + Qd'y + Rd'z)(\lambda dx + \mu dy + \nu dz),$$

при произвольных λ, μ, ν, т. е. должно быть:

$$P'_y + P\mu = Q'_x + Q\lambda,\ \ P'_z + P\,.\,\nu = R'_x + R\,.\,\lambda,\ \ Q'_y + Q\nu = R'_x + R\mu,$$

что можно переписать:

$$\begin{aligned} P'_y - Q'_x &= Q\lambda - P\mu, \\ R'_x - P'_z &= P\,.\,\nu - R\lambda, \\ Q'_z - R'_y &= R\mu - Q\nu. \end{aligned}$$

Эти уравнения в отношении λ, μ, ν неразрешимы, вообще говоря.

Множим первое на R, второе на Q, третье на P и складываем; при этом λ, μ, ν исключаются, и имеем:

$$R(P'_y - Q'_x) + Q(R'_x - P'_z) + P(Q'_z - R'_y) \equiv G = 0.$$

Таким образом, проективное соответствие будет инволюционным при условии $G = 0$.

Иными словами, сопряженные направления будут взаимно-сопряженными лишь в случае выполнения условия интегрируемости.

21. Направления совпадающих сопряженных линий (или двойных линий проективного соответствия), таким образом, приводятся к виду (полагая в (20) или (21)) $dx = d'x$, $dy = d'y$, $dz = d'z$:

$$dx\,dP + dy\,dQ + dz\,dR = 0,$$

т. е. это найденные выше направления главных касательных (асимптотические линии). Понятно, что основанные на тех и других соображениях классификации точек пространства совпадают.

22. Много нагляднее получаем представление о нашем проективном соответствии, приняв снова M за (0, 0, 0) и соответствующую плоскость (4) за плоскость XOY. Тогда $P = 0$, $Q = 0$, и по (1) $dz = 0$ (ибо $R \neq 0$ — иначе точка особенная).

Уравнения соответствия принимают вид:

$$\begin{aligned} S\,.\,d'x &= -R(Q'_x dx + Q'_y dy), \\ S\,.\,d'y &= R(P'_x dx + P'_y dy). \end{aligned} \tag{24}$$

Исключая S, имеем:

$$d'(x)\,(P'_x dx + P'_y dy) + d'y\,(Q'_x dx + Q'_y dy) = 0$$

или

$$P'_x dx d'x + dx d'y\,.\,Q'_x + d'x dy\,.\,P'_y + Q'_y dy d'y = 0.$$

Двойные элементы этого соответствия определяются квадратным уравнением:

$$\begin{vmatrix} Q'_x + \dfrac{S}{R} & Q'_y \\ P'_x & P'_y - \dfrac{S}{R} \end{vmatrix} = 0 \equiv \frac{S^2}{R^2} - \frac{S}{R}(Q'_x - P'_y) + Q'_x P'_y - P'_x Q'_y = 0.$$

Или уравнением для $\dfrac{dy}{dx}$:

$$Q'_y dy^2 + (P'_y - Q'_x)\,dx dy + P'_x dx^2 = 0.$$

Легко видеть, что соответствие (24) инволюционно, если $(P'_y - Q'_x) = 0$ к чему теперь сводится условие интегрируемости.

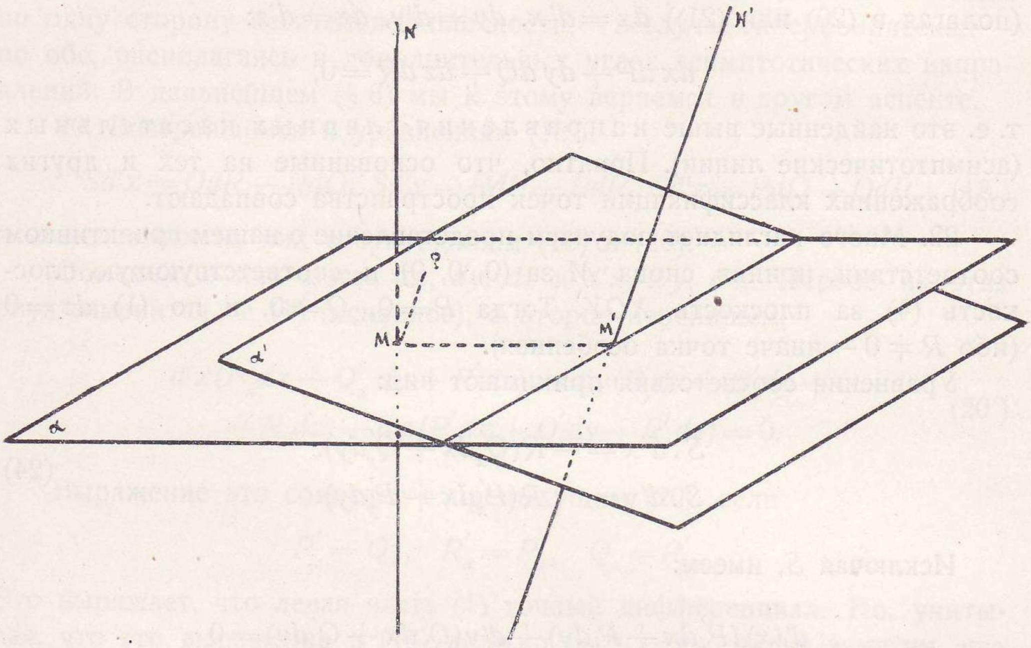
Снова получили:

$$G=0.$$

Только при условии интегрируемости сопряженность взаимна.

§ 5. Кривизна. Главные сечения. Полная и средняя кривизна

23. Если бы при перемещении в плоскости α принадлежащие этим точкам плоскости системы сохранялись, мы имели бы случай, анало-



Черт. 1

гичный плоским системам. Пусть при перемещении по некоторому направлению в плоскости (4) мы получаем новую плоскость:

$$0=(P+dP)(X-x-dx)+(Q+dQ)(Y-y-dy)+ \\ +(R+dR)(Z-z-dz)=0. \tag{4'}$$

Косинусы углов нормали NM и первой плоскости пропорциональны P, Q, R, для новой — $N'M'$ пропорциональны $P+dP$, $Q+dQ$, $R+dR$.

За меру кривизны примем предел отношения:

$$\frac{\text{угол}\,(NM, N'M')}{MM'}.$$

Можно искать угол прямой MM' с $N'M'$. Косинус этого угла равен синусу угла между плоскостями.

Имеем:

$$\frac{\cos(N'M', MM')}{ds} = \frac{dx(P+dP)+dy(Q+dQ)+dz(R+dR)}{ds\sqrt{(P+dP)^2+(Q+dQ)^2+(R+dR)^2}},$$

и так как (dx, dy, dz) взято в (4), то $Pdx+Qdy+Rdz=0$, и искомое выражение принимает в пределе вид $\left(\text{мы полагаем это отношение} = \frac{1}{\varrho}\right)$:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{dxdP+dydQ+dzdR}{ds^2\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}.$$

Оно, отметим, неприменимо к минимальным линиям.

Эта кривизна системы в определенном направлении есть не что иное, как первая кривизна кривой системы, касающейся плоскости (4) в направлении (dx, dy, dz), лежащем в этой плоскости.

Легко можно было бы получить это выражение, применяя тот же прием, каким выводится в дифференциальной геометрии выражение радиуса кривизны кривой на поверхности.

Из точки M опустим перпендикуляр MP на плоскость (4′), $M'Q \perp MP$ и в плоскости, проходящей через MP и $M'Q$, проводим прямую $MQ \perp MM'$. Тогда из подобия треугольников MPM' и $MM'Q$ имеем:

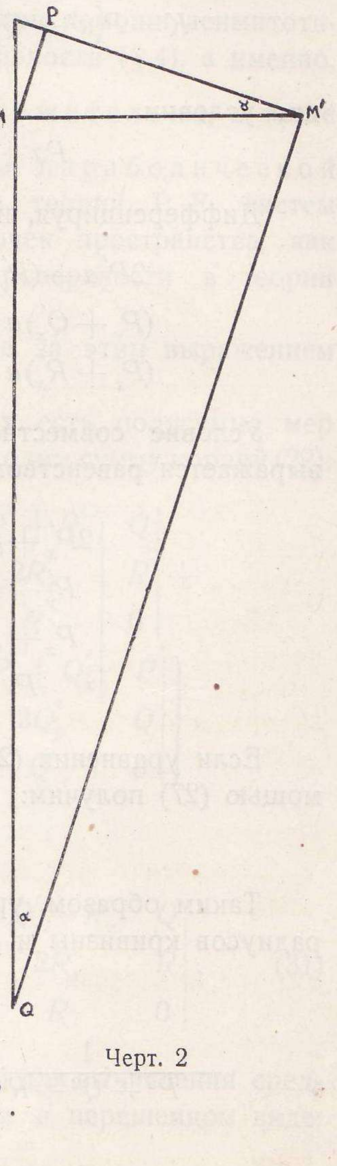
$$\frac{MM'}{M'Q} = \frac{MP}{MM'}.$$

Отсюда:

$$\frac{1}{M'Q} = \frac{MP}{MM'^2}.$$

Угол $\alpha = \angle PM'M = M'QM$ есть угол между двумя касательными MM' и MP', т. е. угол смежности, а потому $M'Q = \frac{MM'}{\sin\alpha}$ является радиусом кривизны в пределе $\alpha = 0$. Принимая M' за элемент дуги кривой, таким образом, получим:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{(P+dP)\,dx+(Q+dQ)dy+(R+dR)\,dz}{ds^2\sqrt{(P+dP)^2+(Q+dQ)^2+(R+dR)^2}}.$$



Черт. 2

Или с помощью (1′)

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{dx\,dP+dy\,dQ+dz\,dR}{ds^2\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}.$$

Два выражения, как видим, совпадают. Если расписать более подробно, будем иметь:

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{P'_x dx^2+Q'_y dy^2+R'_z dz^2+dxdy(P'_y+Q'_x)+dxdz(P'_z+R'_x)+dydz(Q'_z+R'_y)}{ds^2\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}. \quad (25)$$

24. Как и в случае поверхностей, вращая прямую MM', будем менять ϱ Наибольшее и наименьшее его значение назовем главными радиусами.

Направление радиусов кривизны главных сечений ищем обычным путем.

Ищем максимум-минимум выражения (25), при условии (1), — иначе говоря, ищем максимум-минимум выражения:

$$K=P'_x a^2+Q'_y b^2+R'_z c^2+(P'_y+Q'_x)ab+(P'_z+R'_x)ac+ +(Q'_z+R'_y)bc \quad (26)$$

при условии

$$Pa+Qb+Rc=0, \quad a^2+b^2+c^2=1. \quad (27)$$

Дифференцируя, имеем:

$$\left.\begin{aligned} 2P'_x a+(P'_y+Q'_x)b+(P'_z+R'_x)c+\lambda P+\mu a=0 \\ (P'_y+Q'_x)a+2Q'_y b+(Q'_z+R'_y)c+\lambda Q+\mu b=0 \\ (P'_z+R'_x)a+(Q'_z)+R'_y)b+2R'_z c+\lambda R+\mu c=0 \end{aligned}\right\}. \quad (28)$$

Условие совместности этих уравнений в отношении a, b, c, λ выражается равенством нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} 2P'_x+\mu & P'_y+Q'_x & P'_z+R'_x & P \\ P'_y+Q'_x & 2Q'_y+\mu & Q'_z+R'_y & Q \\ P'_z+R'_x & Q+R'_y & 2R'_z+\mu & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix}=0. \quad (29)$$

Если уравнения (28) помножим соответственно на a, b, c, то с помощью (27) получим:

$$2K+\mu=0.$$

Таким образом, уравнение (29) дает нам выражение для главных радиусов кривизны и его свободный член:

$$-\frac{1}{P^2+Q^2+R^2}\begin{vmatrix} 2P'_x & P'_y+Q'_x & P'_z+R'_x & P \\ P'_y+Q'_x & 2Q'_y & Q'_z+R'_y & Q \\ P'_z+R'_x & Q'_z+R'_y & 2R'_z & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix}=4K_1K_2 \quad (30)$$

и так как $K=\frac{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{\varrho}$, то произведение главных радиусов кривизны (выражение соответствующее Гауссовой кривизне) получает вид:

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}=-\frac{\Delta'}{4(P^2+Q^2+R^2)^2}. \tag{30'}$$

Таким образом, если $\Delta'>0$, выражение $\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}<0$, если $\Delta'<0$, напротив $\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}>0$ и если $\Delta'=0$, $\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}=0$.

Таким образом, рассматривая выражение $\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}$, мы приходим к такой же классификации точек пространства, как и при помощи асимптотических линий (§ 2, n° 9) и при помощи проективности (§ 4), а именно, величина $\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}$ в точке эллиптической положительна, в точке гиперболической отрицательна и в параболической равна нулю. Оно играет, таким образом, в теории Р.-Е. систем такую же роль в отношении классификации точек пространства, как полная кривизна для классификации точек поверхности в теории поверхностей.

Это оправдывает в то же время сохранение за этим выражением наименования полной кривизны Р.-Е. системы.

25. Средняя кривизна в поверхностях есть полусумма мер кривизны главных нормальных сечений. Здесь находим сумму корней (29):

$$2(K_1+K_2)=\frac{1}{P^2+Q^2+R^2}\left\{\begin{vmatrix} 2Q'_y & Q'_z+R'_y & Q \\ Q'_z+R'_y & 2R'_z & R \\ Q & R & 0\end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix} 2P'_x & P'_z+R'_x & P \\ P'_z+R'_x & 2R'_y & R \\ P & R & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2P'_x & P'_y+Q'_x & P \\ P'_y+Q'_x & 2Q'_y & Q \\ P & Q & 0\end{vmatrix}\right\},$$

и так как $K=\frac{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{2\varrho}$, то

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\frac{1}{(P^2+Q^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\sum\begin{vmatrix} 2Q'_y & Q'_z+R'_y & Q \\ Q'_z+R'_y & 2R'_z & R \\ Q & R & 0\end{vmatrix}. \tag{31}$$

Формула эта дает довольно удобный способ для вычисления средней кривизны поверхности, заданной уравнением в нерешенном виде:

$$P(x,\ y,\ z)=0.$$

П р и м е р. Эллипсоид.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Здесь

$$P=\frac{2x}{a^2},\ Q=\frac{2y}{b^2},\ R=\frac{2z}{c^2}.$$

26. Можно показать, что два экстремальных направления взаимно-перпендикулярны. Для доказательства примем снова точку $(x, y, z,)$ за начало координат, а принадлежащую ей плоскость за плоскость XOY-ов. Тогда для этой точки $P=0$, $Q=0$ (1) сводится к $Rdz=0$, и так как можно принять, что $R\neq 0$ (оставляем в стороне случай $P=Q=R=0$), то $dz=0$ (так и должно быть, ибо прямая лежит в плоскости XOY).

Тогда уравнения, определяющие экстремальные направления, сводятся к

$$\begin{vmatrix} 2P'_x dx+(Q'_x+P'_y)dy & 0 & dx \\ (P'_y+Q'_x)dx+2Q'_y dy & 0 & dy \\ (P'_z+R'_x)dx+(Q'_z+R'_y)dy & R & 0 \end{vmatrix}=0$$

или

$$0=-R\begin{vmatrix} 2P'_x dx+(Q'_x+R'_y)dy & dx \\ (P'_y+Q'_x)dx+2Q'_y dy & dy \end{vmatrix}\equiv R\{(P'_y+Q'_x)(dy^2-dx^2)+ +2(P'_x-Q'_y)\}dxdy=0; \quad (33)$$

ясно, что

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1\times\left(\frac{dy}{dx}\right)_2=-1,$$

что и требовалось доказать.

В этом снова можно видеть аналогию со случаем поверхности. Теперь нетрудно показать, что эти экстремальные направления делят пополам угол между асимптотическими.

Действительно, уравнение последних для нашего выбора координатных осей примет вид:

$$dx\,dP+dy\,dQ=0,$$

или

$$P'_x dx^2+(P'_y+Q'_x)dx\,dy+Q'_y dy^2=0.$$

Примем теперь „главные направления“ за оси координат OX. OY.

Уравнение (33) должно иметь корни 0 и ∞, а потому должно быть

$$P'_y+Q'_x=0.$$

Но тогда уравнение асимптотических линий сводится к

$$P'_x dx^2+Q'_y dy^2=0,$$

т. е. дает:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=\pm\sqrt{-\frac{P'_x}{P'_y}},$$

т. е. два направления симметричны относительно осей, которые, таким образом, делят углы между ними пополам.

27. *Теорема Эйлера.* Примем данную точку за начало, плоскость, принадлежащую этой точке по (1), т. е. (4), — за плоскость XOY, условное уравнение:

$$a^2+b^2=1 \text{ (при } P=0,\ Q=0,\ c=0)$$

дает

$$a=\cos\alpha,\ b=\sin\alpha$$

и, следовательно:

$$K=P'_x\cos^2\alpha+(P'_y+Q'_x)\cos\alpha\sin\alpha+Q'_y\sin^2\alpha.$$

Примем главные направления за оси; тогда $P'_y+Q'_x=0$. Предыдущая формула (26) дает:

$$\frac{R^2}{\varrho}=P'_x\cos^2\alpha+Q'_y\sin^2\alpha.$$

Полагая здесь $\alpha=0$, получаем $\frac{R}{\varrho_1}=P'_x$, полагая $\alpha=\frac{\pi}{2}$: $\frac{R}{\varrho_2}=Q'_y$.

Таким образом,

$$\frac{1}{\varrho_\alpha}=\frac{1}{\varrho_1}\cos^2\alpha+\frac{1}{\varrho_2}\sin^2\alpha.$$

Для перпендикулярного направления $\alpha'=\alpha+\frac{\pi}{2}$; отсюда найдем:

$$\frac{1}{\varrho_{\alpha+\frac{\pi}{2}}}=\frac{1}{\varrho_1}\sin^2\alpha+\frac{1}{\varrho_2}\cos^2\alpha.$$

Откуда:

$$\frac{1}{\varrho_\alpha}+\frac{1}{\varrho_{\alpha+\frac{\pi}{2}}}=\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\mathrm{Const}.$$

Теорема Эйлера имеет место в Р.-Е. системе.

§ 6. Индикатриса

28. Если формулу (25) применим к тому случаю, когда берем точку за начало, а соответствующую ей плоскость системы за плоскость XOY, то выражение радиуса кривизны упрощается:

$$\frac{1}{\varrho}=P'_x\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+(P'_y+Q'_x)\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{dy}{ds}\right)+Q'_y\left(\frac{dy}{ds}\right)^2.$$

Отложим на направлении $(dx,\ dy,\ 0)$ в плоскости XOY длину, равную $\sqrt{|\varrho|}$. Тогда $\xi=\frac{dx}{ds}\sqrt{|\varrho|}$, $\eta=\frac{dy}{ds}\sqrt{|\varrho|}$ будут координатами точки кривой:

$$P'_x\xi^2+(P'_y+Q'_x)\xi\eta+Q'_y\eta^2=\pm 1 \tag{A}$$

в плоскости XOY. Эта кривая дает возможность следить за изменением радиуса кривизны при изменении направления прямой, выходящей из начала. Тип кривой зависит от знака:

$$(P'_y+Q'_x)^2-4P'_xQ'_y.$$

Если

$$(P'_y+Q'_x)^2-4P'_xQ'_y<0,$$

кривая имеет асимптоты мнимые, т. е. будет эллипсом (точку в этом случае мы назвали эллиптической).

Если $(P'_y+Q'_x)^2-4P'_xQ>0$, асимптоты вещественны, кривая является гиперболой, точке в этом случае мы придали название гиперболической. Наконец, если $(P'_y+Q'_x)^2-4P'_xQ'_y=0$, имеет тип параболы, — кривая представляет пару параллельных прямых, — точке мы придали название параболической. Итак, тип точки и тип построенной кривой совпадает, и кривая по справедливости является индикатрисой.

Примечание. Идею такого получения индикатрисы для системы интегральных кривых (1) мне дало соответственное получение индикатрисы у Vessiot'a — Leçons de géométrie supérieure, 2-e éd. 1919, p. 37.

§ 7. Умбилики

29. Радиус кривизны будет по всем направлениям одинаков, если коэффициенты при dx^2, $dxdy$ и dy^2 в числителе и знаменателе выражения для $\frac{1}{\varrho}$ будет одинаков. Для такой точки кривизна одинакова по всем направлениям в плоскости системы, но может быть различна для различных точек пространства, обладающих этим свойством. Такие точки можно назвать умбиликами системы, и мы убеждаемся, что они образуют в пространстве линию, называемую умбиликальной линией. Ее уравнения мы получаем, подставляя в

$$dx\,dP+dy\,dQ+dz\,dR$$

по (1)

$$Pdx+Qdy+Qdz=0$$

$$dz=-\frac{Pdx+Qdy}{R}$$

и выражая, что коэффициенты при dx^2, $dxdy$ и dy^2 пропорциональны соответствующим коэффициентам в ds^2, которые при такой же подстановке принимают вид:

$$ds=\frac{(P^2+R^2)\,dx^2+2PQdxdy+(Q^2+R^2)dy^2}{R^2}.$$

Таким образом, имеем:

$$\frac{R(RP'_x - PP'_z) + P(PR'_z - RR'_x)}{R^2 + P^2} =$$

$$= \frac{R\{(RP'_y - PR'_y) + (RQ'_x - QR'_x)\} + Q(PR'_z - RP'_z) + P(QR'_z - RQ'_z)}{2PQ} =$$

$$= \frac{R(RQ'_y - QR'_z) + Q(QR'_z - RR'_y)}{R^2 + Q^2}.$$

Если подставим $R = 1$, $P = -p$, $Q = -q$ (p, q зависят только от x и y), то получим отсюда обычные уравнения для умбилик:

$$\frac{-r}{1+p^2} = \frac{-s}{2pq} = \frac{-t}{1+q^2}.$$

Пример. В качестве иллюстрации можно приложить этот метод к вычислению шаровых точек эллипсоида.

§ 8. Кривизна поверхностей

30. C. Neumann в статье Ueber correspondierende Flächenelemente (Math. Ann. XI. S. 306—8) дает интересные формулы.

Пусть соответствие между x, y, z и ξ, η, ζ устанавливается уравнениями (1):

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y, z), \\ \eta &= \psi(x, y, z), \\ \zeta &= \chi(x, y, z), \end{aligned}$$

где φ, ψ, χ — данные функции их аргументов.

Тогда между соответственными элементами объемов существует соотношение:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)}.$$

Аналогичное соотношение существует между поверхностными элементами:

$$\frac{d\sigma}{ds} = (-1) \begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y & \xi'_z & \alpha \\ \eta'_x & \eta'_y & \eta_z & \beta \\ \zeta'_x & \zeta'_y & \zeta_z & \gamma \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix},$$

где a, b, c и α, β, γ суть косинусы углов с осями нормалей к ds и $d\sigma$.

Доказательства этой формулы C. Neumann не приводит (*).

31. К. Нейманн указывает на применение этой формулы к вычислению Гауссовой кривизны (согласно Гауссовой theorema egregium), — при сферическом изображении, когда следовательно:

$$\xi = \frac{1}{X} f'_x, \quad \eta = \frac{1}{X} f'_y, \quad \zeta = \frac{1}{X} f'_z,$$

где

$$X = \sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z},$$

a, b, c и α, β, γ при этом равны те и другие соответственно ξ, η, ζ так что

$$K = \frac{d\sigma}{ds} = (-1) \begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y & \xi'_z & \xi \\ \eta'_x & \eta'_y & \eta'_z & \eta \\ \zeta'_x & \zeta'_y & \zeta'_z & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix}.$$

(*) Оно было дано в семинаре по геометрии участником его ст. Я. П. Бланком. Вот оно: рассмотрим на поверхности 1-ой точку с координатами x, y, z и бесконечно-близкие к ней на координатных линиях $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$, точки:

$$(x + x'_u du,\ y + y'_u du,\ z + z'_u du)$$

и

$$(x + x'_v dv,\ y + y'_v dv,\ z + z'_v dv).$$

Удвоенная площадь $\triangle$-ка, ими образуемого (или площадь параллелограмма, на них построенного, имеет своими проекциями на плоскости координат:

$$\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} dudv, \quad \begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv, \quad \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv,$$

т. е.

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} dudv, \quad \frac{D(x, z)}{D(u, v)} dudv, \quad \frac{D(y, z)}{D(u, v)} dudv,$$

а площадь самого параллелограмма

$$H_{dudv} = \sqrt{\left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(x, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2} . dudv.$$

Таким образом, $ds = Hdudv$.

Если a, b, c косинусы углов нормали с осями OX, OY, OZ, то

$$aH = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad bH = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \quad cH = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

Так как для 2-ой поверхности $d\sigma = Hdudv$ и $\alpha H = \frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)}$, $\beta H = \frac{D(\zeta, \xi)}{D(u, v)}$, $\gamma H = \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)}$.

Замечая, что в силу соотношения:

$$\begin{aligned} \xi &= f(u, v) = \varphi(x, y, z) \\ \eta &= g(u, v) = \psi(x, y, z) \\ \zeta &= h(u, v) = \chi(x, y, z), \end{aligned}$$

Если ввести предыдущие выражения, получим:

$$K = \frac{(-1)}{T^2} \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} & f'_x \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f''_{yz} & f'_y \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{z^2} & f'_z \\ f'_x & f'_y & f'_z & 0 \end{vmatrix},$$

если $T = P^2 + Q^2 + R^2$.

Если мы рассматриваем систему поверхностей (или одну), заданную уравнением (1)

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

то получаем:

$$K = \frac{(-1)}{(P^2 + Q^2 + R^2)^2} \begin{vmatrix} P'_x & P'_y & P'_z & P \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z & Q \\ R'_x & R'_y & R'_z & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix}.$$

где

$$x = F(u, v), \quad y = G(u, v), \quad z = H(u, v),$$

по свойству определителей Якоби, имеем:

$$\alpha H = \frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)} = \frac{D(\eta, \zeta)}{D(x, y)} \cdot \frac{D(x, y)}{D(u, v)} + \frac{D(\eta, \zeta)}{D(z, x)} \cdot \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + \frac{D(\eta, \zeta)}{D(y, z)} \cdot \frac{D(y, z)}{D(u, v)}.$$

Точно также

$$\beta H = \frac{D(\zeta, \xi)}{D(u, v)} = \frac{D(\zeta, \xi)}{D(x, y)} \cdot \frac{D(x, y)}{D(u, v)} + \frac{D(\zeta, \xi)}{D(z, x)} \cdot \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + \frac{D(\zeta, \xi)}{D(y, z)} \cdot \frac{D(y, z)}{D(u, v)},$$

$$\gamma H = \frac{D(\zeta, \eta)}{D(u, v)} = \frac{D(\zeta, \eta)}{D(x, y)} \cdot \frac{D(x, y)}{D(u, v)} + \frac{D(\zeta, \eta)}{D(z, x)} \cdot \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + \frac{D(\zeta, \eta)}{D(y, z)} \cdot \frac{D(y, z)}{D(u, v)}$$

Вводя значения aH, bH, cH, имеем:

$$\alpha H = \frac{D(\eta, \zeta)}{D(x, y)} cH + \frac{D(\eta, \zeta)}{D(z, x)} bH + \frac{D(\eta, \zeta)}{D(y, z)} aH,$$

$$\beta H = \frac{D(\zeta, \xi)}{D(x, y)} cH + \frac{D(\zeta, \xi)}{D(z, x)} bH + \frac{D(\zeta, \xi)}{D(y, z)} aH,$$

$$\gamma H = \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} cH + \frac{D(\xi, \eta)}{D(z, x)} bH + \frac{D(\xi, \eta)}{D(y, z)} aH.$$

Умножая соответственно на α, β, γ и складывая, получим:

$$\frac{H}{H} = \alpha c \frac{D(\eta, \zeta)}{D(x, y)} + \alpha b \frac{D(\eta, \zeta)}{D(z, x)} + \alpha a \frac{D(\eta, \zeta)}{D(y, z)} +$$

$$+ \beta c \frac{D(\zeta, \xi)}{D(x, y)} + \beta b \frac{D(\zeta, \xi)}{D(z, x)} + \beta a \frac{D(\zeta, \xi)}{D(y, z)} +$$

$$+ \gamma c \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} + \gamma b \frac{D(\xi, \eta)}{D(z, x)} + \gamma a \frac{D(\xi, \eta)}{D(y, z)} \equiv$$

$$\equiv - \begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y & \xi'_z & \alpha \\ \eta'_x & \eta'_y & \eta_z & \beta \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z & \gamma \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Насколько эта формула удобна для вычисления полной кривизны поверхности заданной уравнением в нерешенном виде, легко заметить на примере эллипсоида. Взяв от уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ (a) дифференциал, имеем: $\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}+\frac{zdz}{c^2}=0$ и для K получаем:

$$\frac{(-1)}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & \frac{x}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & \frac{y}{b^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & \frac{z}{c^2} \\ \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} & 0 \end{vmatrix}.$$

Умножая первый столбец на x, второй на y, третий на z и вычитая из четвертого, получаем с помощью (a):

$$\frac{(-1)}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & 0 \\ \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}.$$

32. Та формула, которую мы вывели выше, совпадает с только что приведенной, только в случае $P'_y=Q'_x$, $P'_z=R'_x$, $Q'_z=R'_y$, — в случае если левая часть (1) есть точный дифференциал.

Разумеется, непосредственное пользование формулой К. Неймана выведенной для отношения двух поверхностных элементов поверхностей данной и преобразованной, может возбудить сомнение. Можно, однако, убедиться в правильности ее применения.

Действительно, если в плоскости (4), принадлежащей точке (x, y, z), вообразим бесконечно-малый параллелограм, со сторонами ds, $d's$, то площадь его $ds=d's\sin(ds, d's)$.

Точке (x, y, z) соответствует точка $\xi=\frac{P}{\sqrt{T}}$, $\eta=\frac{Q}{\sqrt{T}}$, $\zeta=\frac{R}{\sqrt{T}}$, где

$$T=P^2+Q^2+R^2. \tag{a}$$

Формула Неймана говорит только о связи между бесконечно-малым поверхностным элементом принадлежащим точке x и соответствующим бесконечно малым элементом, принадлежащим точке преобразованной. Так как формула (а) именно такое соответствие устанавливает, то применить формулу мы имеем право.

Но у нас получается интересный результат. Произведение мер кривизны главных направлений и отношение элементов бесконечно-малых систем и ее сферического изображения не совпадают. Если за последним сохранить название Гауссовой кривизны, а за первым полной, то можно сказать в точке пространства полная и Гауссова кривизна. Р.-Е. системы вообще не совпадают и становятся равными только в случае, если (1) есть полный дифференциал:

$$1\text{-я} = -\frac{\Delta'}{4(P^2+Q^2+R^2)^2}, \tag{30'}$$

$$2\text{-я} = \frac{(-1)\Delta}{(P^2+Q^2+R^2)^2}.$$

Соотношение

$$\Delta' = 4\Delta + G^2$$

показывает, что в случае интегрируемости эти выражения совпадают, ибо тогда $\Delta' = 4\Delta$.

§ 9. Линии кривизны

33. Линии кривизны в теории поверхностей получаются, исходя из двух определений, приводящих к одним и тем же результатам:

1) Кривые, лежащие на поверхности и имеющие своими касательными направления осей индикатрисы, или все равно, — направления касательных главных нормальных сечений.

2) Линии, в бесконечно-близких точках которых нормали к поверхности пересекаются.

Если перенесем эти определения на рассматриваемые системы интегральных кривых (1), то оказывается, что результаты не совпадают.

1) Линии кривизны как кривые, огибаемые направлениями экстремальных радиусов кривизны.

Уравнения предыдущего параграфа, по умножении на ds и замене $a=\frac{dx}{ds}$, $b=\frac{dy}{ds}$, $c=\frac{dz}{ds}$, принимают вид:

$$2P'_x dx + (P'_y + Q'_x)dx + (P'_z + R'_x)\,dz + \lambda P ds + \mu\, dx = 0,$$
$$(P'_y + Q'_x)\,dx + 2Q'_y dy + (Q'_z + R'_y)\,dz + \lambda\, Q ds + \mu\, dy = 0,$$
$$(P'_z + R'_x)\,dx + (Q'_z + R'_y)\,dy + 2R'_z\,dz + \lambda R ds + \mu\, dz = 0.$$

Эти уравнения совместны в отношении $\lambda\, ds$ и μ, исключая которые, мы придем к соотношению между dx, dy, dz, которое вместе с (1) и определяет искомые линии:

$$\begin{vmatrix} 2P'_x dx + (Q'_x + P'_y)\,dy + (P'_z + R'_x)\,dz, & P & dx \\ (P'_y + Q'_x)\,dx + 2Q'_y dy + (Q'_z + R'_y)\,dz, & Q & dy \\ (P'_z + R'_x)\,dx + (Q'_z + R'_y)\,dy + 2R'_z dz, & R & dz \end{vmatrix} = 0. \tag{35}$$

Получили квадратное уравнение, которое, таким образом, определяет д в е системы кривых, — через каждую точку пространства проходят две таких кривых, которые соответствуют касательным в точке (x, y, z) к линиям, имеющим наибольший и наименьший радиус кривизны.

Как мы убедились выше, эти линии образуют о р т о г о н а л ь н у ю систему и являются биссектрисами углов между асимптотическими линиями. Эти свойства отвечают вполне соответствующим свойствам линий кривизны поверхности.

Заметим, что уравнение (35) может быть переписано:

$$\begin{vmatrix} 2dP+(Q'_x-P'_y)\,dy+(R'_y-P'_z)\,dz, & P, & dx \\ (Q'_x-P'_y)\,dx+2dQ+(R'_y-Q'_z)\,dz, & Q, & dy \\ (P'_z-R'_x)\,dx+(Q'_z-R'_y)\,dy+2dR, & R, & dz \end{vmatrix}=0. \tag{36}$$

Разумеется, совместно с этим мы должны рассматривать (1).

Пример. Для эллипсоида имеем:

$$\begin{vmatrix} dx & \frac{x}{a^2} & 2\frac{dx}{a^2} \\ dy & \frac{y}{b^2} & 2\frac{dy}{b^2} \\ dz & \frac{z}{c^2} & 2\frac{dz}{c^2} \end{vmatrix}=0,$$

или по умножении на $\frac{1}{2}ab^2c^2$:

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ a^2dx & b^2dy & c^2dz \end{vmatrix}\equiv 0\equiv xdydz\,(b^2-c^2)+ydzdx\,(xdydz\,(b^2-c^2)+ +ydzdx\,(c^2-a^2)+zdxdy\,(a^2-b^2)=0,$$

и совместно с $\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}+\frac{zdz}{c^2}=0.$

34. 2) Л и н и и, в д о л ь к о т о р ы х н о р м а л и к п л о с к о с т я м с и с т е м ы п е р е с е к а ю т с я.

Согласно этому определению должны пересекаться прямые;

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}=\frac{Z-z}{R},$$

$$\frac{X-x-dx}{P+dP}=\frac{Y-y-dy}{Q+dQ}=\frac{Z-z-dz}{R+dR},$$

Это условие по известной формуле заменяется:

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ P & Q & R \\ dP & dQ & dR \end{vmatrix}=0. \tag{37}$$

Как видим, это уравнение отлично от предыдущего, которое с ним совпадает при условии:

$$Q'_x - P'_y = 0, \quad R'_x - P'_z = 0, \quad R'_y - Q'_z = 0,$$

т. е., когда (1) есть точный дифференциал. Но не только в этом случае должны кривые совпадать, но и тогда, когда выполнено только условие интегрируемости $G = 0$. В этом не трудно убедиться.

Действительно, разделив (36) на 2, разлагаем его на два определителя:

$$\begin{vmatrix} dP & P & dx \\ dQ & Q & dy \\ dR & R & dz \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (Q'_x - P'_y)\,dy + (R'_x - P'_z)\,dz, & P & dx \\ (P'_y - Q'_x)\,dx + (R'_y - Q'_z)\,dz, & Q & dy \\ (P'_z - R'_x)\,dx + (Q'_z - R'_y)\,dy, & R & dz \end{vmatrix} = 0.$$

Займемся последним определителем. Разлагая его по элементам второго столбца, получим:

$$\begin{aligned} & P\{(R'_y - Q'_z)(dz^2 + dy^2) + dx\,[(P'_y - Q'_x)\,dz + (R'_x - P'_z)\,dy]\} + \\ & + Q\{(P'_z - R'_x)(dx^2 + dz^2) + dy\,[(Q'_z - R'_y)\,dx + (P'_y - Q'_x)\,dz]\} + \\ & + R\{(Q'_x - P'_y)(dy^2 + dx^2) + dz\,[(Q'_z - R'_y)\,dx + (R'_x - P'_z)\,dy]\} \equiv \\ & \equiv Gds^2 + (Pdx + Qdy + Rdz)\,[(Q'_z - R'_y)\,dx + (R'_x - P'_z)\,dy + \\ & (P'_y - Q'_x)\,dz] = 0, \end{aligned}$$

(если в первых слагаемых каждой строки добавим и вычтем по члену $(R'_y - Q'_z)\,dx^2$, $(P'_z - R'_x)dx^2$ и $(Q'_x - P'_y)\,dz$ соответственно).

В силу (1), таким образом, разность двух определителей равна Gds^2 и уничтожается при $G = 0$.

Таким образом, доказано, что **две системы линий, отвечающие двум определениям линий кривизны, совпадают** при $G = 0$, т. е. **при выполнении условия интегрируемости**.

35. Можно убедиться, что **линии кривизны второго определения не будут ортогональны**.

Примем снова точку $M\,(x, y, z)$ за начало координат и соответствующую ей плоскость системы за плоскость XOY. Тогда уравнение (37) приводится для этой точки к виду:

$$\begin{vmatrix} dP & 0 & dx \\ dQ & 0 & dy \\ dR & R & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$R\,[Q'_x dx^2 + (Q'_y - P'_x)\,dxdy - P'_y dy^2] = 0,$$

корни уравнения имеют произведение, равное -1 только при $R\,(Q'_x - P'_y) = 0$ (и, следовательно, вообще не перпендикулярны). Так как при этом G сводится именно к $R(Q'_x - P'_y)$, то можно предвидеть, что линии будут взаимно перпендикулярны только при выполнении условия интегрируемости.

Но при общем положении M это требует несколько длинного счета, Для этого надо, расположив в (37) по степеням dx, dy, dz, исключить dz с помощью (1). Получим:

$$\frac{dx^2}{R^2} PQ\,[RP'_x - PP'_z] + \frac{dxdy}{R^2}[(R'_y Q^2)(RP'_x - PP'_z) + PQ\,(RP'_y - QP'_z)] + \\ + \frac{dy^2}{R^2}[RP'_y - QP'_z)(Q^2 + R^2) = 0.$$

Косинус угла двух направлений пропорционален:

$$dxd'x + dyd'y + dzd'z \equiv \frac{P^2 + R^2}{R^2}dxd'x + (dxd'y + dyd'x)\frac{PQ}{R^2} + \\ + \frac{R^2 + Q^2}{R^2}dyd'y.$$

Если вместо $dxd'x$, $dyd'x$, $dxd'y$, $dyd'y$ ввести коэффициенты предыдущего уравнения, получим после довольно длинных переделок для равенства косинусов нулю:

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d'x}{d's}[P^2 + Q^2 + R^2]\,G = 0.$$

Исключая особенные точки ($P = Q = R = 0$), имеем, что для перпендикулярности двух линий кривизны второго определения должно быть $G = 0$, — но тогда эта система совпадает с первой.

Такой же точно счет для первой системы линий приводит к выражению:

$$P\left(\frac{1}{2}(Q'_z + R'_y)\right) - \frac{1}{2}(Q'_z + R'_z) + Q\left(\frac{1}{2}(P'_z + R'_x) - \frac{1}{2}(P'_z + R'_x)\right) + \\ + R\left(\frac{1}{2}(P'_y + Q'_x) - \frac{1}{2}(Q'_x + P'_y)\right),$$

которое естественно равно нулю, — т. е. линии первой системы взаимно ортогональны, как мы убедились выше.

36. Совокупность прямых:

$$\frac{X - x}{P} = \frac{Y - y}{Q} = \frac{Z - z}{R}, \tag{3}$$

перпендикулярных в точке (x, y, z) к соответствующей плоскости (4), образуют конгруэнцию прямых. Из предыдущего видно, что линии кривизны второго определения дают начало фокальным поверхностям конгруэнций прямых (3), ибо нормали (3) в соседних точках этих кривых пересекаются.

Отсюда: совокупность прямых (3) можно рассматривать, как конгруэнцию нормалей некоторой поверхности, только при выполнении условия интегрируемости $G=0$. И обратно: если (3) представляют конгруэнцию нормалей, то соответствующие линии кривизны второго определения взаимно ортогональны и, следовательно, условие интегрируемости выполнено.

§ 10. Распространение понятия о геодезических линиях на неинтегрируемые системы кривых

37. Геодезические линии являются в дифференциальной геометрии как кривые поверхности, точки которых имеют выпрямляющую плоскость, совпадающую с касательной плоскостью поверхности. Это определение может быть сохранено и здесь: будем искать кривые, в каждой точке которых выпрямляющая плоскость совпадает с принадлежащею этой точке плоскостью системы.

Это значит, что в плоскости

$$P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0 \tag{4}$$

лежит не только касательная к кривой, определяемой направлением dx, dy, dz, — что и выражается уравнением (1):

$$Pdx+Qdy+Rdz=0,$$

но и бинормаль, косинусы углов которой с осями пропорциональны

$$y'z''-z'y'',\ z'x''-x'z'',\ x'y''-y'x'',$$

т. е. имеем:

$$P(y'z''-z'y'')+Q(z'x''-x'z'')+R(x'y''-y'x'')=0,$$

или

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0, \tag{40}$$

или, если (предполагая $R \neq 0$) умножить последний столбец на R и придать первый, умноженный на P, и второй, умноженный на Q:

$$\frac{1}{R}\begin{vmatrix} P & Q & P^2+Q^2+R^2 \\ dx & dy & 0 \\ d^2x & d^2y & Pd^2x+Qd^2y+Rd^2z \end{vmatrix}=0,$$

второй член в третьем столбце 0 вместо $Pdx+Qdy+Rdz$ — в силу (1).

Теперь

$$0=d(Pdx+Qdy+Rdz)\equiv Pd^2x+Qd^2y+Rd^2z+dxdP+$$
$$+dydQ+dzdR,$$

и таким образом имеем как уравнение „геодезических линий“ системы интегральных кривых (1):

$$\begin{vmatrix} P & Q & P^2+Q^2+R^2 \\ dx & dy & 0 \\ d^2x & d^2y & -(dxdP+dydQ+dzdR) \end{vmatrix} = 0.$$

Это выражение можно переписать (если разложить по элементам последнего столбца):

$$(dxdP+dydQ+dzdR)(Pdy-Qdx)=(P^2+Q^2+R^2)(dxd^2y-dyd^2x).$$

Раз выпрямляющая плоскость совпадает с плоскостью Р.-Е. системы, то можно сказать, что геодезическая кривизна этих линий равна нулю, если дать соответствующее определение геодезической кривизны. Эти линии можно, таким образом, считать п р я м е й ш и м и.

38. A. Voss в своих мемуарах Ueber Differentialgleichungen der Mechanik, Math. Ann. 25, 258—286 рассматривает движение в Р.-Е. системе, когда движение точки ограничено условием $\Sigma Pdx=0$, которое, по его мнению, имеет величайшее сходство с типическими примерами связанного движения в теоретической механике.

Если предположим движение при отсутствии внешних сил, то уравнение движения точки, двигающейся с произвольной начальной скоростью c, в системе имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\lambda P,\ \frac{d^2y}{dt^2}=\lambda Q,\ \frac{d^2z}{dt^2}=\lambda R.$$

Траектория описывается с постоянною скоростью c, нормаль Р.-Е. системы лежит постоянно в плоскости кривизны траекторий, которые представляют в то же время форму натянутой в системе, совершенно гибкой нерастяжимой нити. „Они, однако, не будут геодезическими линиями системы, ибо это положение не может быть, очевидно, достигнуто действительным натяжением нити, как на поверхности“ (l. c. 280). Выражение для радиуса кривизны, которое мы вывели раньше, принимает теперь, когда $ds=cdt$, такой вид:

$$\varrho=\frac{c^2\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{\frac{dP}{dt}x'+\frac{dQ}{dt}y'+\frac{dR}{dt}z'}=\frac{c^2}{\lambda\sqrt{P^2+Q^2+R^2}},$$

если вслед за A. Voss'ом положить:

$$\lambda=\frac{\frac{dP}{dt}x'+\frac{dQ}{dt}y'+\frac{dR}{dt}z'}{P^2+Q^2+R^2}.$$

В линейном комплексе $\Sigma x'\frac{dP}{dt}=0$, и, следовательно, $\lambda=0$, вообще же, если направление скорости совпадает с направлением асимптотической линии системы, когда $dxdP + dydQ + dzdR$ обращается в нуль, ϱ обращается в ∞, и мы имеем точку перегиба на траектории.

Далее, можно вычислить и кручение траектории, ибо числитель этого выражения

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \text{ теперь } = \lambda \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ P & Q & R \\ (\lambda P)' & (\lambda Q)' & (\lambda R)' \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ P & Q & R \\ P' & Q' & R' \end{vmatrix},$$

т. е.

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ P & Q & R \\ \frac{dP}{dt} & \frac{dQ}{dt} & \frac{dR}{dt} \end{vmatrix},$$

и потому радиус кручения определяется формулой

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\lambda}{c^2 (P^2 + Q^2 + R^2)} \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ P & Q & R \\ \frac{dP}{dt} & \frac{dQ}{dt} & \frac{dR}{dt} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель, приравненный нулю, дает линии кривизны (второго определения) системы.

Это значит, что, если линия системы есть геодезическая линия (в первом смысле) и в то же время линия кривизны во втором смысле, то радиус кручения $= \infty$, т. е. это кривая плоская.

39. Второе определение: геодезические линии $\equiv$ $\equiv$ кратчайшие линии.

Уравнения геодезических линий, как задачу вариационного исчисления A. Voss дает под видом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = P \frac{d\lambda}{dt} + \lambda [z'(R'_x - P'_z) - y'(P'_y - Q'_x)]$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -Q \frac{d\lambda}{dt} + \lambda [-z'(Q'_z - R'_y) + x'(P'_y - Q'_x)]$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -R \frac{d\lambda}{dt} + \lambda [x'(P'_z - R'_x) + y'(Q'_z - R'_y)]$$

(l. c., стр. 282).

Не трудно воспроизвести этот вывод. Надо найти экстремум интеграла

$$\delta \int [1 + p(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \lambda (Px' + Qy' + Rz')] ds = 0.$$

Эйлеровы уравнения будут:

$$\lambda(x'P'_x+y'Q'_y+z'R'_z)-\lambda'P-\lambda(P)'-2\mu'x'-2\mu x''=0$$

и еще два для y и z

$$\lambda(x'P'_y+y'Q'_y+z'R'_y)-\lambda'Q-\lambda(Q)'-2\mu'y'-2\mu y''=0$$

$$\lambda(x'P'_z+y'Q'_z+z'R'_z)-\lambda'R-\lambda(R)-2\mu'z'-2\mu z''=0.$$

умножая на x', y, z соответственно и суммируя, получим $-2\mu'=0$, $2\mu=\mathrm{const}$.

Итак, уравнения приняли вид при выборе $2\mu=+1$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\lambda'P+\lambda[y'(Q'_x-P'_y)+z'(R'_x-P'_z)]$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\lambda'Q+\lambda[x'(P'_y-Q'_x)+z'(R'_y-Q'_z)]$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-\lambda'R+\lambda[x'(P'_z-R'_x)+y'(Q'_z-R'_y)]$$

Если эти значения вторых производных подставим в уравнение (40), то мы получим (член с λ' уничтожается сразу, а λ выносим из под знака определителя):

$$\lambda\begin{vmatrix} P & Q & R \\ x' & y' & z' \\ y'(Q'_x-P'_y)+z'(R'_x-P'_z), & x'(P'_y-Q'_x)+z'(R'_y-Q'_z), & x'(P'_z-R'_x)+y'(Q'_z-R'_y)\end{vmatrix}\equiv$$

$$\equiv\lambda(x'^2+y'^2+z'^2)G-\lambda(P'_x+Q'_y+R'_z)[x'(Q'_z-R'_y)+y'(R'_x-P'_z)+$$

$$+z'(P'_y-Q'_x)]\equiv\lambda(x'^2+y^2+z'^2)]\,G,$$

[в силу (1)].

Мы приходим, таким образом, к заключению, что две системы геодезических кривых совпадают только при $G=0$, т. е. в случае интегрируемости (оставляем в стороне минимальные линии).

В остальных случаях — это две различные системы.

(I) Это линии, которых геодезическая кривизна равна 0.

Это прямейшие линии.

(II) определяет наименьшее расстояние — это кратчайшие линии.

Мы приходим к тому различению двух этих систем линий для неголономных систем, на которое указывал Hertz в своей Механике (Werke B. III, 1894 (с. 100—106) и что довольно сложно обнаруживает R. Lilienthal в своем мемуаре Ueber kürzesten Integralkurven einer Pfaff'schen Gleichung. M. Ann. 52) и обнаружению различия которых для частного случая Möbius'овой Nullsystem делает H. Liebmann в своей статье Kürzeste u. geradeste Linien im Möbius'schen Nullsystem. Ib. S. 120—126 (весь том помечен 1899 г.).

Примечание. У. R. Lilienthal'я (L. c.) вместо P, Q, R стоят ξ, η, ζ, так что $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ $\left(\text{т. е. } \xi=\dfrac{P}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}} \text{ и т. д.}\right)$ Либман (l. c.)

пишет: Jedenfalls aus unserer Untersuchung geht hervor dass bei nicht integrablen Pfaff'schen Gleichungen sehr viel compliciertere Verhältnisse walten, als auf Flächen und dass es sich wohl der Mühe lohnen wird, in diesem Sinne weiter zu arbeiten and namentlich weitere einfache Beispiele zu discutieren.

Даваемый мною вывод, мне кажется, своею простотою заслуживает некоторого внимания, — в особенности обнаружение той и другой системы геодезических линий, а также расщепление свойств линий кривизны и самого понятия полной и Гауссовой кривизны.

P. S. Когда первоначально писалась эта статья, я еще не имел в руках статьи Rogers'a Some „Differential properties of the orthogonal trajectories of a congruence of curves Proceedings Irish Academy. Vol. XXIX. Sect. A. № 6", G. Darboux посвятил этой работе специальную статью „Sur différentes propriétés des trajectoires orthogonales d'une congruence des courbes. Bull. Sc. math. (2)36. 1912 p. 217-232, воспроизведенную потом в примечании в 20-м издании II-го тома его Théorie des surfaces. Мне кажется, однако, что несмотря на это, настоящая статья имеет значение, ближе подчеркивая аналогию и различие с теорией поверхностей. Кроме того, мною подчеркивается значение работ A. Voss'a, недостаточно, может быть, оцененных, и получены некоторые новые результаты. В этом отношении позволю себе указать на две заметки в печатающемся т. I в. 1. „Сообщений Харьковского Математического Общества", сер. 4, где дается новое доказательство теоремы Гаусса независимо от формул К. Неймана, и обобщается соотношение Enneper'a-Beltrami.

RESUMÉ

En reprenant les recherches de A. Voss sur les Punot-Ebenen système (M. Ann. 23) l'auteur les envisage comme l'étude de la coïncidence principale d'un connexe de l'espace ayant pour élément la combinaison (point, droite) de l'ordre m et de la classe 1. Dans l'article qui suit ce sont les propriétés des lignes intégrales de l'équation de Pfaff

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \tag{1}$$

qui sont envisagées particulièrement. L'auteur montre une analogie étroite qui existe avec la théorie des lignes tracées sur une surface. Pour plus d'analogie l'auteur au lieu d'une surface isolée $F(x, y, z) = 0$ prend une famille $F(x, y, z) = \text{Const}$ ou bien $0 = dF = F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz$.

Pour le système des courbes intégrales du (1) sont établies les courbes ou lignes asymptotiques et la classification des points de l'espace en points elliptiques, hyperboliques et paraboliques, courbes minimales (ou isotropes), directions conjuguées et la projectivité correspondante, dont le caractère conduit à la classification des points de l'espace, identique à celle mentionnée plus haut. Ce sont des directions principales ($\equiv$ des rayons de courbure extremale R_1, R_2) qui sont établies. Notion de courbure totale $\left(= \frac{1}{R_1 R_2}\right)$ et moyenne $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ du système, extension du théorème d'Euler. Introduction de la notion d'i n d i c a t r i c e, — analogue de celle de Dupin, ce qui ramène à la classification des points de l'espace. Les ombilics du système. A l'aide des formules de C. Neumann sur la transformation des surfaces et la courbure de Gauss (M. Ann. XI), dont la démonstration due à M-r Blank est donnée dans une note, l'auteur établit une nouvelle expression analogue à la courbure totale, mais qui en est identique seulement dans le cas d'intégrabilité.

Ici se rencontre pour la première fois certaine bifurcation des propriétés (Spaltung) qui coïncident dans le cas d'intégrabilité. Aussi on peut déterminer de deux manières les lignes de courbure de la surface, les lignes géodésiques. Les deux définitions nous mènent dans le cas considéré aux divers systèmes de courbes qui ne coïncident que dans le cas d'intégrabilité, et entre lesquels se distribuent les propriétés des systèmes de courbes d'une surface correspondantes.

И. ЧЕРНУШЕНКО

О взаимной непротиворечивости геометрических аксиом Гильберта

§ 1

В § 9 своей работы „Grundlagen der Geometrie" (*) Гильберт свел вопрос о взаимной непротиворечивости аксиом своей системы к вопросу об отсутствии противоречий в арифметике области всех вещественных чисел. При этом Гильберт указал собственно только план, не входя в подробности, и ограничился плоскостными аксиомами. Некоторые добавочные указания можно найти у Гильберта в §§ 12 и 29. Вельштейн в своей книге „Основания геометрии" (**) в § 12 дал построение пространственной геометрии в численном многообразии трех измерений, но его построение не совпадает с построением Гильберта.

В настоящей статье я имею в виду дать подробное построение пространственной геометрии по плану Гильберта, хотя, конечно, не мне судить, насколько это мне удалось.

Возьмем область всех вещественных чисел Ω. Назовем точкой тройку чисел (x, y, z) области Ω. Пусть четверка пропорциональных чисел $(u:v:w:r)$ той же области при условии, что u, v, w одновременно не нули, представляет плоскость. Пусть точка (x, y, z) лежит в плоскости $(u:v:w:r)$, если удовлетворяется условие $ux+vy+$ $+wz+r=0$.

Назовем прямою совокупность всех точек, лежащих в двух плоскостях $(A:B:C:D)$ и $(A':B':C':D')$, при условии, что не существуют одновременно равенства $A:A'=B:B'=C:C'$. Следовательно точка (x, y, z) лежит на прямой $(A:B:C:D,\ A':B':C':D')$, если одновременно выполняются условия: $Ax+By+Cz+D=0$ и $A'x+B'y+C'z+D'=0$.

Обозначим $Ax+By+Cz+D$ через $f(x, y, z)$ и $A'x+B'y+C'z+D'$ через $g(x, y, z)$. Если $f(x, y, z)=0$ (1) и $g(x, y, z)=0$ (2), то $\varphi(x, y, z)=$

(*) Д. Гильберт. Основания геометрии. Перевод с 5 немецкого издания. Книгоиздательство „Сеятель". Петроград, 1923.

(**) Вельштейн. Основания геометрии. Изд. Матезис, 2-е. Одесса, 1913.

$=kf(x, y, z)+lg(x, y, z)=0$ (3), т. е. точка, лежащая в (1) и (2) плоскостях, лежит также и в (3), где k и l произвольные числа области Ω. Следовательно, через данную прямую проходит бесчисленное множество плоскостей.

Возьмем другие k_1 и l_1, так что $kl_1-k_1l\neq 0$, составим

$$\psi(x, y, z)=k_1f(x, y, z)+l_1g(x, y, z)$$

и покажем, что прямая (f, g) тождественна с прямой (φ, ψ).

Действительно из $kf+lg=0$ и $k_1f+l_1g=0$ следует, что одновременно $f(x, y, z)=0$ и $g(x, y, z)=0$, так как $kl_1-k_1l\neq 0$.

Таким образом, прямая определяется двумя любыми проходящими через нее плоскостями. Выбирая надлежащим образом множителей k и l, можно заменить плоскости $(A:B:C:D)$ и $(A':B':C':D')$ любой парой из трех $(a:b:0:d)$, $(a':0:c':d')$ и $(0:b'':c'':d'')$, причем из трех пар $a:b$, $a':c'$ и $b'':c''$, как легко видеть, ни одна не может обратиться в пару нулей. Поэтому, не нарушая общности, можно представлять прямую двумя из трех четверок пропорциональных чисел $(a:b:0:d,\ a':0:c':d',\ 0:b'':c'':d'')$.

Теперь покажем, как в построенной системе вещей: точек, прямых и плоскостей выполняются аксиомы Гильберта.

§ 2

Аксиома I^1. „Две различные точки A и B всегда определяют прямую".

Пусть $A-(x_1, y_1, z_1)$, $B-(x_2, y_2, z_2)$. Для определения прямой имеем:

$$\begin{aligned} ax_1+by_1+d&=0\\ ax_2+by_2+d&=0 \end{aligned}\quad (1)\quad \text{и}\quad \begin{aligned} a'x_1+c'z_1+d'&=0\\ a'x_2+c'z_2+d'&=0 \end{aligned}\quad (2)$$

Из (1) и (2) мы всегда определим $(a:b:d)$ и $(a':c':d')$, кроме того случая, когда одновременно $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$ или $x_1=x_2$ и $z_1=z_2$. В последнем случае вместо (1) или (2) мы получим третью систему:

$$\begin{aligned} b''y_1+c''z_1+d''&=0\\ b''y_2+c''z_2+d''&=0, \end{aligned}\quad (3)$$

из которой определим $(b'':c'':d'')$. Следовательно, I^1 удовлетворяется.

Аксиома I^2. „Любые две различные точки прямой определяют эту прямую".

Пусть точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3) лежат на прямой $[(a:b:0:d,\ a':0:c':d',\ 0:b'':c'':d'')]$. Имеем по условию:

$$\begin{aligned} ax_1+by_1+d&=0\\ ax_2+by_2+d&=0\\ ax_3+by_3+d&=0 \end{aligned}\ (4)\quad \begin{aligned} a'x_1+c'z_1+d'&=0\\ a'x_2+c'z_2+d'&=0\\ a'x_3+c'z_3+d'&=0 \end{aligned}\ (5)\quad \begin{aligned} b''y_1+c''z_1+d''&=0\\ b''y_2+c''z_2+d''&=0\\ b''y_3+c''z_3+d''&=0 \end{aligned}\ (6)$$

Для того, чтобы прямая определялась любыми двумя из трех точек, необходимо, чтобы отношения $a:b:d$, $a':c':d'$ и $b'':c'':d''$, определенные из любой пары уравнений (4), (5) и (6), удовлетворяли третьему, а это требует во всех трех случаях одновременного равенства нулю определителей

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, I^2 удовлетворяется.

Аксиома I^{3a}. „На прямой всегда существуют по меньшей мере две точки".

Аксиома удовлетворяется; так как, выбрав произвольно x, мы всегда найдем y и z по уравнениям $ax+by+d=0$ и $a'x+c'z+d'=0$.

Аксиома I^{3b}. „В каждой плоскости существуют всегда по меньшей мере три точки, не лежащие на одной прямой".

Если точка (x, y, z) лежит в плоскости $(u:v:w:r)$, то удовлетворяется уравнение

$$ux+vy+wz+r=0. \tag{7}$$

Взяв произвольно x_1, y_1, из уравнения (7) определяем z_1. Так же найдем x_2, y_2, z_2. Найденные точки определяют прямую $(a:b:0:d$ $a':0:c':d'$, $0:b'':c'':d'')$. Взяв теперь произвольно x_3, выбираем y_3 так чтобы не был равен нулю определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

и затем из уравнения (7) находим и z_3.

Аксиома I^4. „Три не лежащие на одной и той же прямой точки A, B, C всегда определяют плоскость α".

Пусть даны три точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3). Так как они по условию не лежат на одной прямой, то по крайней мере один из определителей

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

не равен нулю.

Обозначая плоскость α через $(u:v:w:r)$, имеем

$$\begin{aligned} ux_1+vy_1+wz_1+r&=0 \\ ux_2+vy_2+wz_2+r&=0 \\ ux_3+vy_3+wz_3+r&=0, \end{aligned}$$

откуда:

$$u:v:w:r=-\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

т. е. плоскость может быть найдена, следовательно, I^4 удовлетворяется.

Аксиома I^5. „Любые три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, определяют эту плоскость“.

Пусть имеем плоскость $\alpha(u:v:w:r)$ и точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2\, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ и $D(x_4, y_4, z_4)$, лежащие на ней. Следовательно удовлетворяются уравнения:

$$\begin{aligned} ux_1+vy_1+wz_1+r&=0\\ ux_2+vy_2+wz_2+r&=0\\ ux_3+vy_3+wz_3+r&=0\\ ux_4+vy_4+wz_4+r&=0. \end{aligned} \tag{8}$$

Какие-либо три из этих уравнений определяют $(u:v:w:r)$. Для того, чтобы найденная таким образом четверка пропорциональных чисел удовлетворяла и четвертому уравнению, т. е. для совместности системы уравнений, необходимо во всех случаях равенство нулю одного и того же определителя

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

след., I^5 удовлетворяется.

Аксиома I^6. „Если две точки A, B прямой a лежат в плоскости α, то и всякая точка прямой a лежит в плоскости α“.

Пусть прямая $AB(a:b:0:d,\ a':0:c':d',\ 0:b'':c'':d'')$ имеет с плоскостью $\alpha(u:v:w:r)$ две общие точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, точка $C(x_3, y_3, z_3)$ лежит на прямой AB, и требуется доказать, что C лежит в плоскости α.

Дано:

1) $ux_1+vy_1+wz_1+r=0$ 4) $ux_2+vy_2+wz_2+r=0$

2) $ax_1+by_1+d=0$ 5) $ax_2+by_2+d=0$

3) $a'x_1+c'z_1+d'=0$ 6) $a'x_2+c'z_2+d'=0$

7) $ax_3+by_3+d=0$

8) $a'x_3+c'z_3+d'=0$

и требуется доказать, что

9) $ux_3+vy_3+wz_3+r=0.$

Решая систему 1), 2) и 3) относительно x_1, y_1, z_1, найдем

$$x_1 = -\begin{vmatrix} r & v & w \\ d & b & 0 \\ d' & 0 & c' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u & v & w \\ a & b & 0 \\ a' & 0 & c' \end{vmatrix}, \quad y_1 = \begin{vmatrix} u & r & w \\ a & d & 0 \\ a' & d' & c' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u & v & w \\ a & b & 0 \\ a' & 0 & c' \end{vmatrix}$$

и

$$z_1 = -\begin{vmatrix} u & v & r \\ a & b & d \\ a' & 0 & d' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u & v & w \\ a & b & 0 \\ a' & 0 & c' \end{vmatrix}.$$

Так как для x_2, y_2, z_2 найдем из (4), (5) и (6) те же значения, то вследствие различия точек A и B все определители должны быть равны нулю. Но при этом условии

$$ux_3 + vy_3 + wz_3 + r = 0.$$

В самом деле, если допустим, что $ux_3 + vy_3 + wz_3 + r = k$ $(k \neq 0)$ то, обозначая $r - k$ через r', получим $ux_3 + vy_3 + wz_3 + r' = 0$. Определяя x_3, y_3, z_3 из последнего равенства вместе с (7) и (8), найдем

$$x_3 = -\begin{vmatrix} r' & v & w \\ d & b & 0 \\ d' & 0 & c' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u & v & w \\ a & b & 0 \\ a' & 0 & c' \end{vmatrix}.$$

Так как знаменатель по предыдущему равен нулю, то и числитель равен нулю, и из сравнения с предыдущим имеем $r' = r$, т. е. $k = 0$, что и т. д.

Аксиома I^7. „Если две плоскости α и β имеют общую точку A, то они имеют по меньшей мере еще одну точку B“.

Пусть плоскости $P(u:v:w:r)$ и $Q(u':v':w':r')$ имеют общую точку $A(x_1, y_1, z_1)$. Следовательно не существуют одновременно равенства $u:u' = v:v' = w:w'$, так как в противном случае система уравнений

$$\begin{gathered} ux + vy + wz + r = 0 \\ u'x + v'y + w'z + r' = 0 \end{gathered}$$

не имела бы конечных решений.

Пусть, например, $uv' - vu' \neq 0$. Определяя x и y через z, найдем

$$x = \frac{(vw' - v'w)z + vr' - v'r}{uv' - u'v}, \quad y = \frac{(u'w - uw')z + u'r - ur'}{uv' - u'v}$$

Давши z значение z_2, отличное от z_1, найдем x_2 и y_2, что и т. д.

Аксиома I^8. „Существуют по меньшей мере 4 точки, не лежащие в одной плоскости“.

Взяв произвольно три точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3), мы определим проходящую через них плоскость $\alpha(u:v:w:r)$. Выбрав теперь x_4 и y_4, отличные от первых трех пар, определим z_4 так, чтобы $ux_4 + vy_4 + wz_4 + r = k$, где $k \neq 0$. Этим определена четвертая точка, не лежащая в плоскости α, что и т. д.

§ 3

Переходя к аксиомам порядка, заметим, что числа области Ω могут быть расположены в порядке своей величины. Пусть теперь (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3) точки прямой $(A:B:C:D,\ A':B':C':D')$. Мы скажем, что точка (x_2, y_2, z_2) лежит между двумя другими, если удовлетворено хотя бы одно из шести двойных неравенств (*)

$$x_1 < x_2 < x_3, \quad x_1 > x_2 > x_3 \tag{1}$$
$$y_1 < y_2 < y_3, \quad y_1 > y_2 > y_3 \tag{2}$$
$$z_1 < z_2 < z_3, \quad z_1 > z_2 > z_3 \tag{3}$$

В случае, если выполнено одно из двух двойных неравенств (1), легко показать, что или $y_1 = y_2 = y_3$, или выполняется одно из двойных неравенств (2), и также, что или $z_1 = z_2 = z_3$, или выполняется одно из неравенств (3). В самом деле, из уравнений

$$Ax_i + By_i + Cz_i + D = 0$$
$$A'x_i + B'y_i + C'z_i + D' = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

исключая z_i, образуем систему уравнений вида

$$ax_i + by_i + d = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{4}$$

При этом коэффициент b наверно не 0, так как в противном случае было бы $x_1 = x_2 = x_3$.

Пусть также $a \neq 0$. Из $x_1 \gtreqless x_2 \gtreqless x_3$ заключаем

$$ax_1 \gtreqless ax_2 \gtreqless ax_3,$$

и поэтому на основании (4)

$$by_1 + d \gtreqless by_2 + d \gtreqless by_3 + d.$$

Следовательно $by_1 \gtreqless by_2 \gtreqless by_3$, и так как $b \neq 0$, то

$$y_1 \gtreqless y_2 \gtreqless y_3,$$

причем в неравенствах всегда надо брать или сплошь верхние знаки или нижние. Если же в (4) $a = 0$, то очевидно $y_1 = y_2 = y_3$. Так же доказывается, что последовательность по величине иксов влечет за собой равенство или соответствующую последовательность зетов. Вообще, последовательность по величине одной из координат трех точек прямой влечет за собой соответствующую последовательность других координат или их равенство.

Из приведенных рассуждений непосредственно вытекает справедливость в нашей геометрии аксиомы II¹.

Аксиома II¹. „Если A, B, C — точки одной прямой, и B лежит между A и C, то B лежит также между C и A".

(*) См. Гильберт. Основания геометрии § 29.

Аксиома II^2. „Если A и C точки одной прямой, то a) существует по меньшей мере одна точка B, лежащая между A и C и b) по меньшей мере одна точка D такая, что C лежит между A и D".

Если (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) — точки A и C прямой, то эти тройки различаются по крайней мере одним числом, например, $x_1 < x_2$. В таком случае мы всегда можем найти два числа x_3 и x_4 так, что $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$, а затем и соответствующие y и z, как в I^1 и I^{3a}, следовательно аксиома удовлетворяется.

Аксиома II^3. „Из трех точек прямой всегда одна и только одна лежит между двумя другими".

В трех различных тройках чисел (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3) различны значения по крайней мере одной из координат. Пусть различны, например, иксы, и пусть существует двойное неравенство $x_1 < x_2 < x_3$; тогда невозможны двойные неравенства $x_2 \gtrless x_1 \gtrless x_3$ и $x_1 \gtrless x_3 \gtrless x_2$. След. II^3 удовлетворена.

§ 4

Аксиома II^4. „Пусть A, B, C — три не лежащие на одной прямой очки и a прямая в плоскости ABC, не проходящая ни через одну из точек A, B, C; если при этом прямая a проходит через точку отрезка AB, то она непременно проходит или через точку отрезка AC или через точку отрезка BC".

В § 29, строя пространственную геометрию с помощью Дезарговой числовой системы, Гильберт указывает, как оправдывается не аксиома II^4, а теорема 6, которая в его литографированных лекциях и была принята за аксиому вместо II^4, и из которой II^4 легко выводится. Руководствуясь указанием § 29 и примером для плоской геометрии, данным в литографированных лекциях, мы и докажем справедливость теоремы 6, которая читается так:

„Каждая прямая a, лежащая в плоскости α, разделяет не лежащие на ней точки этой плоскости на две области, имеющие следующее свойство: каждая точка A одной области определяет вместе с каждой точкой B другой области отрезок AB, внутри которого лежит одна точка прямой a, напротив две любые точки A и A' одной и той же области определяют отрезок AA', внутри которого не лежит ни одной точки прямой a".

Пусть дана плоскость $\alpha(u:v:w:r)$ и в ней прямая $a(u:v:w:r, u':v':w':r')$. Мы скажем, что те точки (x, y, z) плоскости α, для которых $u'x + v'y + w'z + r' < 0$, лежат по одну сторону прямой a, а для которых $u'x + v'y + w'z + r' > 0$, по другую. Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ две точки плоскости α, лежащие по разные стороны a, так что

$$u'x_1 + v'y_1 + w'z_1 + r' \lesseqgtr 0 \tag{1}$$

и

$$u'x_2 + v'y_2 + w'z_2 + r' \gtreqless 0. \tag{2}$$

Докажем, что прямая AB пересекается с прямой a. Обозначим прямую AB через

$$(u'':v'':w'':r'',\quad u:v:w:r). \tag{3}$$

Для отыскания общей точки прямых AB и a нужно решить систему уравнений

$$\begin{aligned} ux+vy+wz+r&=0\\ u'x+v'y+w'z+r'&=0\\ u''x+v''y+w''z+r''&=0. \end{aligned} \tag{4}$$

Покажем, что определитель этой системы D не равен нулю.

$$D=\begin{vmatrix} u & v & w\\ u' & v' & w'\\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}=u'(wv''-vw'')+v'(uw''-wu'')+w'(vu''-uv''). \tag{5}$$

Прямая $AB(u'':v'':w'':r'',\ u:v:w:r)$, как известно, может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned}[(uw''-wu''):(vw''-wv''):0:(rw''-wr''),\\ uv''-vu''):0:(wv''-vw''):(rv''-vr'')].\end{aligned} \tag{6}$$

Так как точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) лежат на AB, то

$$\left.\begin{aligned} (uw''-wu'')x_1+(vw''-wv'')y_1+(rw''-wr'')=0\\ (uw''-wu'')x_2+(vw''-w''v)y_2+(rw''-wr'')=0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} (uv''-vu'')x_1+(wv''-vw'')z_1+(rv''-vr'')=0\\ (uv''-vu'')x_2+(wv''-vw'')z_2+(rv''-vr'')=0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Из (7) и (8) имеем

$$\frac{wv''-vw''}{x_1-x_2}=\frac{uw''-wu''}{y_1-y_2}=\frac{vu''-uv''}{z_1-z_2}=k. \tag{9}$$

Подставляя значения числителей из (9) в разложение определителя (5), получим

$$\begin{aligned} D&=k[u'(x_1-x_2)+v'(y_1-y_2)+w'(z_1-z_2)]=\\ &=k[u'x_1+v'y_1+w'z_1+r'-(u'x_2+v'y_2+w'z_2+r')]\neq 0, \end{aligned}$$

так как разность, стоящая в квадратных скобках, вследствие (1) и (2) не равна нулю.

Так как $D\neq 0$, то существует точка пересечения прямых a и AB, которую обозначим $C(x_3, y_3, z_3)$.

Остается доказать, что C лежит между A и B.

Прямая a подобно AB может быть представлена в виде:

$$[(uw'-wu'):(vw'-wv'):0:(rw'-wr'),\ (uv'-vu'):0:(wv'-vw'):(rv'-vr')] \tag{10}$$

При этом из (1) и (2) следует:

$$(uw' - wu')\,x_1 + (vw' - wv')\,y_1 + rw' - wr' \gtreqless 0 \qquad (11)$$

$$(uw' - wu')\,x_2 + (vw' - wv')\,y_2 + rw' - wr' \lesseqgtr 0, \qquad (12)$$

где верхние знаки соответствуют верхним же (1) и (2) и нижнее нижним.

Теперь, принимая во внимание, что из точек A, B и C только C лежит на прямой a, но все три лежат на AB, получим [(uw') в дальнейшем обозначает $uw' - wu'$],

$$\begin{gathered}(uw')\,x_1 + (vw')\,y_1 + (rw') \gtreqless 0 = (uw')\,x_3 + (vw')\,y_3 + (rw') = \\ = 0 \gtreqless (uw')\,x_2 + (vw')\,y_2 + (rw'),\end{gathered} \qquad (13)$$

$$\begin{gathered}(uw'')\,x_1 + (vw'')\,y_1 + (rw'') = 0 = (uw'')\,x_3 + (vw'')\,y_3 + (rw'') = \\ = 0 = (uw'')\,x_2 + (uw'')\,y_2 + rw'').\end{gathered} \qquad (14)$$

Умножая (13) и (14) соответственно на (vw'') и (vw') и вычитая, получим:

$$\begin{gathered}[(uw')(vw'') - (uw'')(vw')]\,x_1 + [(rw')(vw'') - (rw'')(vw')] \gtreqless \\ \gtreqless [(uw')(vw'') - (uw'')(vw')]\,x_3 + [(rw')(vw'') - (rw'')(vw')] \gtreqless \\ \gtreqless [(uw')(vw'') - (uw'')(vw')]\,x_2 + [(rw')(vw'') - (rw'')(vw')],\end{gathered}$$

откуда

$$x_1 \gtreqless x_3 \gtreqless x_2.$$

Так как существует $(x_3,\ y_3,\ z_3)$ точка пересечения прямых a и AB, то из средних частей (13) и (14) заключаем, что $(uw')(vw'') - (uw'')(vw') \neq 0$, и следовательно сокращение двойного неравенства на этого множителя возможно. Таким образом доказано, что точка C лежит между A и B.

Точно так же можно доказать и вторую часть теоремы 6.

Пусть теперь $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ точка A и $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ точка A', при чем

$$u'x_1 + v'y_1 + w'z_1 + r' \gtreqless 0 \quad \text{и} \quad u'x_2 + v'y_2 + w'z_2 + r' \gtreqless 0.$$

Из рассуждений, сходных с предыдущими, обнаруживается, что определитель D не должен быть непременно равен нулю. Если D по прежнему не равен нулю, то, повторяя предыдущие рассуждения, мы найдем, что

$$x_3 \gtreqless x_1 \quad \text{и} \quad x_3 \gtreqless x_2,$$

т. е. точка $C\,(x_3,\ y_3,\ z_3)$ лежит вне отрезка AA', что и т. д.

Пусть $D = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} = 0.$$

Умножая первый столбец на x_1 и прикладывая к нему второй, умноженный на y_1, и третий, умноженный на z_1, получим

$$\begin{vmatrix} ux_1+vy_1+wz_1 & v & w \\ u'x_1+v'y_1+w'z_1 & v' & w' \\ u''x_1+v''y_1+w''z_1 & v'' & w'' \end{vmatrix} = 0.$$

Так как точка (x_1, y_1, z_1) лежит на прямой $(u:v:w:r,\ u'':v'':w'':r'')$, то первый и третий элементы первого столбца могут быть заменены соответственно $-r$ и $-r''$. Что касается второго элемента, то по условию $u'x_1+v'y_1+w'z_1+r' \gtrless 0$. В таком случае можно положить, что $u'x_1+v'y_1+w'z_1+r'=k$, где $k \neq 0$, след. $u'x_1+v'y_1+w'z_1=-r'+k$. Поэтому

$$D_1 = \begin{vmatrix} -r & v & w \\ -r'+k & v' & w' \\ -r'' & v'' & w'' \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Точно так же получим:

$$D_2 = \begin{vmatrix} u & -r & w \\ u' & -r'+k & w' \\ u'' & -r'' & w'' \end{vmatrix} = 0 \quad (16) \quad \text{и} \quad D_3 = \begin{vmatrix} u & v & -r \\ u' & v' & -r'+k \\ u'' & v'' & -r'' \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Решая систему (4), мы получим для общей точки прямых a и AA' следующие выражения:

$$x = D_1' : D,\ y = D_2' : D \ \text{и}\ z = D_3' : D,$$

где

$$D_1' = \begin{vmatrix} -r & v & w \\ -r' & v' & w' \\ -r'' & v'' & w'' \end{vmatrix} \quad (18), \qquad D_2' = \begin{vmatrix} u & -r & w \\ u' & -r' & w' \\ u'' & -r'' & w'' \end{vmatrix} \quad (19)$$

$$\text{и} \quad D_3' = \begin{vmatrix} u & v & -r \\ u' & v' & -r' \\ u'' & v'' & -r'' \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Из трех определителей D_1', D_2' и D_3' по крайней мере два не равны нулю. В самом деле, если допустим, что, например D_1' и $D_2'=0$, то, раскладывая D_1 и D_1' по элементам первого столбца, получим:

$$-r(v'w''-w'v'')+(-r'+k)(wv''-vw'')-r''(vw'-wv')=0$$

и

$$-r(v'w''-w'v'')-r'(wv''-vw'')-r''(vw'-wv')=0. \tag{21}$$

Одновременное существование равенств (21) возможно только при двух условиях: или 1) $k=0$ или 2) $wv''-vw''=0$ и сумма первого и третьего члена равна нулю. Но по условию $k \neq 0$, следовательно,

$$wv''-vw''=0. \tag{22}$$

Сравнивая D_2 и D_2', так же найдем

$$uw'' - wu'' = 0. \tag{23}$$

Из (22) и (23) получим $u : u'' = v : v'' = w : w''$, что противоречит определению прямой. Следовательно, из определителей D_1', D_2' и D_3' два по крайней мере не равны нулю, а в таком случае система (4) дает бесконечные решения. Следовательно, AA' совсем не пересекается с прямой a, чем теорема 6 доказана вполне.

§ 5.

Остается показать, как аксиома II^4 выводится из теоремы 6. В литографированных лекциях Гильберт дает следующее доказательство.

Доказательство. По предположению A и B лежат по разные стороны прямой a. Допустим, что AC не пересечет a, тогда A и C лежат по одну сторону a, так что B и C лежат по разные стороны a, т. е. BC пересечет a. Если допустим далее, что отрезки AC и BC оба пересечены прямой a, то A и B должны были бы лежать по одну сторону a, что невозможно, так как по условию AB пересечен прямой a. Также невозможно предположение, что ни AC, ни BC не пересечены прямой a.

Можно, впрочем, и непосредственно показать, что аксиома II^4 удовлетворяется.

Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $C(x_3, y_3, z_3)$ три точки, не лежащие на одной прямой, $\alpha(u : v : w : r)$ проходящая через них плоскость, KL $(u : v : w : r,\ u' : u' : w' : r')$ прямая в плоскости α, не проходящая ни через одну из точек A, B, C и пересекающая $AB\,(u : v : w : r,\ u'' : v'' : w'' : r'')$ в точке $K(\xi, \eta, \zeta)$ между A и B, т. е.

$$\left.\begin{aligned} ux_1 + vy_1 + wz_1 + r &= 0\\ ux_2 + vy_2 + wz_2 + r &= 0\\ ux_3 + vy_3 + wz_3 + r &= 0\\ u\xi + v\eta + w\zeta + r &= 0 \end{aligned}\right\}\ (1) \qquad \left.\begin{aligned} u'x_1 + v'y_1 + w'z_1 + r' &\lesseqgtr 0\\ u'x_2 + v'y_2 + w'z_2 + r' &\lesseqgtr 0\\ u'x_3 + v'y_3 + w'z_3 + r' &\lesseqgtr 0\\ u'\xi + v'\eta + w'\zeta + r' &= 0 \end{aligned}\right\}\ (2)$$

$$\begin{aligned} x_1 \lesseqgtr \xi \lesseqgtr x_2\\ y_1 \lesseqgtr \eta \lesseqgtr y_2\,,\\ z_1 \lesseqgtr \zeta \lesseqgtr z_2 \end{aligned} \tag{3}$$

при чем в (3) достаточно предположить существование одного какого либо из двойных неравенств: мы будем предполагать первое. Что касается неравенств (2), то можно доказать, что знаки первого и второго из них должны быть противоположны, как и поставлено.

В самом деле прямая KL может быть представлена в виде.

$$[(uw') : (vw') : 0 : (rw'),\ (uv') : 0 : (wv') : (rv'),\ 0 : (vu') : (wu') : (ru')]$$

и прямая AB в виде

$$[(uw''):(vw''):0:(rw''),\ (uv''):0:(wv''):(rv''),\ 0:(vu''):(wu''):(ru'')],$$

где $(uw')=uw'-wu'$ и т. д.

Умножая все части двойного неравенства $x_1 \lesseqgtr \xi_1 \lesseqgtr x_2$ на $(uw')(vw'')-(uw'')(vw')$ и прибавляя по $(rw')(vw'')-(rw'')(vw')$, получим

$$\begin{aligned}&[(uw')(vw'')-(uw'')(vw')]\,x_1+(rw')(vw'')-(rw'')(vw') \lesseqgtr\\ &\lesseqgtr [(uw')(vw'')-(uw'')(vw')]\,\xi\ +(rw')(vw'')-(rw'')(vw') \lesseqgtr\\ &\lesseqgtr [(uw')(vw'')-(uw'')(vw')]\,x_2+(rw')(vw'')-(rw'')(vw').\end{aligned} \tag{4}$$

По условию KL и AB пересекаются в точке K, т. е,

$$\begin{aligned}(uw')\,\xi+(vw')\,\eta+(rw')=0\\ (uw'')\,\xi+(vw'')\,\eta+(rw'')=0,\end{aligned} \tag{5}$$

следовательно, множитель при x_1 в (4) не равен нулю.

Так как точки A, K, B лежат на AB, то имеем

$$\begin{aligned}(uw'')\,x_1+(vw'')\,y_1+(rw'')=(uw'')\,\xi+(vw'')\,\eta+(rw'')=\\ =(uw'')\,x_2+(vw'')\,y_2+(rw'')=0.\end{aligned} \tag{6}$$

Умножая (6) на (vw') и прибавляя к (4), получим

$$\begin{aligned}&(uw')(vw'')\,x_1+(vw')(vw'')\,y_1+(rw')(vw'') \lesseqgtr\\ &\lesseqgtr (uw')(vw'')\,\xi+(vw')(vw'')\,\eta+(rw')(vw'') \lesseqgtr\\ &\lesseqgtr (uw')(vw'')\,x_2+(vw')(vw'')\,y_2+(rw')(vw'').\end{aligned} \tag{7}$$

$(vw'')\neq 0$, так как в противном случае в (7) были бы знаки равенства, и идя обратно, мы получили бы $x_1=\xi=x_2$, что противоречит условию.

Сокращая (7) на (vw''), получим

$$\begin{aligned}(uw')\,x_1+(vw')\,y_1+(rw') \lesseqgtr (uw')\xi+(vw')\,\eta+(rw') \lesseqgtr\\ \lesseqgtr (uw')\,x_2+(vw')\,y_2+(rw').\end{aligned} \tag{8}$$

Умножая первую, четвертую и вторую строки (1) на w' и соответственно вычитая из них части неравенсва (8), найдем

$$\begin{aligned}wu'x_1+wv'y_1+ww'z_1+wr' \gtreqless wu'\xi+wv'\eta+ww'\zeta+wr' \gtreqless\\ \gtreqless wu'x_2+wv'y_2+ww'z_2+wr'.\end{aligned} \tag{9}$$

Сокращая на w, которое не равно нулю по той же причине, как выше (vw''), имеем

$$u'x_1+v'y_1+w'z_1+r' \gtreqless u'\xi+v'\eta+w'\zeta+r' \gtreqless u'x_2+v'y_2+w'z_2+r'. \tag{10}$$

Так как в (10) средняя часть по (2) равна нулю, то этим и доказана противоположность знаков в первой и второй строчках (2).

Можно было бы получить тот же результат доказательством от противного, применяя к предположенным неравенствам рассуждения § 4.

Что касается третьей строчки (2), то знаки в ней могут быть одинаковы или со знаками первой или второй. Если знаки в ней одинаковы со знаками первой, как поставлено, то применяя рассуждения § 4, видим, что точки A и C лежат по одну сторону KL, а B и C по разные, и следовательно KL проходит через точку отрезка BC и не проходит через точку отрезка AC, что и т. д.

§ 6.

Введем следующие преобразования точек одних в другие. Назовем параллельным перенесением преобразование

$$x' = x + k,\ y' = y + l,\ z' = z + m. \tag{1}$$

Обозначим далее точку (0, 0, 0) буквой O (черт. 1), произвольную точку (a, b, c) буквой M, точку $(a, b, 0)$ буквой A и точку $(a, 0, c)$ буквой B. Тогда вращение около оси z-ов на угол AOX переводит произвольную точку (x, y, z) в точку (x', y', z') по формулам

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y,$$

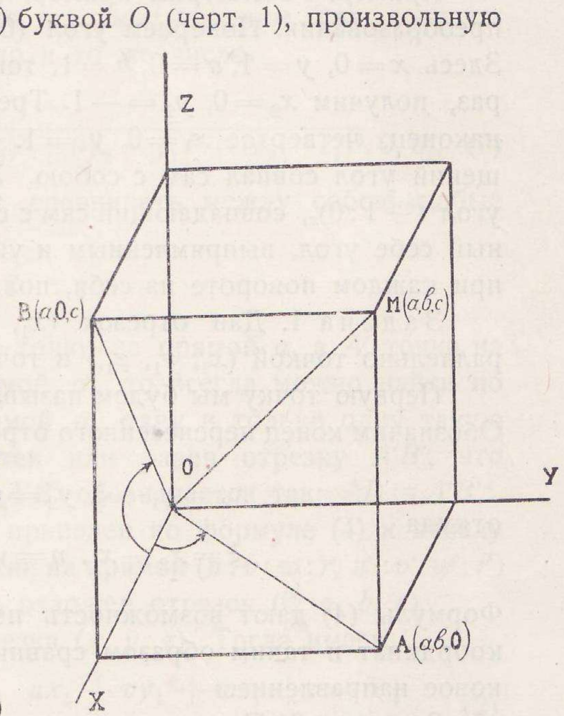
$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y,\ z' = z, \tag{2}$$

а вращение около оси y-ов на угол BOX переводит точку (x, y, z) в точку (x', y', z') по формулам

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}x - \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}z,$$

$$y' = y,$$

$$z' = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}x + \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}z. \tag{3}$$



Черт. 1

Из формул (1), (2), и (3) легко получить выражения для x, y, z через x', y', z', причем получаются формулы того же типа, следовательно, каждое преобразование (1), (2) и (3) имеет обратное себе преобразование.

Гильберт называет отрезком систему двух точек A и B, а все точки прямой AB, лежащие между A и B, точками отрезка. В дальнейшем для сокращения я буду обозначать точку (0, 0, 0) в отрезках одним нулем. Формулы (1) дают параллельное перенесение отрезка $(0;\ x, y, z)$ в положение $(k, l, m;\ x', y', z')$ или вследствие переместительного закона сложения параллельное перенесение отрезка $(0;\ k, l, m)$ в положение $(x, y, z;\ x', y', z')$. Формулы (2) дают вращение отрезка $(0;\ x, y, z)$ около оси z-ов на угол, образуемый отрезком $(0;\ a, b, 0)$ с осью x-ов. Формулы (3) дают вращение того же отрезка $(0;\ x, y, z)$ около оси y-ов на угол, делаемый отрезком $(0;\ a, 0, c)$ с осью x-ов.

Обозначим угол отрезка $(0;\ a,\ b,\ 0)$ с осью x-ов через $(a:b)_z$, а угол отрезка $(0;\ a,\ 0,\ c)$ с осью x-ов через $(a:c)_y$. Так как в формулы поворота (2) и (3) входят, собственно говоря, отношения $a:b$ и $a:c$, то точки $(a,\ b,\ 0)$ и $(a,\ 0,\ c)$ могут быть заменены точками $(na,\ nb,\ 0)$ и $(n'a,\ 0,\ n'c)$, где n и $n' \neq 0$. Ясно, что первые точки лежат на прямой $(b:-a;0:0,\ 0:0:1:0)$, а вторые на прямой $(c:0:-a:0,\ 0:1:0:0)$. Следовательно, для определения угла отрезка с осью x-ов можно взять любую точку отрезка.

Назовем конгруэнтными или равными отрезки и углы, получающиеся одни из других помощью формул преобразования (1), (2) и (3).

Пример. Рассмотрим пример, поясняющий пользование формулами преобразования. Повернем угол $(0:1)_z$ на угол, равный ему самому. Здесь $x=0$, $y=1$, $a=0$, $b=1$, тогда $x_1=1$, $y_1=0$. Повернем другой раз, получим $x_2=0$, $y_2=-1$. Третье вращение дает $x_3=1$, $y_3=0$ и, наконец, четвертое $x_4=0$, $y_4=1$. Следовательно, после четырех вращений угол совпал сам с собою. Угол $(0:1)_z$ мы называем прямым, угол $(-1:0)_z$, совпадающий сам с собою после двух вращений на равный себе угол, выпрямленным и угол $(1:0)_z$, совпадающий сам с собою при каждом повороте на себя, полным.

Задача 1. Дан отрезок $(x_1,\ y_1,\ z_1;\ x_2,\ y_2,\ z_3)$; перенести его параллельно точкой $(x_1,\ y_1,\ z_1,)$ в точку $(0,\ 0,\ 0)$—начало координат.

Первую точку мы будем называть началом отрезка, вторую концом. Обозначим конец перенесенного отрезка $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, тогда формулы (1) дают:

$$x_2=x_1+\xi,\ y_2=y_1+\eta,\ z_2=z_1+\xi,$$

откуда

$$\xi=x_2-x_1,\ \eta=y_2-y_1,\ \zeta=z_2-z_1. \tag{4}$$

Формулы (4) дают возможность перенести каждый отрезок в начало координат и таким образом сравнивать все отрезки, имеющие одинаковое направление.

Задача 2. Повернуть отрезок $(0;\ a,\ b,\ c)$ на ось x-ов.

Это значит найти отрезок $(0;\ \xi,\ 0,\ 0)$, который после преобразования по формулам (2) и (3) перейдет в данный. Найдем сначала отрезок $(0;\ x_1,\ 0,\ c)$, обращающийся в $(0;\ a,\ b,\ c)$ поворотом на угол $(a:b)_z$. По формулам (2) имеем:

$$a=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x_1;\quad b=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x_1,$$

откуда

$$x_1=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Теперь отыщем отрезок $(0;\ \xi,\ 0,\ 0)$, обращающийся в $(0;\sqrt{a^2+b^2},\ 0,\ c)$ поворотом на угол $(\sqrt{a^2+b^2}:c)$. По формулам (3) получим:

$$\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\xi;\quad c=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\xi,$$

откуда

$$\xi = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \tag{5}$$

Последний результат позволяет поворачивать каждый отрезок $(0;\ a,\ b,\ c)$ до совпадения с осью x-ов и тем сравнивать между собою отрезки, имеющие начало в начале координат.

Поворачивая отрезок $(0;\ a,\ 0,\ 0)$ на прямой угол $(0:1)_z$ и на $(0:1)_y$, мы получим:

$$(0;\ a,\ 0,\ 0) \equiv (0;\ 0,\ a,\ 0) \equiv (0;\ 0,\ 0,\ a) \tag{6}$$

что в связи с (5) показывает, что, приведя любой отрезок к началу координат и повернув его на любую ось, мы получим для соответствующей этой оси координаты одно и то же число.

Соединяя (4) и (5) получим:

$$(x_1,\ y_1,\ z_1;\ x_2,\ y_2,\ z_2) \equiv (0;\ \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},\ 0,\ 0). \tag{7}$$

Последняя формула позволяет сравнивать между собою любые отрезки.

§ 7

Аксиома III[1a]. „Если A и B две точки на прямой a, а A' точка на той же прямой или на другой прямой a', то всегда можно найти по данную от точки A' сторону прямой a' одну и только одну такую точку B', что отрезок AB конгруэнтен или равен отрезку $A'B'$; это отношение между отрезками AB и $A'B'$ обозначается так: $AB \equiv A'B'$“. Так как любой отрезок может быть приведен по формуле (4) к началу координат, то достаточно показать, как на прямой $(u:v:w:r,\ u':v':w':r')$ от ее точки $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ может быть отложен отрезок $(0;\ a,\ b,\ c)$.

Обозначим конец искомого отрезка $(x,\ y,\ z)$. Тогда имеем:

$$\left.\begin{aligned} ux + vy + wz + r = 0 \\ u'x + v'y + w'z + r = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1) \qquad \left.\begin{aligned} ux_1 + vy_1 + wz_1 + r = 0 \\ u'x_1 + v'y_1 + w'z_1 + r = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

и по (7) § 6

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \tag{3}$$

Из (1) и (2) имеем:

$$\left.\begin{aligned} u(x - x_1) + v(y - y_1) + w(z - z_1) = 0 \\ u'(x - x_1) + v'(y - y_1) + w'(z - z_1) = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Из (4) получаем:

$$\frac{x - x_1}{vw' - wv'} = \frac{y - y_1}{wu' - uw'} = \frac{z - z_1}{uv' - vu'} = t, \tag{5}$$

откуда

$$x - x_1 = (vw' - wv')t,\ y - y_1 = (wu' - uw')t,\ z - z_1 = (uv' - vu')t. \tag{6}$$

Подставляя из (6) в (3), найдем:

$$t = \pm \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{(uv'-vu')^2+(vw'-wv')^2+(wu'-uw')^2}} \tag{7}$$

и окончательно, полагая $\sqrt{(uv'-vu')^2+(vw'-wv')^2+(wu'-uw')^2}=\delta$,

$$\begin{aligned} x &= x_1 \pm \frac{1}{\delta}(vw'-wv')\sqrt{a^2+b^2+c^2}, \\ y &= y_1 \pm \frac{1}{\delta}(wu'-uw')\sqrt{a^2+b^2+c^2}, \\ z &= z_1 \pm \frac{1}{\delta}(uv'-vu')\sqrt{a^2+b^2+c^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Двойной знак, одновременно верхний или нижний, соответствует двум сторонам прямой от точки (x_1, y_1, z_1).

Следовательно, аксиома III^{1a} выполняется.

Аксиома III^{1b}. „Каждый отрезок конгруэнтен самому себе, т. е. всегда $AB \equiv AB$ и $AB \equiv BA$“.

Что $(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) \equiv (x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2)$, следует из того, что, повернув отрезок на угол $(1:0)_z$, мы получим тот же самый отрезок.

Что $(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) \equiv (x_2, y_2, z_2; x_1, y_1, z_1)$, следует из формулы (7) § 6.

Следовательно аксиома III^{1b} выполняется.

Аксиома III^2. „Если отрезок AB конгруэнтен как отрезку $A'B'$, так и отрезку $A''B''$, то и $A'B'$ конгруэнтен отрезку $A''B''$; т. е. если $AB \equiv A'B'$, и $AB \equiv A''B''$, то также $A'B' \equiv A''B''$“.

Эта аксиома выполняется по самому определению конгруэнтности в § 6.

Аксиома III^3. „Пусть AB и BC два отрезка на прямой a без общих точек; далее пусть $A'B'$ и $B'C'$ два отрезка на той же или на другой прямой a' тоже без общих точек. Если при этом

$$AB \equiv A'B' \text{ и } BC \equiv B'C',$$

то всегда также

$$AC \equiv A'C'“.$$

Перенесем прямые a и a' параллельно так, чтобы точки A и A' обе попали в начало координат; тогда, как легко видеть из (1) § 6, четвертые числа в обоих четверках пропорциональных чисел обратятся в нули. Пусть теперь координаты точек B и C будут (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), а точек B' и C' соответственно (ξ_1, η_1, ζ_1) и (ξ_2, η_2, ζ_2). По условию

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} = \sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2} \tag{9}$$

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2+(\zeta_2-\zeta_1)^2} \quad (10)$$

и требуется доказать, что $\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}=\sqrt{\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2}$.

Обозначим прямую AB через $(u:v:w:0,\ u':v':w':0)$. По условию имеем:

$$\begin{aligned} ux_1+vy_1+wz_1&=0\\ u'x_1+v'y_1+w'z_1&=0,\end{aligned} \quad (11) \qquad \begin{aligned} ux_2+vy_2+wz_2&=0\\ u'x_2+v'y_2+w'z_2&=0.\end{aligned} \quad (12)$$

Из (11) и (12) находим:

$$x_2=tx_1,\ y_2=ty_1,\ z_2=tz_1. \quad (13)$$

Подставляя из (13) в сумму левых частей (9) и (10) получим:

$$\begin{gathered}\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\\ =\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+(t-1)\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}=t\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}=\\ =\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}.\end{gathered} \quad (14)$$

Точно так же найдем:

$$\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2}+\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2+(\zeta_2-\zeta_1)^2}=\sqrt{\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2}. \quad (15)$$

Так как слагаемые в (14) и (15) по условию равны, то и суммы равны:

$$\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}=\sqrt{\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2}, \quad (16)$$

чем и выполняется аксиома III^3.

§ 8

Формулы вращения (2) § 6, поворачивающие отрезок $(0;\ x,\ y,\ 0)$ в положение $(0;\ x',\ y',\ 0)$ на угол $(a:b)_z$, дают возможность определить угол $(a:b)_z$ по заданным отрезкам, т. е. угол между отрезками, который мы будем обозначать самими отрезками, заключая их в квадратные скобки, следующим образом $[(0;\ x,\ y,\ 0);\ (0;\ x',\ y',\ 0)]$.

Умножая обе части равенств (2) § 6 на $\sqrt{a^2+b^2}\neq 0$, имеем:

$$x'\sqrt{a^2+b^2}=ax-by,$$
$$y'\sqrt{a^2+b^2}=bx+ay.$$

Уравнивая левые части равенств и вычитая, получим:

$$axy'-byy'-bxx'-ax'y=0,$$

откуда

$$a(xy'-x'y)=b(xx'+yy')$$

и наконец

$$a:b=(xx'+yy'):(xy'-x'y),$$

т. е.

$$[(0\colon x,\ y,\ 0);\ (0;\ x',\ y',\ 0)]=[(xx'+yy'):(xy'-x'y)]_z. \qquad (1)$$

З а д а ч а 1. „Найти угол $[(0;\ 1,\ 0,\ 0);\ (0;\ a,\ b,\ c)]$".

Повернем рассматриваемый угол на угол $(0:1)_z$. Составляющие его отрезки перейдут соответственно в $(0;0,1,0)$ и $(0;-b,\ a,\ c)$. Затем повернем получившийся угол на угол $(b:c)_y$, который выбран так, чтобы третья координата второго отрезка обратилась в нуль.

Отрезки перейдут в $(0;\ 0,\ 1,\ 0)$ и $(0;\ -\sqrt{b^2+c^2},\ a,\ 0)$. Наконец в третий раз повертываем на угол $(0:-1)$, чтобы перевести первый отрезок на ось x-ов, получим отрезки $(0;\ 1,\ 0,\ 0)$ и $(0;\ a,\ \sqrt{b^2+c^2},\ 0)$. Следовательно искомый угол

$$[(0;1,0,0);\ (0;\ a,b,c)]=[(0;1,0,0);\ (0;\ a,\sqrt{b^2+c^2},\ 0)]=$$
$$=(a:\sqrt{b^2+c^2})_z. \qquad (2)$$

Так же найдем:

$$[(0;\ 0,1,0);\ (0;\ a,b,c)]=\left(b:\sqrt{a^2+c^2}\right)_z$$

и

$$[(0;\ 0,0,1);\ (0;\ a,b,c)]=\left(c:\sqrt{a^2+b^2}\right)_z. \qquad (2')$$

З а д а ч а 2. „Найти угол $[(0;a,b,c);\ (0;\ a',b',c')]$".

Поворачивая сначала на угол $(a:-b)_z$, а затем на $\left(\sqrt{a^2+b^2}:-c\right)_y$, получим последовательно

$$\left[(0;\ \sqrt{a^2+b^2},\ 0,\ c);\ \left(0;\ \frac{aa'+bb'}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{ab'-a'b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ c'\right)\right]$$

и

$$\left[(0;\sqrt{a^2+b^2+c^2},\ 0,0);\left(0;\ \frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \frac{ab'-a'b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{(a^2+b^2)c'-(aa'+bb')\,c}{\sqrt{a^2+b^2},\ \sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)\right].$$

Применяя формулу (2), получим:

$$\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}:\sqrt{\frac{(ab'-a'b)^2}{a^2+b^2}+\frac{[(a^2+b^2)\,c'-(aa'+bb')\,c]^2}{(a^2+b^2)\,(a^2+b^2+c^2)}}=$$

$$=\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}:\sqrt{\frac{(a^2+b^2)[(ab'-a'b)^2+(a^2+b^2)c'^2-2(aa'+bb')cc'+(a'^2+b'^2)c^2]}{(a^2+b^2)\,(a^2+b^2+c^2)}}$$

и окончательно

$$[(0;\ a,b,c);\ (0;\ a',\ b',\ c')]=$$
$$=\left[\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}:\frac{\sqrt{(ab'-a'b)^2+(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right]_z. \qquad (3)$$

Аксиома III[4a]. „Пусть даны угол $\angle(h,\ k)$ в плоскости α и прямая a' в плоскости α', а также определенная относительно a' сторона плоскости α'. Пусть h' означает луч прямой a', исходящий из точки O', тогда в плоскости α' существует один и только один луч k' такой, что угол $\angle(h, k)$ конгруэнтен или равен углу $\angle(h', k')$, и вместе с тем все внутренние точки угла $\angle(h', k')$ лежат по данную сторону от a'; это соотношение между углами обозначается так $\angle(h, k) = \angle(h', k')$".

Чтобы оправдать эту аксиому, нужно показать, как на плоскости $(u:v:w:r)$ при данной на ней прямой $(u:v:w:r,\ u':v':w':r')$ и точке этой прямой (x_1, y_1, z_1) в сторону, например, возрастающих x-ов отложить угол $[(0; 1, 0, 0); (0; a, b, c)]$. Достаточно показать отложение только последнего угла, так как всякий угол по формулам параллельного перенесения может быть приведен к началу, а затем, как показано в задаче 2 этого §, к данному виду.

Отложим на прямой отрезок $(0; 1, 0, 0)$ в сторону возрастающих x-ов. По формулам (8) § 7, считая $(vw') > 0$, найдем:

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{\delta}(vw');\ y_2 = y_1 + \frac{1}{\delta}(wu');\ z_2 = z_1 + \frac{1}{\delta}(uv').$$

Обозначим новое положение точки (a, b, c) после перенесения откладываемого угла вершиной в точку (x_1, y_1, z_1) через (x', y', z'). Приводим теперь полученный угол $[(x_1, y_1, z_1;\ x_2,\ y_2, z_2);\ (x_1, y_1, z_1;\ x', y', z')]$ к началу, получим угол:

$$\left[\left(0; \frac{(vw')}{\delta}, \frac{(wu')}{\delta}, \frac{(uv')}{\delta}\right); (0; x, y, z)\right],$$

обозначая

$$x' - x_1 = x;\ y' - y_1 = y;\ z' - z_1 = z. \tag{4}$$

Наконец, применяя формулы (3) и (2), получим:

$$\frac{(vw')\,x + (wu')\,y + (uv')\,z}{\sqrt{[(vw')\,y - (wu')\,x]^2 + [(wu')\,z - (uv')\,y]^2 + [(uv')\,x - (vw')\,z]^2}} = \frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}}. \tag{5}$$

Так как точки (x', y', z') и (x_1, y_1, z_1) лежат в плоскости $(u:v:w:r)$, то

$$ux + vy + wz = 0. \tag{6}$$

Так как отрезок $(x_1, y_1, z_1;\ x', y', z')$ равен отрезку $(0; a, b, c)$, то по (7) § 6

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = d \tag{7}$$

где d введено для краткости.

Из системы уравнений (5), (6) и (7) мы и определим x, y, z.

Преобразуя подкоренное знаменателя в (5), получим:

$$\begin{aligned}&[(vw')\,y - (wu')\,x]^2 + [(wu')\,z - (uv')\,y]^2 + [(uv')\,x - (vw')\,z]^2 = \\ &= [(uv')^2 + (vu')^2 + (wu')^2]\,(x^2 + y^2 + z^2) - [(vw')\,x + (wu')\,y + (uv')\,z]^2 = \\ &= \delta^2 d^2 - [(vw')x + (wu')\,y + (uv')\,z]^2.\end{aligned}$$

Теперь (5) представится так:

$$\frac{[(vw')\,x+(wu')\,y+(uv')\,z]}{\sqrt{\delta^2 d^2-[(vw')\,x+(wu')\,y+(uv')\,z]^2}}=\frac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Решая относительно многочлена, стоящего в числителе, который временно обозначим ω, получим:

$$\frac{\omega}{\sqrt{\delta^2 d^2-\omega^2}}=\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}},$$
$$\omega=\pm a\delta. \tag{5'}$$

Подставляя оба значения ω в (5′), видим, что второе не годится, так как корни берутся с положительными знаками по (2) и (3), и мы окончательно имеем:

$$(vw')\,x+(wu')\,y+(uv')\,z=a\delta. \tag{8}$$

Из (6) и (8) имеем:

$$\begin{aligned}&[w\,(wu')-v\,(uv')]\,y=aw\delta\quad+[u\,(uv')-w\,(vw')]\,x,\\&[w\,(wu')-v\,(uv')]\,z=-av\delta+[v\,(vu')-u\,(wu')]\,x.\end{aligned} \tag{8'}$$

Подставляем в (7)

$$\begin{aligned}&\{[u\,(uv')-w\,(vw')]^2+[v\,(vw')-u\,(wu')]^2+[w\,(wu')-v\,(uv')]^2\}\,x^2-\\&-2a\delta\,[v^2\,(vw')+w^2\,(vw')-uv\,(wu')-uw\,(uv')]\,x-\\&-\{d^2\,[w\,(wu')-v\,(uv')]^2-a^2\delta^2\,(v^2+w^2)\}=0.\end{aligned} \tag{9}$$

Преобразуя коэффициенты, имеем:

1) $$\begin{aligned}&[u\,(uv')-w\,(vw')]^2+[v\,(vw')-u\,(wu')]^2+[w\,(wu')-v\,(uv')]^2=\\&=(u^2+v^2+w^2)\,[(uv')^2+(vw')^2+(wu')^2]-[u\,(vw')+v(wu')+w\,(uv')]^2=\\&=\delta^2(u^2+v^2+w^2),\end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned}&u\,(vw')+v\,(wu')+w\,(uv')=uvw'-uwv'+vwu'-\\&-uvw'+uwv'-vwu'=0.\end{aligned} \tag{10}$$

2) $$\begin{aligned}&v^2\,(vw')+w^2\,(vw')-uv\,(wu')-uw\,(uv')=u^2\,(vw')+\\&+v^2\,(vw')+w^2\,(vw')-u^2\,(vw')-uv\,(wu')-uw\,(uv')=\\&=(vw')\,(u^2+v^2+w^2)-u\,[u\,(vw')+v\,(wu')+w\,(uv')]=\\&=(vw')\,(u^2+v^2+w^2)\quad\text{вследствие (10)}.\end{aligned}$$

Обозначим теперь

$$u^2+v^2+w^2=\beta, \tag{11}$$

тогда (9) примет вид

$$\delta^2\beta x^2-2a\delta\beta(vw')\,x-\{d^2[w(wu')-v(uv')]^2-a^2\delta^2(v^2+w^2)\}=0 \tag{12}$$

$$x=\frac{1}{\delta^2\beta}\{a\delta\beta\,(vw')\pm\sqrt{a^2\delta^2\beta^2(vw')^2-a^2\delta^4\beta(v^2+w^2)+d^2\delta^2\beta[w(wu')-v(uv')]^2}\}=$$

$$=\frac{1}{\delta\beta}\{a\beta\,(vw')\pm\sqrt{\beta}\sqrt{a^2\,[\beta(vw')^2-\delta^2\,(v^2+w^2)]+d^2\,[w\,(wu')-v(uv')]^2}\}.$$

После несложных переделок найдем, что

$$\beta (vw')^2 - \delta^2 (v^2 + w^2) = -[w (wu') - v (uv')]^2.$$

Поэтому

$$x = \frac{1}{\delta\beta} \{a\beta (vw') \pm \sqrt{\beta} \cdot \sqrt{d^2[w(wu') - v(uv')]^2 - a^2[w(wu'] - v(uv')]^2}\} =$$

$$= \frac{1}{\delta\beta} \{a\beta (vw') \pm [w(wu') - v(uw')] \sqrt{\beta} \cdot \sqrt{d^2 - a^2}\}$$

и окончательно

$$x = \frac{1}{\delta\beta} \{a\beta(vw') \pm [w(wu') - v(uv')] \sqrt{\beta} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}\}. \tag{13}$$

Подставляя найденное значение x в (8′) и делая необходимые преобразования, получим

$$y = \frac{1}{\delta\beta} \{a\beta (wu') \pm [u(uv') - w (vw')] \sqrt{\beta} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}\} \tag{13}$$

$$z = \frac{1}{\delta\beta} \{a\beta (uv') \pm [v (vw') - u (wu')] \sqrt{\beta} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}\}. \tag{13}$$

В формулах (13) верхние знаки соответствуют верхним и нижние нижним; как уже указано $\delta = \sqrt{(uv')^2 + (vw')^2 + (wu')^2}$, $\beta = u^2 + v^2 + w^2$, $(uv') = uv' - vu'$ и т. д.

Подставляя из (4), имеем окончательно:

$$x' = x_1 + \frac{1}{\delta\beta} \{\beta (vw') a \pm [w (wu') - v (uv')] \sqrt{\beta} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}\}$$

$$y' = y_1 + \frac{1}{\delta\beta} \{\beta (wu') a \pm [u(uv') - w (vw')] \sqrt{\beta} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}\} \tag{14}$$

$$z' = z_1 + \frac{1}{\delta\beta} \{\beta (uv') a \pm [v (vw') - u (wu')] \sqrt{\beta} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}\}$$

Формулы (14) решают поставленную задачу. Двойной знак соответствует двум сторонам плоскости $(u : v : w : r)$ относительно прямой $(u : v : w : r,\ u' : v' : w' : r')$, в чем не трудно убедиться. В самом деле вычислим выражение $u'x' + v'y' + w'z' + r')$. Подставляя x', y', z' из (14) и группируя члены получим

$$u'x' + v'y' + w'z' + r' = u'x_1 + v'y_1 + w'z_1 + r' + \frac{1}{\delta\beta}\, a\beta[u'(vw') + v'(wu') +$$

$$+ w'(uv')] \pm \frac{\sqrt{\beta} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}}{\delta\beta} [u'w (wu') - u'v (uv') + uv' (uv') - v'w (vw') +$$

$$+ vw' (vw') - uw' (wu')].$$

Первый четырехчлен равен нулю, так как (x_1, y_1, z_1) лежит на прямой. Многочлен в первых квадратных скобках подобно (10) также равен нулю. Многочлен во вторых квадратных скобках равен

$(uv')^2 + vw')^2 + (wu')^2 = \delta^2$. Поэтому

$$u'x' + v'y' + w'z' + r' = \pm \frac{\sqrt{\beta} \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \delta^2}{\delta \cdot \beta} =$$

$$= \pm \frac{\delta \cdot \sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{\beta}} \neq 0, \quad \text{т. к.} \quad \delta \neq 0 \quad \text{и} \quad \beta \neq 0.$$

Следовательно формулы (14) откладывают данный угол по обе стороны данной прямой.

Назовем внутренней точкой угла $[(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2\ z_2);\ (x_1, y_1, z_1;\ x', y', z')]$ такую точку, которая лежит по ту же сторону отрезка $(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2)$, как и точка (x', y', z'), и одновременно по ту же сторону отрезка $(x_1, y_1, z_1;\ x', y', z')$, как и точка (x_2, y_2, z_2).

При таком определении внутренних точек угла все внутренние точки отложенного угла лежат по данную сторону от данной прямой, именно по ту же сторону, где лежит точка (x', y', z').

Этим аксиома III^{4a} оправдана вполне.

§ 9

Аксиома III^{4b}. „Каждый угол конгруэнтен самому себе, т. е. всегда $\angle(h, k) \equiv \angle(h, k)$ и $\angle(h, k) \equiv \angle(k, h)$".

Что $\angle(h, k) \equiv \angle(h, k)$, следует из того, что после поворота $\angle(h, k)$ на угол $(1:0)_z$ мы получим тот же угол.

Что $\angle(h, k) \equiv \angle(k, h)$, следует из формулы (3) § 8, которая симметрична относительно (a, b, c) и (a', b', c'). Следовательно аксиома III^{4b} выполняется.

Аксиома III^5. Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место конгруэции

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C',$$

то всегда имеют место и конгруэции

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C', \quad \angle ACB \equiv \angle A'C'B'\text{“}.$$

Так как параллельным перенесением треугольники могут быть перенесены любой вершиной в начало, то достаточно рассмотреть два треугольника, имеющих по вершине в начале $[(0, 0, 0);\ (a, b, c);\ (a', b', c')]$ и $[(0, 0, 0);\ (d, e, f),\ (d', e', f')]$.

По формуле (5) § 6 нам дано

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2 \quad \text{и} \quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = d'^2 + e'^2 + f'^2, \tag{1}$$

а по формуле (3) § 8

$$\frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{(ab' - a'b)^2 + (bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2}} = \frac{dd' + ee' + ff}{\sqrt{(de' - d'e)^2 + ef' - e'f)^2 + (fd' - f'd)^2}}. \tag{2}$$

Требуется доказать

$$\begin{aligned}&[(a,b,c;\ 0,0,0);\ (a,b,c;\ a',b',c')]\equiv[(d,e,f;\ 0,0,0);\ (d,e,f;\ d',e',f')]\\ \text{и}\quad &[(a',b',c';\ 0,0,0);\ a',b',c';\ a,b,c)\equiv[(d',e',f';\ 0,0,0);\ (d',e',f';\ d,e,f)].\end{aligned}\tag{3}$$

Перенесем в первом равенстве (3) углы к началу, получим

$$[(0;\ -a,\ -b,\ -c);\ \ (0;\ a'-a,\ b'-b,\ c'-c)]\equiv$$
$$\equiv[(0;\ -d,\ -e,\ -f);\ \ (0;\ d'-d,\ e'-e,\ f'-f)].$$

По (3) § 8 должно быть справедливо равенство

$$\frac{a^2-aa'+b^2-bb'+c^2-cc'}{\sqrt{(ab-ab'+a'b-ab)^2+(bc-bc'+b'c-bc)^2+(ca-ca'+c'a-ca)^2}}=$$
$$=\frac{d^2-dd'+e^2-ee'+f^2-ff'}{\sqrt{(de-de'+d'e-de)^2+(ef-ef'+e'f-ef)^2+(fd-fd'+f'd-fd)^2}}$$

или

$$\frac{a^2+b^2+c^2-(aa'+bb'+cc')}{\sqrt{(a'b-ab')^2+(b'c-bc')^2+(c'a-ca')^2}}=\frac{d^2+e^2+f^2-(dd'+ee'+ff')}{\sqrt{(d'e-de')^2+(e'f-ef')^2+(f'd-fd')^2}}.\tag{4}$$

Преобразуя подкоренные во (2), получим:

$$\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2}}=$$
$$=\frac{dd'+ee'+ff'}{\sqrt{(d^2+e^2+f^2)(d'^2+e'^2+f'^2)-(dd'+ee'+ff')^2}}\tag{5}$$

Пользуясь формулами (1) из (5), получим

$$aa'+bb'+cc'=dd'+ee'+ff'.$$

В таком случае по (1) и (6) равенство (4) удовлетворяется, т. е. доказано первое из равенств (3).

Второе равенство в (3) отличается от первого только тем, что буквы со значками заменены буквами без значков и обратно. Сделав подобную перемену в (4), легко видеть, что оно по прежнему удовлетворяется, так как изменятся только уменьшаемые в числителях, но и они по (1) равны, т. е. и второе из равенств (3) справедливо.

Следовательно, аксиома III^5 удовлетворяется.

§ 10

Аксиома IV (аксиома параллельности Евклида). „Пусть a произвольная прямая и A точка вне ее, тогда в плоскости, определенной точкой A и прямою a, можно провести не более одной прямой, проходящей через A и не пересекающей a“.

Имеем плоскость $\alpha(u:v:w:r)$, в ней прямую $a(u:v:w:r,\ u':v':w':r')$ и точку $A(x_1, y_1, z_1)$ лежащую в плоскости α вне прямой a. Проведем в плоскости α прямую b через A. Согласно сказанному в § 1 прямая

b может быть, взята в виде $(a:v:w:r,\ \varphi:\chi:0:\omega)$. Обозначая общую точку прямых a и b через (x, y, z), имеем для ее определения систему уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi x + \chi y + \omega &= 0 \\ ux + vy + wz + r &= 0 \\ u'x + v'y + w'z + r' &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Для того, чтобы прямые a и b не пересекались, необходимо выполнение равенства

$$\begin{vmatrix} \varphi & \chi & 0 \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Условие прохождения прямой b через точку A дает:

$$x_1\varphi + y_1\chi + \omega = 0, \tag{3}$$

Так как система уравнений (2) и (3) относительно φ, χ, ω не может дать более одной тройки пропорциональных чисел $\varphi:\chi:\omega$, то аксиома IV выполняется.

Аксиома V_1 (*аксиома Архимеда*). „Пусть A_1 произвольная точка на прямой между произвольно данными точками A и B; строим затем точки $A_2, A_3, A_4, \ldots$, так, что точка A_1 лежит между A и A_2, A_2 между A_1 и A_3, A_3 между A_2 и A_4 и т. д., и сверх того отрезки AA_1, A_1A_2, A_2A_3, $A_3A_4, \ldots$ равны между собой: тогда в ряду точек $A_2, A_3, A_4, \ldots$ всегда существует такая точка A_n, что точка B лежит между A и A_n".

Имеем прямую $(u:v:w:r,\ u':v':w':r')$ и на ней точки $A(a, b, c)$, $B(a_1, b_1, c_1)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ и т. д., и пусть дано, например.

$$a \leqq x_1 \geqq a_1.$$

Требуется доказать, что можно найти такое положительное число n, что

$$a \leqq a_1 \leqq x_n.$$

Приводя отрезок $(a, b, c;\ x_1, y_1, z_1)$ к началу, получим равный ему отрезок $(0;\ x_1 - a,\ y_1 - b,\ z_1 - c)$. Откладывая полученный отрезок от точки A_1, получим по формуле (8) § 7, считая $(vw') > 0$,

$$x_2 = x_1 \pm \frac{1}{\delta}(vw')\,d,$$

где

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2}, \\ \delta &= \sqrt{(uv')^2 + (vw')^1 + (wu')^2}, \\ (uv') &= uv' - vu' \end{aligned}$$

и т. д.

Откладывая затем тот же отрезок от точек A_2, $A_3 \ldots A_{n-1}$, получим

$$x_3 = x_2 \pm \frac{1}{\delta}(vw')\, d = x_1 \pm \frac{2\,(vw')\, d}{\delta}$$

$$x_4 = x_3 \pm \frac{1}{\delta}(vw')\, d = x_1 \pm \frac{3\,(vw')\, d}{\delta}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = x_{n-1} \pm \frac{1}{\delta}(vw')\, d = x_1 \pm \frac{(n-1)\,(vw')\, d}{\delta}.$$

Для того, чтобы сделать $x_n \gtrless a_1$, нужно выбрать n так, чтобы

$$x_1 \pm \frac{(n-1)\,(vw')\, d}{\delta} \gtrless a_1. \tag{4}$$

Решая неравенство (4) относительно n, найдем

$$n - 1 > \frac{\pm (a_1 - x_1)\,\delta}{(vw')\, d}. \tag{5}$$

Выбрав n таким образом, мы и удовлетворим аксиому V^1.

Аксиома V^2 (*аксиома полноты*). „Элементы (точки, прямые, плоскости) геометрии образуют систему вещей, которая при условии сохранения всех указанных выше аксиом не допускает никакого расширения, т. е. к системе точек, прямых, плоскостей невозможно присоединить другую систему вещей так, чтобы в новой расширенной системе были по прежнему удовлетворены вместе все аксиомы I—IV, V^1".

Все рассмотренные до сих пор аксиомы удовлетворяются и в более узкой области Ω (1) всех алгебраических чисел, получающихся, если мы исходим из единицы и применяем конечное число раз четыре действия: сложение, вычитание, умножение и деление и пятое действие $\left|\sqrt{1+\omega^2}\right|$, где ω обозначает число, полученное уже с помощью этих пяти действий (Гильберт. Осн. геом. § 9). Но в такой ограниченной области аксиома V^2 не имеет места, так как эта область может быть различным образом пополнена новыми элементами с сохранением в силе всех аксиом I—IV, V^1.

И только взятая нами область всех вещественных чисел уже не допускает подобного расширения. Докажем это.

Пусть наша система вещей, числа области Ω, допускает расширение, и пусть ξ новая вещь.

Допустим, что подходящими соглашениями мы установили правила действий над ξ и числами из области Ω, а также подчинили ξ аксиомам порядка, так что всегда возможно установить, какое из вещественных чисел больше ξ и какое меньше. Здесь может представиться три случая.

1) В области Ω есть числа и большие ξ и меньшие. В таком случае ξ производит в области Ω Дедекиндово сечение, и согласно аксиоме Дедекинда или в нижнем классе есть наибольшее число или

в верхнем наименьшее. Пусть в нижнем классе есть наибольшее число a. В таком случае

$$a < \xi < a + \varepsilon, \tag{6}$$

где ε как угодно малое положительное число

Так как ξ подчиняется всем правилам счета, установленным для чисел области Ω, то $\xi - a$ тоже вещь из расширенной области, и из (6) имеем

$$\xi - a < \varepsilon. \tag{7}$$

Число $\xi - a$ не удовлетворяет аксиоме Архимеда. В самом деле, пусть b некоторое вещественное число. По аксиоме V^1 можно найти такое целое положительное n, что

$$(\xi - a) \, . \, n > b \tag{8}$$

и, следовательно,

$$\xi - a > \frac{b}{n},$$

что невозможно в виду (7).

Если бы в верхнем классе было наименьшее число a, то мы нашли бы, что $a - \xi$ не удовлетворяет аксиоме Архимеда.

2) В области Ω все числа меньше ξ. В таком случае снова не удовлетворена аксиома Архимеда вследствие невозможности неравенства

$$an > \xi,$$

где a вещественное число, так как и an тоже число из области Ω.

3) Все числа области Ω больше ξ. Теперь невозможно неравенство

$$\xi n > a,$$

так как в противном случае было бы $\xi > \frac{a}{n}$, что противоречит условию.

Таким образом всякое расширение области Ω ведет по крайней мере к нарушению аксиомы Архимеда. Следовательно аксиома V^2 удовлетворяется.

Таким образом Гильберт свел вопрос о взаимной непротиворечивости аксиом своей системы к вопросу о непротиворечивости аксиом арифметики, так как каждое противоречие в следствиях аксиом I-V должно было бы проявиться и в арифметике вещественных чисел.

31 августа 1924 года

И. Е. ОГИЕВЕЦКИЙ

Об одном дуалистическом законе и его приложениях

(Предварительное сообщение)

Предисловие

Цель этой статьи (*) доказать существование дуалистического закона характеристик движения, а с другой стороны, обнаружить те упрощения, которые вносит приложение этого закона к различным вопросам. В этой статье устанавливается, что каждой теореме кинематики, кинематической геометрии, сферической тригонометрии и вообще каждой теореме из геометрии и физики, представляющей собой характеристику движения, соответствует, на основании указанного закона, взаимная с ней теорема. Устанавливается также, что система уравнений с „n“ неизвестными, представляюшая собой характеристику движения, может быть разрешена путем простой подстановки, при чем для ее разрешения достаточно задать только $\frac{n}{2}$ или $\frac{n+1}{2}$ уравнений.

В этой статье доказывается также, что принцип двойственности Poncelet-Plücker'е в приложении к теоремам, имеющим кинематическую формулировку, является следствием этого дуалистического закона. Обнаруживается также, что сферическая тригонометрия, а вместе с ней и тригонометрия Лобачевского может быть построена на основании одной только векториальной формулы.

I. Об одном дуалистическом законе

Теорема, выражающая этот закон, основана на свойствах движения. Последние связаны с понятием о направлении плоскости. Направление

(*) Основные результаты этой статьи изложены были в заседаниях Харьковского Математического Общества 2 мая 1925 года и 20 мая 1926 года и в заседании Московского Научно-Исследовательского Института Математики и Механики от 28 ноября 1925 года. Некоторые из этих результатов изложены в моей статье: Über ein schiefsymmetrischen Dualitätsgesetz und seine Anwendungen [Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Bd. 51 (1927), S. 315—320].

плоскости (Umlaufsinn in der Ebene) определяем при помощи указателя (Indikatrix) последовательности вершин треугольника, вписанного в окружность данного круга, т. е. одним из двух видов циклического порядка вершин треугольника:

$$(A_1A_2A_3) = (A_2A_3A_1) = (A_3A_1A_2), \tag{1}$$

или

$$(A_1A_3A_2) = (A_3A_2A_1) = (A_2A_1A_3). \tag{2}$$

Указатели или индикатрисы, соответствующие (1) и (2), будем называть индикатрисами первого и второго класса (*).

Установим теперь понятие о преобразовании плоскости самой в себе, для чего условимся об употребляемых терминах.

Два множества будем называть гомеоморфными, если между ними можно установить двуоднозначное и непрерывное соответствие (**). Преобразование, выражаемое этим соответствием, будем называть согласно Brouwer'у топологическим отображением. Под отображением всегда будем подразумевать топологическое отображение.

Тождественное преобразование определим при помощи равенств

$$x' = x; \ldots, u' = u; \tag{3}$$

где $x', \ldots, u'$, $x, \ldots, u$ — координаты точек, участвующих в отображении

Будем говорить, что два преобразования принадлежат к одному и тому же классу (***), если одно может быть получено из другого при помощи цепи непрерывных преобразований.

Преобразования эти выражаются при помощи соотношения:

$$z' = z'(z, t), \tag{4}$$

где $a > t > b$; a и b — вещественные числа. На основании соотношения (4) каждой точке z соответствует точка z', где z' есть непрерывная функция не только z, но и параметра t.

Преобразование плоскости, удовлетворяющее и принадлежащее вместе с тождественным преобразованием к одному и тому же классу, будем называть преобразованием плоскости самой в себе (****).

Движение плоскости самой в себе мы определяем, как преобразование плоскости самой в себе, при котором сохраняется число, отвечающее

(*) Сравни: Kerkjarto. Vorlesungen über Topologie. S. 26, а также Ж. Гадамар (Заметка о некоторых приложениях указателя Кронекера). Введение в теорию функции с одной переменной. Ж. Таннери. Т. I, стр. 480.

(**) H. Poincaré. Analysis situs. Journal de l'école Polytechnique, 2 série, cahier I, p. 9

(***) L. E. J. Brouwer. „Sur la notion de „Classe" de Transformations d'une multiplicité". Proceedings of the fifth international congres of Mathematicians, Volume II, Cambridge, 1913, p. 9.

(****) Сравни H. Tietze. „Über stetige Abbildungen einer Quadratfläche auf sich selbst". Rendiconti del circolo mathematico di Palermo, t. 38, 1914, p. 251, а также H. Tietze „Über Analysis Situs". Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, B. 2, 1923, S. 47.

расстоянию между любыми двумя точками, а также направление плоскости, подвергаемой преобразованию. Существуют двоякого рода преобразования плоскости самой в себе: при одном преобразовании направление плоскости сохраняется, а при другом направление плоскости меняется на обратное; иными словами, при одном преобразовании класс индикатрисы сохраняется, а при другом преобразовании класс индикатрисы переходит из первого во второй или наоборот. Соответственно этому мы отличаем два рода движения: прямое и обращенное движение. При прямом движении класс индикатрисы плоскости сохраняется, а при обращенном движении класс индикатрисы переходит из первого во второй или наоборот из второго в первый.

Введем теперь понятие о характеристике движения.

Под характеристикой движения подразумеваем всякую вещь, (геометрическую фигуру, вектор, параметр, символ), рассматриваемую при движении плоскости самой в себе.

Мы будем отличать четные и нечетные характеристики. Под четной характеристикой мы подразумеваем такую характеристику движения, которая от индикатрисы движущейся плоскости не зависит. Нечетной же характеристикой мы называем такую характеристику движения, которая зависит от индикатрисы, класс которой определяется классом индикатрисы движущейся плоскости. Легко видеть, что индикатриса нечетной характеристики в обращенном движении будет второго класса, если при прямом движении она была индикатрисой первого класса и наоборот. Соотношения, которые при топологическом преобразовании остаются неизменными, называем топологическими инвариантами.

Соотношения, которые при движении плоскости самой в себе инвариантны, называем инвариантами движения (*). Не трудно видеть, что инварианты движения мы можем рассматривать, как характеристики движения.

Теперь мы можем доказать следующие леммы.

Лемма I (**). Пусть при движении плоскости самой в себе имеют место:

$$A(G, g); \tag{5}$$

тогда при обращенном движении имеет место:

$$A(g, G); \tag{6}$$

(*) Сравни Ph. Frank. „Die Stellung des Relativitätsprinzips im System der Mechanik und Elektromechanik". Sitzungsberichte der Wiener Academie. Bd. 118, II-a, 1909, S. 834.

(**) Лемма эта в несколько иной формулировке была изложена в нашей статье: „Основания кинематической геометрии на плоскости и приложения ее к исследованию плоских кривых", премированной в марте 1913 года Физико-Математическим Факультетом Одесского Университета золотой медалью. Вследствие условий военного времени работа эта своевременно не была напечатана. 5 декабря 1914 года мы изложили эту лемму в Математическом отделении Новороссийского Общества Естествоиспытателей.

где G и g — четные характеристики, принадлежащие подвижной и неподвижной плоскостям, а A выражает некоторое взаимнооднозначное соответствие между этими характеристиками.

Лемма эта следует из того, что при обращенном движении плоскости меняются своей подвижностью.

Лемма II. Если при движении плоскости самой в себе имеет место

$$A(U, u), \tag{7}$$

тогда при обращенном движении имеет место

$$A(\overline{u}, \overline{U}), \tag{8}$$

где U, u — нечетные характеристики, принадлежащие подвижной и неподвижной плоскостям, а A имеет то же значение, что в лемме I, черта же над U и u обозначает, что индикатриса U и u переходят из одного класса в другой. Справедливость этой леммы очевидна.

Замечание I. Если обобщить понятие о характеристике движения, можно упростить формулировку приведенных лемм, не прибегая, между прочим, к понятиям о подвижной и неподвижной плоскостях.

Замечание II. Из этой теоремы вытекает предложение Шаля: „при обмене подвижностью плоскостей, участвующих в движении плоскости в себе, центроиды меняются ролями" (*).

Теорема I. Если при движении плоскости самой в себе имеет место

$$A(G_1,\ G_2, \ldots, G_n,\ \ U_1, \ldots, U_n,\ \ g_1, \ldots, g_n,\ \ u_1, \ldots, u_n), \tag{9}$$

то имеет также место:

$$A(g_1,\ g_2, \ldots, g_n,\ \ \overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n,\ \ G_1, \ldots, G_n,\ \ \overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_n), \tag{10}$$

где G_i, U_i обозначают четные и нечетные характеристики, принадлежащие подвижной плоскости, а g_i и u_i обозначают четные и нечетные характеристики, принадлежащие неподвижной плоскости, другие обозначения имеют то же содержание, что в леммах.

В самом деле, при обращенном движении характеристики движения G_i, U_i, g_i, u_i меняют свои места в соотношении (9), а нечетные характеристики меняют свои индикатрисы, но обращенное движение существует вместе с прямым движением, а потому теорема справедлива.

Замечание III. Из леммы II следует теорема о скорости точки в обращенном движении (**).

(*) См. „Aperçu historique des méthodes en Géométrie". M. Schasles, Paris, 1875, p. 478 — 482.

(**) См. Koenigs. Leçons de cinématique, p. 127.

Следствие I. Если при движении плоскости самой в себе имеет место

$$B_i(U_1, U_2, \ldots, U_n, G_1, G_2, \ldots, G_n) = F_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, g_1, g_2, \ldots, g_n), \quad (11)$$

тогда имеют также место:

$$B_i(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n, g_1, \ldots, g_n) = F_i(\bar{U}_1, \bar{U}_2, \ldots, U_n, G_1, \ldots G_n), \quad (12)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, B_i и F_i — однозначные функции.

Следствие II. Если при движении плоскости самой в себе имеют место:

$$B_i(W_1, \ldots, W_n) = F_i(V_1, \ldots V_n), \quad (13)$$

тогда имеют также место:

$$B_i(-V_1, \ldots, -V_n) = F_i(-W_1, \ldots, -W_n), \quad (14)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, W_i — векторы, принадлежащие неподвижной плоскости, а V_i — векторы, принадлежащие подвижной плоскости.

В самом деле, векторы при прямом и обращенном движении характеризуются индикатрисами различных классов, а такие векторы равны по величине и противоположны по знаку.

Следствие III. Если при движении плоскости самой в себе имеют место:

$$B_i(W_1, \ldots, W_n) = 0 \quad \text{или} \quad F_i(V_1, \ldots, V_n) = 0, \quad (15)$$

то имеют также место:

$$B_i(-V_1, \ldots, -V_n) = 0 \quad \text{или} \quad F_i - W_1, \ldots, W_n) = 0; \quad (16)$$

при этом обозначения сохраняют то же содержание, что в следствии II.

Так как плоские векторы можно характеризовать, как системы пар вещественных чисел, поэтому следствия II и III можно еще так формулировать.

Следствие IV. Если при движении плоскости самой в себе имеют место:

$$B_i(\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n) = F_i(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n), \quad (17)$$

то имеют также место:

$$B_i(-x_1, -y_1, \ldots, -x_n, -y_n) = F_i(-\xi_1, -\eta_1, \ldots, -\xi_n, -\eta_n); \quad (18)$$

Следствие V. Если при движении плоскости самой в себе имеют место:

$$B_i(\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n) = 0, \quad \text{или} \quad F_i(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = 0, \quad (19)$$

то имеют также место:

$$B_i(-x_1, -y_1, \ldots, -x_n, -y_n) = 0, \text{ или } F_i(-\xi_1, -\eta_1, \ldots, -\xi_n, -\eta_n) = 0; \quad (20)$$

обозначают Декартовы координаты подвижной, а x_i, y_i — неподвижной точки:

Следствие VI. Если имеет место:

$$B(\xi, \eta, \alpha) = F(x, y, \alpha), \quad (21)$$

то имеют также место:

$$B(-x, -y, -\alpha) = F(-\xi, -\eta, -\alpha); \quad (22)$$

где (ξ, η), (x, y) — координаты соответствующих точек, α — параметр, представляющий собою характеристику движения, а (21) — характеристика движения.

Следствие VII. Если при условиях следствия VI имеет место:

$$B(\xi, \eta) = U(x, y), \quad (23)$$

то имеет также место

$$B(-x, -y) = U(-\xi, -\eta). \quad (24)$$

Следствие VIII. Если имеет место:

$$B(\xi, \eta, \zeta) = U(x, y, z), \quad (25)$$

то имеет также место:

$$B(-x, -y, z) = U(-\xi, -\eta, \zeta), \quad (26)$$

где (x, y, z) и (ξ, η, ζ) — однородные координаты соответствующих точек подвижной и неподвижной плоскостей.

Замечание IV. Из теоремы I и ее следствий вытекает взаимообратимость теорем плоской кинематической геометрии. Например, на основании теоремы I, вытекают друг из друга две основные теоремы кинематической геометрии о замечательных окружностях Маннгейма. Теоремы эти можно так формулировать (*):

1) Геометрическое место центров кривизны траекторий, описанных при данном движении плоскости самой в себе точками, принадлежащими бесконечно удаленной прямой, представляет собою окружность, соприкасающуюся с базой и рулеттой в мгновенном центре первого порядка, соответствующем данному движению; окружность эту называют первой окружностью Маннгейма.

2) Геометрическое место точек, описывающих при данном движении плоскости самой в себе прямолинейные элементы, представляет

(*) A. Mannheim. „Principes et développements des méthodes en géometrie cinématique" p. 31, а также L. Crelier. Géométrie cinématique plane, p. 30.

собою окружность, симметричную с первой окружностью Маннгейма и называемую второй окружностью Маннгейма.

Теоремы эти можно еще так формулировать:

1) При движении плоскости самой в себе, первой окружности Маннгейма, принадлежащей неподвижной плоскости, соответствует бесконечно удаленная прямая, принадлежащая подвижной плоскости.

2) При движении плоскости самой в себе, бесконечно удаленной прямой, принадлежащей неподвижной плоскости, соответствует окружность, симметричная с первой окружностью Маннгейма, принадлежащая подвижной плоскости.

Так как первая окружность Маннгейма и бесконечно удаленная прямая, рассматриваемые в первой теореме — суть характеристики движения, то, согласно теореме I, первой теореме должна соответствовать другая теорема, в которой роли бесконечно удаленной прямой и окружности меняются с изменением их направления, т. е. характеризующей их индикатрисы, в чем и состоит вторая теорема.

Точно также, на основании следствия VIII, вытекают одна из другой следующие две теоремы Кенигса и Маннгейма (*).

1) Геометрическое место центров кривизны траэкторий, описанных при данном движении плоскости самой в себе точками, принадлежащими прямой,

$$ux + vy + wz = 0 \tag{27}$$

представляет собою коническое сечение Риваля.

$$uk\xi\eta + vk\eta^2 - w(\xi^2 + \eta^2 - k\eta\zeta) = 0, \tag{28}$$

где (x, y, z) и (ξ, η, ζ) — координаты описывающих точек и центров кривизны, k, u, v, w — постоянные числа.

2) Точки, принадлежащие коническому сечению Риваля,

$$ukxy + vy^2 - w(x^2 + y^2 + kyz) = 0 \tag{29}$$

описывают при данном движении плоскости самой в себе траэктории, центры кривизны которых расположены на прямой

$$u\xi + v\eta - w\zeta = 0. \tag{30}$$

Замечание V. На основании указанных следствий системы уравнений, представляющих собою характеристики движения, можно разрешить непосредственно. Например, из уравнений, выражающих вращение,

$$\xi = x\cos\alpha + y\sin\alpha; \quad \eta = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \tag{31}$$

(*) G. Koenigs. Leçons de cinématique, p 444.

следует, на основании следствия VI:

$$-x=(-\xi)\cos(-\alpha)+(-\eta)\sin(-\alpha);$$
$$-y=-(-\xi)\sin(-\alpha)+(-\eta)\cos(-\alpha),$$

т. е.

$$x=\xi\cos\alpha-\eta\sin\alpha;\quad y=\xi\sin\alpha+\eta\cos\alpha; \tag{32}$$

Точно также из формул, связывающих координаты центров кривизны с координатами описывающих точек (*):

$$\xi=\frac{kxy}{x^2+y^2+ky};\quad \eta=\frac{ky^2}{x^2+y^2+ky}, \tag{33}$$

где k — расстояние между соответствующими мгновенными центрами первого и второго порядка, вытекают, на основании VII следствия, формулы:

$$x=-\frac{k\xi\eta}{\xi^2+\eta^2-k\eta};\quad y=-\frac{k\eta^2}{\xi^2+\eta^2-k\eta}; \tag{34}$$

кроме того, из

$$\xi x^2+\xi y^2+kyz\xi=kyzx;\quad \eta x^2+\eta y^2+k\eta yz=ky^2z \tag{35}$$

вытекают, на основании следствия VIII:

$$-\xi^2x-\eta^2x+k\eta\zeta x=k\xi\eta\zeta;\quad -\xi^2y-\eta^2y+k\eta y\zeta=k\eta^2\zeta. \tag{36}$$

Теорема наша и ее следствия обобщаются на случай трех и вообще n-мерного пространства.

Теоремы эти, как и в случае плоскости связаны с понятием о направлении n-мерного пространства.

Направление n-мерного пространства определяем при помощи обобщенной пирамиды (**):

$$P_n=A_1A_2,\ldots,A_{n+1}.$$

Индикатрисой пирамиды мы называем определенную последовательность его вершин, причем последовательности, которые отличаются друг от друга четным числом перестановок его двух вершин, мы относим к одному и тому же классу. Таким образом возможны, как в случае двумерного пространства, только две индикатрисы, одну из которых мы называем индикатрисой первого класса, а другую индикатрисой второго класса.

Преобразование n-мерного пространства самого в себе, когда $n>2$, определяем, как в случае плоскости.

Движение в себе n-мерного пространства определяем, как преобразование n-мерного пространства самого в себе, при котором

(*) См. мою статью „Основы плоской кинематической геометрии" Известия Екатеринославского Горного Института 1924, стр. 604.

(**) Сравни „Analysis situs de la géometrie analytique". S. Lefschetz. Paris, 1924, p. 3.

инвариантно число, отвечающее расстоянию между любыми его точками, а также направление пространства. Обращенное движение n-мерного пространства самого в себе, когда $n > 2$, а также четные и нечетные характеристики движения n-мерного пространства самого в себе сохраняют тот же смысл, как в случае движения плоскости самой в себе.

Тогда не трудно убедиться в справедливости следующей теоремы:

Теорема II. Если при движении n-мерного пространства самого в себе имеют место:

$$A_i(G_1, \ldots, G_n, U_1, \ldots, U_n, g_i, \ldots, g_n, u_1, \ldots, u_n), \tag{37}$$

то имеют также место:

$$A(g_1, \ldots, g_n, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n, G_1, \ldots, G_n, \bar{U}_1, \ldots, \bar{U}_n), \tag{38}$$

где G_i, U_i, g_i, u_i обозначают четные и нечетные характеристики движения n-мерного пространства самого в себе, при чем G_i и U_i принадлежат подвижному, а g_i и u_i — неподвижному пространству, черта над u_i и U_i обозначает, что индикатриса нечетных характеристик перешла из одного класса в другой, A выражает некоторое взаимно-однозначное соответствие между этими характеристиками.

Следствие I. Если при движении n-мерного пространства самого в себе имеют место:

$$B_i(U_1, U_2, \ldots, U_n, G_1, \ldots, G_n, u_1, u_2, \ldots, u_n, g_2, \ldots, g_n) = 0, \tag{39}$$

то имеют также место:

$$B_i(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n, g_1, \ldots, g_n, \bar{U}_1, U_2, \ldots, U_n, G_1, \ldots, G_n) = 0, \tag{40}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, (39) — характеристики или инварианты движения.

Следствие II. Если при движении n-мерного пространства самого в себе имеют место:

$$B_i(W_1, W_2, \ldots, W_n, V_1, V_2, \ldots, V_n) = 0, \tag{41}$$

то имеют также место:

$$B_i(-V_1, -V_2, \ldots, -V_n, -W_1, -W_2, \ldots, -W_n) = 0, \tag{42}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$; W_i — векторы, принадлежащие подвижному, V_i — векторы, принадлежащие неподвижному n-мерному пространству, B_i — функции, устанавливающие взаимнооднозначное соответствие между W_i и V_i.

Эта теорема непосредственно следует из того, что векторы n-мерного пространства в прямом и обращенном движении характеризуются индикатрисами различных классов.

Замечание VI. Теорему II, выражающую свойство характеристик движения, называем дуалистическим косо-симметрическим законом.

Следствие III. Если при движении n-мерного пространства самого в себе имеют место:

$$B_i(W_1, \ldots, W_n) = 0 \quad \text{или} \quad B_i(V_1, \ldots, V_n) = 0, \tag{43}$$

то имеют также место:

$$B_i(-V_1, \ldots, -V_n) = 0, \quad \text{или} \quad B_i(-W_1, \ldots, -W_n) = 0. \tag{44}$$

Следствие IV. Если при движении n-мерного пространства самого в себе имеют место:

$$B_i(\xi_1, \eta_1, \ldots, \tau_1, \ldots, \xi_n, \eta_n, \ldots, \tau_n, x_1, y_1, \ldots, t_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots, t_n) = 0, \tag{45}$$

то имеют также место:

$$B_i(-x_1, -y_1, \ldots, -t_1, \ldots, -x_n, -y_n, \ldots, -t_n, -\xi_1, -\eta_1, \ldots, -\tau_1, \ldots, -\xi_n, -\eta_n, \ldots, -\tau_n) = 0; \tag{46}$$

при чем $\xi_i, \eta_i, \ldots, \tau_i$ — n чисел, характеризующих подвижной вектор, а $x_i, y_i, \ldots, t_i$ — n чисел, характеризующих неподвижный вектор n-мерного пространства, u_i имеют то же значение, что в следствии II.

Следствие V. Если при движении четырехмерного пространства самого в себе имеют место:

$$B_i(W, V, x\ y, z, t, a) = 0, \tag{47}$$

то имеют также место:

$$B_i(-V, -W, -x, -y, -z, -t, -a) = 0, \tag{48}$$

где W и V соответствующие векторы неподвижного и подвижного четырехмерного пространства, x, y, z, t — Декартовы координаты точки четырехмерного пространства, a — параметр, представляющий собою нечетную характеристику движения.

Следствие VI. Если при движении четырехмерного пространства самого в себе имеют место:

$$B_i(L, M, N, P, X, Y, Z, T, x, y, z, t, a) = 0, \tag{49}$$

то имеют также место:

$$B_i(-X, -Y, -Z, -T, -L, -M, -N, -P, -x, -y, -z, -t, -a) = 0, \tag{50}$$

где L, M, N, P и X, Y, Z, T — компоненты соответствующих подвижного и неподвижного вектора четырехмерного пространства, остальные обозначения имеют то же содержание, что в следствии V.

Следствие VII. Если при движении четырехмерного пространства самого в себе имеют место:

$$B_i(X, Y, Z, P, x, y, z, t, a) = 0, \tag{49'}$$

то имеют также место:

$$B_i(-X,\ -Y,\ -Z,\ -T,\ -x,\ -y,\ -z,\ -t,\ -a)=0. \qquad (50')$$

Следствие VIII. Ортогональные преобразования (*) n-мерного пространства при неподвижном начале координат удовлетворяют соотношениям (45) и (46).

В самом деле, прямые преобразования имеют вид:

$$x_i'=a_{i1}\ x_1+a_{i2}\ x_2+\cdots+a_{ni}x_n;\quad i=1,2,\ldots,n; \qquad (51)$$

а обратные преобразования записываются:

$$x_i=a_{1i},\ x_1'+a_{2i},\ x_2'+\cdots+a_{ni}x_n', \qquad (52)$$

где $i=1,2,\ldots,n$; и $x_1,\ldots,x_n$, $x_1',\ldots,x_n'$ — Декартовы координаты подвижной и неподвижной точки n-мерного пространства. Коэффициенты же a_{ij} зависят от индикатрисы (i, j), определяемой подвижными и неподвижными координатами n-мерного пространства или соответствующими подвижным и неподвижным вектором, угол между которыми определяется индикатрисой n-мерного пространства, к которому эти векторы принадлежат; поэтому a_{ij} представляет собою нечетную характеристику движения и при обращенном движении принимает вид a_{ji}.

II. О системах уравнений, представляющих собою характеристики движения

Как следует из вышеизложенного, системы уравнений, представляющих собою характеристики движения, удовлетворяют соотношениям вида (21), (22), (25), (26), (45) и (46), а такие системы непосредственно разрешаются, а именно системы:

$$x=\xi\cos a-y\sin a;\quad y=\xi\sin a+\eta\cos a; \qquad (32)$$

$$x=\frac{k\xi\eta}{\xi^2+\eta^2-k\eta};\quad y=\frac{k\eta^2}{\xi^2+\eta^2-k\eta} \qquad (34)$$

получаются из систем:

$$\xi=x\cos a+y\sin a;\quad \eta=-x\sin a+y\cos a, \qquad (31)$$

и

$$\xi=\frac{kxy}{x^2+y^2+ky};\quad \eta=\frac{ky^2}{x^2+y^2+ky}; \qquad (33)$$

путем замены ξ — через $-x$, η — через $-y$, x — через $-\xi'$, y — через $-\eta$ и a — через $-a$.

(*) Здесь идет речь о преобразованиях, определитель которых равен единице (Transformation unimodular). Cp. Invariantentheorie, R. Weitzenböck 1913, S. 6.

Точно также система (52) получается из системы (51) путем замены x_i' через $-x_i$, x_i через $-x_i'$ и a_{ij} через $-a_{ji}$.

Не трудно видеть, что для разрешения этих систем уравнений достаточно задать только m уравнений, где целое число m удовлетворяет одному из равенств:

$$n = 2m - 1; \quad n = 2m;$$

где n число известных системы.

Предполагая, что n число четное, допустим, что нам заданы только $\frac{n}{2}$ уравнений системы (51). Из них путем указанной замены получим $\frac{n}{2}$ уравнений системы (52), а вместе с заданными — n уравнений, которые мы сможем разрешить. Таким же образом убеждаемся, что в случае, когда n—нечетное число, то разрешение системы возможно, когда задано только $\frac{n+1}{2}$ уравнений системы, а когда n—четное число, то достаточно иметь $\frac{n}{2}$ уравнений. Когда число неизвестных равно двум, то одно уравнение уже дает возможность определить два вытекающие из него другие уравнения, например: уравнения обратных преобразований координат (31) можно получить только из одного уравнения (32).

III. О принципе двойственности Poncelet-Plücker'a

Покажем, что принцип двойственности Poncelet-Plücker'a является следствием нашего дуалистического закона в том смысле, что всякая взаимная теорема геометрии, имеющая кинематическую формулировку и получаемая при помощи принципа двойственности, может быть также получена при помощи нашего дуалистического закона.

Прежде всего покажем, как следствие теоремы II, что

$$ux + vy + 1 = 0 \tag{53}$$

выражает не только прямую, но и точку.

В самом деле, прямую мы можем рассматривать, как траэкторию, описанную при некотором движении плоскости в себе, например, одной из крайних точек движущегося отрезка в случае прямого Карданова движения.

Соответственно этому уравнение (53) выражает, что подвижная точка (x, y) описывает неподвижную прямую (u, v). Иными словами уравнение (53) характеризует движение плоскости в себе, при котором неподвижному вектору (u, v) соответствует подвижной вектор (x, y) при любых положениях плоскости. Тогда векторы (u, v) и (x, y), удовлетворяющие соотношению (53), представляющему собой частный случай соотношения (45), должны, на основании следствия IV, удовлетворять также уравнению:

$$(-x)(-u)+(-y)(-v)+1=0; \tag{54}$$

характеризующее движение плоскости в себе, при котором неподвижный вектор $(-x, -y)$ соответствует подвижному вектору $(-u, -v)$ в любых его положениях.

Иными словами, из того, что (53) есть уравнение прямой, следует, что (53) есть также уравнение точки.

Точно также можно показать, что из того, что

$$ux+vy+wz+1=0 \tag{55'}$$

выражает собой плоскость, следует, что (55) выражает собой также точку.

Не трудно также показать, что на основании нашего закона можно получить из различных теорем геометрии, представляющих собою характеристики движения, взаимные с ними теоремы.

Пример I. Из теоремы, что уравнение переменной точки ряда имеет вид:

$$ux_0+vy_0+1+\lambda(ux_1+vy_1+1)=0 \tag{55}$$

следует, что уравнение переменного луча пучка имеет вид:

$$\begin{gathered}(-u_0)(-x)+(-v_0)(-y)+1+\\+\lambda[(-u_1)(-x)+(-v_1)(-y)]+1=0,\end{gathered} \tag{56}$$

т. е.

$$u_0x+v_0y+1+\lambda(u_1x+v_1y+1)=0. \tag{57}$$

Пример II. Из теоремы, что условие прохождения плоскости через три точки имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix}=0 \tag{58}$$

следует, на основании следствия IV из теоремы II, что уравнение точки пересечения трех плоскостей, имеющих тангенциальные координаты (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2) и (u_2, v_3, w_3) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} u & v & w & 1\\ u_1 & v_1 & w_1 & 1\\ u_2 & v_2 & w_2 & 1\\ u_3 & v_3 & w_3 & 1\end{vmatrix}=0 \tag{59}$$

ибо (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) и (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), (u_3, v_3, w_3) мы можем рассмотреть, как векторы.

Пример III. Из того, что лучевые координаты удовлетворяют соотношению:

$$P_{12}P_{34}+P_{13}P_{24}+P_{14}P_{23}+0 \tag{60}$$

следует, что осевые координаты удовлетворяют соотношению:

$$\Pi_{12}\Pi_{34}+\Pi_{13}\Pi_{24}+\Pi_{14}\Pi_{23}=0, \tag{61}$$

так как

$$P_{14}=x_1-y_1; \quad P_{23}=x_2-y_2; \quad P_{34}=x_3-y_3;$$
$$P_{23}=x_2y_3-x_3y_2; \; P_{13}=x_3y_1-y_3x_1; \; P_{12}=x_1y_2-y_1x_2,$$

а

$$\Pi_{14}=u_1-v_1; \quad \Pi_{24}=u_2-v_1; \quad \Pi_{34}=u_3-v_3;$$
$$\Pi_{23}=u_2v_3-u_3v_2; \; \Pi_{13}=u_3v_1-v_3u_1; \; \Pi_{12}=u_1v_2-v_1u_2,$$

где x_1, x_2, x_2 и y_1, y_2, y_3 — координаты двух точек прямой, а u_1, u_2, u_3 и v_1, v_2 v_3 тангенциальные координаты двух плоскостей, пересекающихся по некоторой прямой.

IV. Векториальное обоснование сферической тригонометрии

К. Коммерель в своей очень интересной работе „Vektorielle Begründung der Sphärischen Trigonometrie (*)" показывает, что основные формулы сферической тригонометрии могут быть получены из двух определителей.

Определители эти он получает из двух уравнений:

$$\mathfrak{P}^i=a^{i1}\mathfrak{P}_1+a^{i2}\mathfrak{P}_2+a^{i3}\mathfrak{P}_3; \tag{62}$$

$$\mathfrak{P}_i=a_{i1}\mathfrak{P}^1+a_{i2}\mathfrak{P}^2+a_{i3}\mathfrak{P}^3; \tag{63}$$

где

$$a_{ik}=\mathfrak{P}_i\mathfrak{P}_k \tag{64}$$

и

$$a^{ik}=\mathfrak{P}^i\mathfrak{P}^k; \tag{65}$$

$$i=1,\ 2,\ 3 \quad \text{и} \quad k=1,\ 2,\ 3,$$

— векторы двух основных систем, удовлетворяющих

$$\mathfrak{P}_i\mathfrak{P}^k=\begin{cases} 0 \text{ для } i \neq k; \\ 1 \text{ для } i=k; \end{cases} \tag{66}$$

при чем, как векторы $\mathfrak{P}_i$, так и векторы $\mathfrak{P}^k$ линейно независимы.

(*) Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker Vereinigung, Bd. 32, 1923, S. 86—91. Сравни также: G. Hessenberg. „Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie". Math. Annalen, Bd. 78, p. 93.

Каждый из векторов проходит через точки 0 и P_i и каждый из векторов проходит через точки 0 и P^k.

Указанные точки определяются следующим образом: 0 — центр сферы с радиусом, равным 1, P_i и P^k — ($i = 1, 2, 3$ и $k = 1, 2, 3$) суть вершины двух сферических треугольников $P_1P_2P_3$ и P^1, P^2, P^3, где один из них является полярным по отношению к другому.

При движении сферы самой в себе с сохранением своей индикатрисы образуются треугольники $P_1P_2P_3$ и $P^1P^2P^3$ и имеют место соотношения (66), а вместе с ними и соотношения (62) и (63), т. е. (62) и (63) суть характеристики движения.

Тогда на основании следствия II теоремы II из уравнения (62), которое можно переписать [см. (65)]

$$\mathfrak{P}^i = \mathfrak{P}^i\mathfrak{P}^1\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}^i\mathfrak{P}^2\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}^i\mathfrak{P}^2\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}^i\mathfrak{P}^3\mathfrak{P}_2,$$

следует:

$$-\mathfrak{P}_i = -\mathfrak{P}_i\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}^1 - \mathfrak{P}_i\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}^2 - \mathfrak{P}_i\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}^3,$$

которое, на основании (64), записывается:

$$\mathfrak{P}_i = a_{i1}\mathfrak{P}^1 + a_{i2}\mathfrak{P}^2 + a_{i3}\mathfrak{P}^3;$$

иными словами, из уравнений (62) следуют уравнения (63).

Аналогично могут быть получены друг из друга и другие пары формул: (8), (10), (11), (12) и (13), встречающиеся в статье Коммереля (*).

Отсюда следует, что для вывода основных формул сферической тригонометрии достаточна только одна из двух формул: (62) или (63).

Так как основные формулы сферической тригонометрии приводятся к формулам тригонометрии Лобачевского при замене сторон a, b, c сферического треугольника через $-ai, -bi, -ci$, следовательно тригонометрия Лобачевского также может быть построена на одной только векториальной формуле.

П р и м е ч а н и е. Обобщение теоремы II и ее следствий, как и другие приложения, будут изложены в другой, большей работе на эту же тему.

Здесь укажу только на следующие два факта.

1. Между первой и второй группой уравнений Максвелла для пустоты существует связь, определяемая следствием VI.

2. Не трудно показать, что известные Гамильтоновы уравнения движения:

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{dp_k}; \quad \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_k}$$

обладают этим же свойством.

(*) См. K. Kommerel, loc. cit.

I. OGIEWETZKI

Ueber ein Dualitätsgesetz und seine Anwendungen

RESUMÉ

In dieser Arbeit wird die Existenz eines Dualitätsgesetzes und die Anwendungen dieses Gesetzes auf die Geometrie und Physik bewiesen.

Besonders wird bewiesen dass das Prinzip der Dualität der Geometrie von Poncelet-Plücker eine Folgerung aus unserem Dualitätsgesetz ist, in dem Sinne, dass jede duale Ubersetzung der Lehrsätze, welche als Bewegungscharakteristiken (*) ansehen werden können, wie im Sinne der Projektiven Geometrie geschiet, auch durch Anwendungen unseres Dualitätsgesetzes erhalten wird.

Es wird auch bewiesen, dass man kann ein System von Gleichungen mit „n" Unbekannten, welches ein Bewegungscharakteristik ist, unmittelbar lösen auch im Falle, wenn nur $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n+1}{2}$ Gleichungen gegeben sind.

Als Beispiele können die orthogonalen Transformationen

$$x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$$

und

$$x_i = a_{1i}x'_1 + a_{2i}x'_2 + \cdots + a_{ni}x'_n$$

dienen. Wie es ist leicht zu sehen, folgen diese Gleichungen durch die Substitution

$$x'_i = -x_i; \quad x_i = -x'_i; \quad a_{ij} = a_{ji}$$

auseinander.

Endlich wird bewiesen, dass die zwei vektoriellen Grundformeln der sphärischen Trigonometrie des Herrn K. Kommerel (*) folgen auseinander; mit anderen Worten, dass die sämmtlichen Grundformeln der Trigonometrie nicht aus zwei, sondern aus einer vektoriellen Formel abgelesen werden können.

(*) Die Dinge (z. B. Formeln, Symbole, Parameter, Vektoren, Geometrische Flächen), die wir bei einer Bewegung anschen oder welche eine Bewegung charakterisieren nennen wir Bewegungscharakteristiken.

(*) Sieh K. Kommerel. „Vektorielle Begründung d. sphär. Trigonometrie"; loc. cit.

JURI NEUSCHÜLER

Ueber den mehrdimensionalen Raum

Vorwort

In dieser Arbeit beweise ich dass nicht nur die Fläche eine absolute Invariante hat, sondern auch jeder mehrdimensionaler Raum von n Dimensionen.

Im Beweise basierte ich mich auf dem Gedanken, dass wenn wir die algebraische Form X_n^k konventionnell wie einen linearen Ausdruck bezeichnen, indem diese Bezeichnung nicht als deus ex machina speziell ad hoc eingeführt wird, sondern sie durch den von mir bewiesenen Pascalschen Potenzen der Jacobi'schen Determinante empfohlen ist, — dass dann die Grenzen zwischen den Begriffen der Form und des Vektors verschwinden, welcher Umstand die Theorie der absoluten Invariante einer algebraischen Form X_n^k mit veränderlichen Koeffizienten, die ich in meiner Arbeit entwickle, an die Differentialgeometrie mittelst der Vektoranalysls anzuwenden erleichtert. Um die Anwendung durchzuführen, sah ich mich gezwungen die Jacobi'sche Funktionaldeterminante zu verallgemeinern, nämlich: ich nahm in Betracht nicht nur das erste Differential der Entfernung, sondern auch die höheren. Infolge dessen wird erhellt, dass um die Rauminvariante bei höherer Dimensionenzahl aufzuschen und festzustellen, ist es keinswigs gleichgültig, aus welchem Raume man den ersten beobachtet.

Bei der Lösung der Frage über den mehrdimesionalen Raum, die ich. mir gestellt hatte, musste ich, ausser der Präzisierung des Vektorbegriffes, auch einige neue Gestalten für die Potenzen einer Determinante geben Eine der letzten deckt die innere Natur der Raumdeterminanten auf, indem es sich die Gründe der Vieldeutigkeit ihrer erklärt, wenn die Klasse ungerade ist.

Wenn, im Frühling dieses Jahres, die Grundgedanken dieser Arbeit konspektiv formuliert und dem Verwalter der Katheder der Geometrie, Prof. D. M. Sintzow, übergegeben waren, — so war so gut, mir Lecat's Monographie — Abrégé de la théorie des déterminants à n dimensions — zu geben, wofür ich meine Dankbarkeit ausdrücke.

§ 1. Zerlegung des Vektors

1. Betrachten wir im Raume von $n+1$ Dimensionen einen von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ abhängigen Vektor, den wir mit $R(x)$ bezeichnen. Er ist nach $n+1$ Richtungen zerlegbar. Wählen wir für dieselben die folgenden:

1) die n derivierten Vektoren $R_1' R_2', \ldots, R_n'$ und 2) das äussere Produkt, das wir im Folgenden folgendermassen bezeichnen

$$[R_1' R_2' R_3', \ldots, R_n'] \equiv [R]$$

und das niemals verschwindend gedacht ist.

Interpretieren wir den Vektor $R(x)$ als Radiusvektor einer Hyperfläche, so sind die ersten Richtungen tangentiell und die letztere — normal zur Hyperfläche.

Bei diesen Bezeichnungen ist $(dR)^2$ die 1-te fundamentale Differentialform der Flächentheorie.

2. Zerlegen wir nach den erwähnten Richtungen die zweite Derivierte

$$R_{ij} = \frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j}$$

so erhalten wir:

$$R_{ij} = R_0^{ij}[R] + \sum_1^n {}_m R_m^{ij} R_m,$$

wo

$$R_0^{ij} = \frac{R_{ij}\,[R]}{[R]^2}\,; \quad R_m^{ij} = \frac{[R_m] R_{ij}}{[R_m] R_m} = \frac{[R_m^{ij}]\,[R]}{[R]^2}\,.$$

Hier bezeichnet $[R_m]$ das Resultat der Ersetzung in der Normale $[R]$ der Richtung R_m durch $[R]$ selbst; $[R_m^{ij}]$ ist das Resultat der Ersetzung in $[R]$ der Richtung R_m durch die zweite Derivierte R_{ij}.

Die R_0^{ij} sind die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform der Flächentheorie, nämlich

$$\frac{d^2 R[R]}{[R]^2}\,.$$

Die R_m^{ij} sind die Christoffelschen Symbole zweiter Art, was aus der Gleichung folgt:

$$R_{ij} R_m = R_0^{ij}[R] R_m + \sum_1^n {}_k R_k^{ij} R_k R_m = \sum_1^n {}_k R_k^{ij} a_{km},$$

wo die a_{mk} die Elemente der Determinante $[R]^2$ sind.

3. Der Vektor $[R_m]$ zerlegt lautet:

$$[R_m] = M_0[R] + \sum_1^n {}_k M_k R_k = \sum_1^n {}_k M_k R_k$$

wo

$$M_k = \frac{[R_m]\,[R_k]}{R_k[R_k]} = -\frac{[R_m]\,[R_k]}{[R]^2} = K_m.$$

Um den Sinn des $M_k = K_m$ zu erklären, lösen wir das System:

$$[R_m]R_1 = \sum_{1}^{n}{}_k M_k R_k R_1 = \sum_{1}^{n}{}_k M_k a_{k1} = 0$$

$$[R_m]R_2 = \sum_{1}^{n}{}_k M_k R_k R_2 = \sum_{1}^{n}{}_k M_k a_{k2} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[R_m]R_m = \sum_{1}^{n}{}_k M_k R_k R_m = \sum_{1}^{n}{}_k M_k a_{km} = -[R]^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[R_m]R_n = \sum_{1}^{n}{}_k M_k R_k R_n = \sum_{1}^{n}{}_k M_k a_{kn} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ziehen wir

$$M_k = \frac{-[R]^2 A_{km}}{[R]^2} = -A_{km}.$$

Folglich ist

$$A_{km} = -M_k = -K_m = \frac{[R_k]\,[R_m]}{[R]^2}$$

ein Element der zu $[R]^2$ reziproken Determinante.

4. Der Vektor $[R^{ij}_m]$ zerlegt lautet.

$$[R^{ij}_m] = M^{ij}_0[R] = \sum_{1}^{n}{}_k M^{ij}_k R_k.$$

Die Komponenten haben hier den Sinn

$$M^{ij}_0 = \frac{[R^{ij}_m]\,[R]}{[R]^2} = R^{ij}_m$$

$$M^{ij}_k = \frac{[R^{ij}_m]\,[R_k]}{R_k[R_k]} = \frac{K_m[R^{ij}_m]R_m}{R_k[R_k]} = \frac{-A_{km}R_{ij}[R]}{[R]^2} = -A_{km}R^{ij}_0,$$

folglich ist

$$[R^{ij}_m] = R^{ij}_m[R] - R^{ij}_0 \sum_{1}^{n}{}_k A_{km} R_k.$$

5. Endlich zerlegen wir den Vektor

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[R]=\sum_{1}^{n}{}_k [R_k^{ki}]=\sum_{1}^{n}{}_k \{R_k^{ki}[R]-R_0^{ki}\sum_{1}^{n}{}_p A_{kp}R_p\}=$$

$$=\sum_{1}^{n}{}_k R_k^{ki}[R]-\sum_{1}^{n}{}_{kp} R_0^{ki}A_{kp}R_p.$$

Setzen wir $[R]=Ue$, wo $U=|[R]|$, und $e=\frac{[R]}{|[R]|}$, $e^2=1$.

So ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[R]=\frac{\partial}{\partial x_i}(Ue)=e\frac{\partial}{\partial x_i}U+U\frac{\partial}{\partial x_i}e;$$

wovon die Beziehungen fliessen:

$$\sum_{1}^{n}{}_k R_k^{ki}=\frac{1}{U}\frac{\partial}{\partial x_i}U=\frac{\partial}{\partial x_i}\lg\sqrt{U}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\lg[R]^2;$$

$$\frac{\partial e}{\partial x_i}=-\sum_{1}^{n}{}_{kp} R_0^{ki}\frac{A_{kp}}{\sqrt{[R]^2}}R_p=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{[R]}{\sqrt{[R]^2}}.$$

6. Aus der letzten Formel ziehen wir:

$$\sum_{1}^{n}{}_i\left(\frac{\partial e}{\partial x_i}dx_i\right)^2=$$

$$=\left(\sum_{1}^{n}{}_i - dx_i\sum_{1}^{n}{}_{kp} R_0^{ki}\frac{A_{kp}}{\sqrt{[R]^2}}R_p\right)^2=$$

$$=\sum_{1}^{n}{}_{ij} dx_i dx_j\sum_{1}^{n}{}_{kpk'p'} R_0^{ki}R^{k'j}\frac{A_{kp}A_{k'p'}}{[R]^2}R_pR_{p'}=$$

$$=\sum_{1}^{n}{}_{ij} dx_i dx_i\sum_{1}^{n}{}_{kpk'p'} R_0^{ki}R_0^{k'j}\frac{A_{kp}A_{k'p'}}{[R]^2}a_{pp'}=$$

$$=\sum_{1}^{n}{}_{ij} dx_i dx_j\sum_{1}^{n}{}_{kpk'} R_0^{ki}R_0^{k'j}\frac{A_{kp}}{[R]^2}\sum_{1}^{n}{}_{p'} A_{k'p'}a_{pp'}=$$

$$=\sum_{1}^{n}{}_{ij} dx_i dx_j\sum_{1}^{n}{}_{kp} R_0^{ki}R_0^{pj}A_{kp}.$$

Beschränken wir uns auf den dreidimensionalen Raum, so bekommen wir die dritte fundamentale Differentialform der Flächentheorie.

7. Die Tangentialebene im Punkte R ist

$$(X-R)[R]=0$$

Schreiben wir diese Gleichung für den unendlich nahen Punkt $R+dR$:

$$(X-R-dR)([R]+d[R])=0.$$

Aus den beiden Gleichungen soll nun x eliminiert werden. Dazu transformiren wir die zweite Gleichung folgendermassen:

$$0=(X-R-dR)([R]+d[R])=(X-R)([R]+d[R])=(X-R)\,d[R]=0.$$

Ordnen wir den Punkt X im geodetischen unendlich-kleinen Kreise um den Mittelpunkt R ein, so bekommen wir

$$\delta R d[R]=0$$

wo δR irgendeine Tangentialrichtung ist. Soll nun die Normalrichtung für $d[R]$ ausgeschlossen werden, d. h. $\delta=d$, so bekommen wir:

$$0=dRd[R]=\sum_{1j}^{n} R_j dx_j\,.\,(-1)\sum_{1i}^{n} dx_i \sum_{1kp}^{n} R_0^{ki}.$$

$$\frac{A_{kp}}{\sqrt{[R]^2}}R_p=-\sum_{1ij}^{n} dx_i dx_j \sum_{1kp}^{n} R_0^{ki}\frac{A_{kp}}{\sqrt{[R]^2}}R_pR_j=$$

$$=-\sum_{1ij}^{n} dx_i dx_j \sum_{1kp}^{n} R_0^{ki}\frac{A_{kp}}{\sqrt{[R]^2}}a_{pj}=$$

$$=-\sum_{1ij}^{n} dx_i dx_j \sum_{1k}^{n} R_0^{ki}\sum_{1p}^{n}\frac{A_{kp}}{\sqrt{[R]^2}}a_{pj}=$$

$$=-\sum_{1ij}^{n} dx_i dx_j R_0^{ij}=0.$$

Das ist die Differentialgleichung der Asymptoten, wenn wir uns auf den dreidimensionalen Raum beschränken.

8. In diesem Punkte beschränken wir uns auf den dreidimensionalen Raum: Die Gleichung der Normale im Punkte R ist

$$[(X-R)[R]]=0$$

oder

$$X-R=K[R]$$

wo K ein Proportionalitätsfactor ist.

Schreiben wir nun die Gleichung der Normale im unendlich-nahen Punkte

$$[(X-R-dR)([R]+d[R])]=0.$$

Um die Veränderliche X aus den beiden Gleichungen zu eliminiren, bemerken wir, dass, da die Normale zu dR orthogonal ist, die letztere Gleichung mit dR scalar multipliziert werden kann und danach folgendermassen transformirt:

$$0=dR[(X-R-dR)([R]+d[R])]=[dR(X-R-dR)].$$
$$.([R]=d[R])=[dR(X-R)]([R]+d[R])=$$
$$=dR[(X-R)([R]+d[R])]=dR[(X-R)d[R]]=$$
$$=K[R]\,[dRd[R]]=K[R]\,[dR\,.\,Ude]=KU[R]\,[dRde]=0=[R]\,[dRde].$$

Nun setzten wir statt der Differentiale ihre Werte:

$$0=[R]\left[\sum_{1j}^{n} R_j dx_j - \sum_{1i}^{n} dx_i \sum_{1kp}^{n} R_0^{ki} \frac{A_{kp}}{\sqrt{[R]^2}} R_p\right]=$$

$$=-[R]\left[\sum_{1ij}^{n} dx_i dx_j \sum_{1kp}^{n} R_0^{ki} \frac{A_{kp}}{\sqrt{[R]^2}} R_p R_j\right]=$$

$$=-\sum_{1ij}^{n} dx_i dx_j \sum_{1kp}^{n} R_0^{ki} \frac{A_{kp}}{\sqrt{[R]^2}} [R]\,[R_p R_j]=$$

$$=-\sum_{1ij}^{n} dx_i dx_j \sum_{1kp}^{n} R_0^{ki} A_{kp}=0 \quad (p \neq j).$$

Das ist die Differentialgleichung der Krümmungslinien.

9. Betrachten wir jetzt das k-te Differential des Vektors $R(x)$ und bilden wir den Ausdruck

$$D^k R=\frac{d^k R[R]}{[R]^2},$$

dessen Koeffizienten die Normalkomponenten in der Zerlegung der k-ten Vektorderivierten sind.

Nehmen wir die k-te Schiebung der Form $D^k R$, so erhalten wir, wenn n die Zahl der Veränderlichen ist, dass

$$Sch_n(D^k R)$$

invariant und eine Funktion der Koeffizienten der Riemannschen Differentialform ist, nur wenn

$$n=k=2.$$

Dieser sehr spezielle Ausnahmeffall kann nicht der Forderung der mathematischen Allgemeinheit genügen. Ausserdem lässt dieser Umstand vermuthen, dass das Grassmannsche Gebäude nur ein analytischer Traum sei, aber keine Ahnung der in der objektiven Welt herrschenden Beziehungen. Der schärfste und tiefste Ausdruck dieser objektiven Beziehungen ist eine Differentialgleichung. In der vorliegender Untersuchung beweise ich, dass der mehrdimensionale Raum mathematisch existiert, und stelle die entsprechende Verallgemeinerung der Riemannschen Massbestimmung fest. Ob die aufgestellten Differentialgleichungen bestimmten objektiven Beziehungen entsprechen, oder sie sind nur Folgen der Axiome der reinen Analysis, — diese Frage geht aus den Rahmen meiner Untersuchung. Was aber zu behaupten ist — das Problem der mehrdimensionalen Räume ist mathematisch vollständig gelöst.

Um zu der angewiesenen Verallgemeinerung zu gelangen, musste ich die Begriffe der Determinante, des Vektors und der algebraischen Form mit veränderlichen Koeffizienten untersuchen, einige neue Beziehungen unter ihnen weisen.

§ 2. Determinantenprodukt

1. Wenn wir das Produkt $\overset{n}{\underset{1}{\Pi_i}}\, a_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ einklammern, so bekommen wir, bei passendem Sinne der a_i, die Determinante

$$[\Pi_i a_i] = \underset{ji}{S}(-1)^{\eta}\Pi_i a_{ij_i}.$$

Klammern wir nun jeden Summand der Determinante ein, so bekommen wir die Determinante 3-ter Klasse

$$D_n^3 = [\Pi_i a_i]_2 = \underset{ji_1 ji_2}{SS}(-1)^{\eta_1+\eta_2}\Pi_i a_{ij_{i_1}j_{i_2}}.$$

Dieses Process können wir so oft iterieren, bis wir die Raumdeterminante k-ter Klasse gewinnen:

$$D_n^k = [\Pi_i a_i]_{k-1} = \underset{j_1 j_2}{SS}, \ldots, \underset{j_{k-1}}{S}(-1)^{\Sigma\eta_i}\Pi_i a_{ij_{i_1}j_{i_2}\ldots, j_{i_{k-1}}}.$$

Diese Verallgemeinerung des Grassmannschen Algorithmus ist die einfachste und praktischste Methode, den analytischen Ausdruck D_n^k zu gewinnen.

2. Zum Beispiel, betrachten wir die Determinante 2 Ordnung:

1) $-(x_1 x_2)$
2) $-(x_1 y_1)(x_2 y_2) - (x_1 y_2)(x_2 y_1)$
3) $-(x_1 y_1 z_1)(x_2 y_2 z_2) - (x_1 y_1 z_2)(x_2 y_2 z_1) - (x_1 y_2 z_1)(x_2 y_1 z_2) +$
$+ (x_1 y_2 z_2)(x_2 y_1 z_1)$ u. s. w.

3. Wenden wir den Algorithmus auf die Gleichungen

1) $\Pi_i a_i \Pi_i b_i, \ldots, \Pi_i c_i = \Pi_i a_i b_i, \ldots, c_i$
2) $\underset{m}{S}(-1)^{\alpha}\Pi_\nu a_{\nu m} \cdot \underset{n}{S}(-1)^{\beta}\Pi_\varrho b_{\varrho n} = \underset{n}{S}(-1)^{\eta}\Pi_m \Sigma_i a_{im} b_{in}$

so gewinnen wir entsprechend die Multiplikationssätze von Scott, von-Escherich und Cayley.

4. Seien nun n Determinanten gegeben

$$A_i = \underset{k_i}{S}(-1)^{\eta_i}\overset{m}{\underset{1}{\Pi_j}} a^i_{jk_{ij}} \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

und sollen wir ihr Produkt bestimmen

$$A = \overset{n}{\underset{1}{\Pi_i}} A_i = \overset{n}{\underset{1}{\Pi_i}}\Big(\underset{k_j}{S}(-1)^{\eta_i}\overset{m}{\underset{1}{\Pi_j}} a^i_{jk_{ij}}\Big).$$

In A kann $\underset{k_i}{S}$ konventionnell als ein arithmetischer Faktor angesehen werden, weil die mit ihm bezeichnete Operation eindeutig bestimmt ist, wo auch das Zeichen gesetzt sein mag. Folglich ist

$$A = \overset{n}{\underset{1}{\Pi_i}} \underset{k_i}{S} . \overset{n}{\underset{1}{\Pi_i}} (-1)^{\Sigma_i \eta_i} . \overset{n}{\underset{1}{\Pi_i}} \overset{m}{\underset{1}{\Pi_j}} a^i_{jk_{ij}}.$$

In dem mittleren Faktor führen wir statt des Zeichens Π_i das Zeichen Σ_i im Exponenten ein, und im letzten — transponiren wir die Indizes i und j

$$A = \overset{n}{\underset{1}{\Pi_i}} \underset{k_i}{S} . (-1)^{\Sigma_i \eta_i} . \overset{m}{\underset{1}{\Pi_j}} \overset{n}{\underset{1}{\Pi_i}} a^i_{jk_{ij}}.$$

Nun sondern wir den Faktor, der sich zur ersten Determinante bezieht,

$$\underset{k_1}{S} (-1)^{\eta_1}$$

ab, und setzen ihn in der Mitte des Ausdrucks

$$A = \overset{n}{\underset{2}{\Pi_i}} \underset{k_i}{S} (-1)^{\overset{n}{\underset{2}{\Sigma_i}} \eta_i} . \underset{k_1}{S} (-1)^{\eta_1} . \overset{m}{\underset{1}{\Pi_j}} \overset{n}{\underset{1}{\Pi_i}} a^i_{jk_{ij}}.$$

Bemerken wir, dass es in der Determinantenentwicklung unwichtig ist, zu welcher Indexreihe (von den beiden) sich das Summenzeichen bezieht. Daher mögen wir die Indizes k_1 und j transponieren, indem wir den Faktor $(-1)^{\eta_1}$ ausstreichen gezwungen sind, um die negative Einheit, die in den übrigen Determinanten, infolge der Transposition, entstehen kann, zu vernichten, falls sie entsteht:

$$A = \overset{n}{\underset{2}{\Pi_i}} \underset{k_i}{S} (-1)^{\overset{n}{\underset{2}{\Sigma_i}} \eta_i} . \underset{j}{S} . \overset{m}{\underset{1}{\Pi_{k_i}}} \overset{n}{\underset{1}{\Pi_i}} a^i_{jk_{ij}}.$$

Das Zeichen aber $\underset{j}{S}$ können wir durch $\overset{m}{\underset{1}{\Sigma}}_{j_1 j_2 \ldots j_m}$ ersetzen, denn falls in einem Gliede zwei Indizes identisch werden, — verschwindet es infolge der vorgehenden $\underset{k_i}{S}$:

$$A = \overset{n}{\underset{2}{\Pi_i}} \underset{k_i}{S} (-1)^{\overset{n}{\underset{2}{\Sigma_i}} \eta_i} \overset{m}{\underset{1}{\Sigma}}_{j_1 j_2 \ldots j_m} \overset{m}{\underset{1}{\Pi_{k_1}}} \overset{n}{\underset{1}{\Pi_i}} a^i_{jk_{ij}}.$$

Dieser Ausdruck ist dem folgendem gleich

$$A = \overset{n}{\underset{2}{\Pi_i}} \underset{k_i}{S} (-1)^{\overset{n}{\underset{2}{\Sigma_i}} \eta_i} \overset{m}{\underset{1}{\Pi_{k_1}}} \overset{m}{\underset{1}{\Sigma_j}} \overset{n}{\underset{1}{\Pi_i}} a^i_{jk_{ij}}.$$

Wir haben also den Ausdruck der Raumdeterminante, deren allgemeiner Glied

$$\overset{m}{\underset{1}{\Sigma_j}} \overset{n}{\underset{1}{\Pi_i}} a^i_{jk_{ij}}$$

ist, gewonnen, wie er im Anfange dieses § festgestellt worden ist.

Nun aber müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

5. Die Zahl n der gegebenen Determinanten ist gerade. Das Ersetzen des Zeichens S durch eine mehrfache Summe ist möglich, weil nach der Absonderung des Faktors $\underset{k_1}{\overset{j}{S}}(-1)^{\eta_1}$ eine ungerade Zahl von $\underset{k_i}{S}$ bleibt, die, falls $(-1)^{\eta_1}=-1$, die negative Einheit wieder herstellen, und wir gewinnen den Satz:

Das Produkt einer geraden Zahl von Determinanten ist eine Raumdeterminante, deren Klasse ist der Zahl der gegebenen Faktoren, und Ordnung — ihrer allgemeiner Ordnung gleich.

6. Ist aber die Zahl der gegebenen Faktoren ungerade, so bleibt ihrer nach der Absonderung des erwähnten Faktors eine gerade Zahl; infolge dessen kann die negative Einheit, falls sie ursprünglich existiert hatte, nicht mehr hergestellt werden, — und der Satz fällt.

Ist aber gefällig auch in diesem Falle einen Satz zu formulieren, so müssen wir vermuthen, dass immer $(-1)^{\eta_1}=+1$, d. h. wir müssen die 1-te Determinante durch eine Permanente (signless determinant) ersetzen, und wir gewinnen den Satz:

a) Das Produkt einer geraden Zahl von Determinanten und einer Permanente drückt sich in derselben Weise aus, wie das Produkt einer geraden Zahl von Determinanten.

b) Das Produkt einer ungeraden Zahl von Determinanten kann nicht in einer Form von einer Raumdeterminante dargestellt werden.

7. Ist $|\alpha_{ik}|$ die Permanente der Determinante $|A_{ik}|$, so ist

$$|A_{ik}|^{2p+1}=|\alpha_{ik}|\,|A_{ik}|^{2p}.$$

Eine Raumdeterminante ungerader Klasse i hat i Werte, weil jeder seiner wirklichen oder symbolischen Faktoren kann als Permanente angesehen werden.

Eine Raumdeterminante ungerader Klasse kann isomer sein, weil die Permanente bleibt ungeändert, wenn wir zwei ihrer Zeilen transponiren.

Jede binäre Form gerader Ordnung ist als Raumdeterminante darstellbar, und ungerader Ordnung — nur mutatis mutandis.

8. Das gewonnene Element der Determinantenproduktes verallgemeinert das innere Produkt zweier Vektoren, so das wir behaupten können, dass ein Vektor R in eine beliebige Potenz Scalar gehoben werden kann

$$R^n=a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n.$$

Ist der Vektor R invariant, so ist auch seine n-te Potenz invariant. In diesem Sinne könnten wir die scalare Potenzen eines veränderlichen Vektors brauchen (*).

9. Haben wir eine rechteckige Matrize, so können wir, mittelst des oben gezeigten Algorithmus, sie in eine beliebige gerade Potenz heben, indem

(*) Im Folgenden Setzen wir immer $R^n=(R^2)^{\frac{n}{2}}$.

die letzte einer Summe von $2k$-ten Potenzen aller aus der Matrize zu bildender Determinanten gleich ist (Verallgemeinerung des Binet-Cauchyschen Satzes). Zum Beispiel, betrachten wir im Raume von $n+1$ Dimensionen n Vektoren und bilden wir aus ihnen

1) Die Matrize $\| a_1 a_2, \ldots, a_n \|$.

2) Das vektorielle Produkt

$$[a_1 a_2, \ldots, a_n]$$

so haben wir

$$\| a_1 a_2, \ldots, a_n \|^{2k} = [a_1 a_2, \ldots, a_n]^{2k}.$$

Wenn wir uns auf den dreidimensionalen Raum beschränken, so gewinnen wir:

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{matrix} \right\|^{2k} = (ab)^{2k} + (ac)^{2k} + (bc)^{2k}.$$

Setzen wir hier $k=1$, so gewinnen wir die bekannte Eulersche Identität.

10. Nachdem wir das Raumprodukt von Determinanten untergesucht haben, wenden wir uns zur zweiten Form solcher Produkte — zum Pascalschen Determinantenprodukt.

Betrachten wir den Ausdruck

$$A = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^k.$$

Es ist zu beweisen, das die Zahl seiner Glieder N_n^{k+1} ist, wo N_a^b das b-te Element der a-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks ist, indem wir uns der vollständigen mathematischen Induktion bedienen.

In allen Gliedern der Entwicklung des A, die den Faktor a_i^m enthalten, sondern wir den a_i^m aus den Klammern ab, um mit einer Form X_{n-1}^{k-m} zu tun haben, deren Gliederzahl, der Vermuthung nach, N_{n-1}^{k-m+1} sei.

Folglich ist

$$N_n^k = \sum_{1}^{k}{}_m N_{n-1}^{k-m+1}$$

die Zahl der Glieder, die eine beliebige Potenz des a_i als Faktor enthalten.

Untersuchen wir nun die Glieder, die den Faktor a_i gar nicht enthalten, unters. Sie bilden eine Form X_{n-1}^k, deren Gliederzahl, der Vermuthung nach, N_{n-1}^{k+1} sei. Folglich ist die Gliederzahl von

$$A = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^k$$

der gesuchten Zahl gleich:

$$N_{n-1}^{k+1} + N_n^k = N_n^{k+1}.$$

11. Die Eigenschaft der Elemente des Pascalschen Dreiecks

$$N_{n+1}^k = \sum_{1}^{k}{}_i N_n^i$$

kann in solch einer Form dargestellt werden

$$N^k_{n+1} = \sum_i^k N^{k-i+1}_1 N^i_n,$$

dass sie folgendermassen verallgemeinert werden kann

$$N^k_{n+m} = \sum_i^k N^{k-i+1}_m N^i_n.$$

Um die Richtigkeit dieser Formel zu beweisen, zeigen wir, dass

$$N^k_{n+m+1} = \sum_i^k N^{k-i+1}_{m+1} N^i_n.$$

In der Wirklichkeit,

$$\sum_i^k N^{k-i+1}_{m+1} N^i_n = \sum_i^k \sum_{k_1}^k N^{k_1-i+1}_m N^i_n = \sum_{ik_1}^k N^{k_1-i+1}_m N^i_n =$$

$$= \sum_{k_1}^k N^{k_1}_{m+n} = N^k_{m+n+1}.$$

Daher können wir schreiben

$$\sum_i^n N^i_2 N^{k-i+1}_{n-1} = N^k_{n+1}.$$

12. Betrachten wir die Glieder, die den Faktor a_i^m enthalten; da ihre Zahl N^{k-m+1}_{n-1} ist, so enthält ihr Produkt den Faktor a_i in der Potenz

$$mN^{k-m+1}_{n-1} = N^m_2 N^{k-m+1}_{n-1}.$$

Folglich, ist der Exponent des a_i im Produkte aller Glieder von A

$$N^k_{n+1} = \sum_m^k N^m_2 N^{k-m+1}_{n-1}$$

und dieses Produkt selbst wird dem Ausdrucke gleich

$$P = (a_1 a_2, \ldots, a_n)^{N^k_{n+1}}.$$

13. Nun sollen die a_i Vektoren im Raume von n Dimensionen sein. Dann ist

$$[a_1 a_2, \ldots, a_n]^{N^k_{n+1}}$$

gleich dem Produkte der Glieder des Ausdrucks

$$A=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^k.$$

Da jedes Glied des entwickelten A eine Form E_n^k der extensiven Einheiten ist, deren Gliederzahl der Zahl der Formen E_n^k selbst gleich ist, so bilden die letzte eine, mit dem Faktor

$$[e_1e_2,\ldots,e_n]^{N_{n+1}^k}=1$$

multiplizierte Determinante.

Damit ist der Satz gewonnen: Die Pascalsche Determinantenpotenz

$$[a_1a_2,\ldots,a_n]^{N_{n+1}^k}$$

ist eine Determinante, deren Vektoren den Gliedern des Ausdrucks

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^k$$

gleich sind.

14. Wenn wir

$$a_i=\frac{\partial u_i}{\partial x_1}e_1+\frac{\partial u_i}{\partial x_2}e_2+\cdots+\frac{\partial u_i}{\partial x_n}e_n$$

setzen, so wird

$$\frac{\partial(u)}{\partial(x)}=[a_1a_2,\ldots,a_n].$$

Um die Pascalsche Potenz des Jacobians darzustellen, bezeichnen wir folgendermassen eine Form

$$X_n^k=\sum_1^{N_n^{k+1}}{}_i\, a_{ki}\,a_{ki}\,(x)_{ki},$$

wo

$$a_{ki}\,(x)_{ki}=a_{i_1i_2,\ldots,i_k}\,x_{i_1}^{a_1}x_{i_2}^{a_2},\ldots,x_{i_k}^{a_k}$$

und a_{ki} der entsprechende Newtonsche Koeffizient ist.

Dann haben wir

$$\left(\frac{\partial(u)}{\partial(x)}\right)^{N_{n+1}^k}=[a_1+a_2+\cdots+a_n]^{N_{n+1}^k}=$$

$$=|A_{ij}|=\underset{j}{S}\left|\frac{(\partial u)_{ki}}{(\partial x)_{kj}}\right|(i,j=1,2,3.\ldots.N_n^{k+1})$$

$\underset{j}{S}$ bezeichnet alle Permutationen der Gruppe (j) von Variabeln.

§ 3. Vektor und Form

1. Der Satz von dem Pascalschen Determinantenprodukt hat, unter anderen, die folgende principielle Bedeutung.

Da wir infolge dieses Satzes jede Form symbolisch linear darzustellen gezwungen sind, so gewinnen wir die Möglichkeit konventionnell die Begriffe der Form und des Vektors zu identifizieren.

Bei diesen Bedingungen können wir die Vektoren in derselben Weise klassifizieren, wie die Formen.

Wir unterscheiden drei Klassen von Vektoren (*):

2. Der allgemeine Vektor soll derjenige heissen, der in der Gestalt einer Form sich mit X_n^k bezeichnet.

Der Golownoj (**) Vektor oder Hauptwektor soll derjenige heissen, der in der Gestalt einer Form sich mit X_n^n bezeichnet.

Die Hauptvektoren trennen sich auf gerade und ungerade nach dem Index n in X_n^n.

Der binäre Vektor soll der Form X_2^k identisch sein.

Zum Beispiel:

$$\sum_{1}^{N_n^{k+1}} a_i e_i = \sum_{1}^{N_n^{k+1}} a_{ki} \alpha_{ki}(x)_{ki}\,,$$

wo

$$a_i = a_{ki}$$
$$e_i = \alpha_{ki}(x)_{ki}.$$

Homogene Vektoren sollen diejenige heissen, die sich in Formgestalt mit einem und demselben Symbol darstellen.

Multiplizierl werden können nur homogene Vektoren, und das Produkt soll den Faktoren homogen sein.

3. Das innere Produkt einer beliebigen Zahl von Vektoren ist im Sinne des § 2 verstanden, ebenso die Potenz eines Vektors.

Das kombinatorische Produkt soll im Grassmannschen Sinne verstanden sein.

Es ist zu erwähnen, dass die Hauptvektoren noch zwei Arten von Produkte haben: die letzte und vorletzte Schiebungen, die wir so bezeichnen werden:

$$Sch_n(a_1 a_2 \ldots a_n) \text{ und } Sch_{n-1}(a_1 a_2 \ldots a_n).$$

Der Hauptvektor X_n^n hat, ausser den Potenzen $(X_n^n)^k$, die Schiebung $Sch_n(X_n^n)$; da die letzte, wenn n ungerade ist, identisch verschwindet, so verstehen wir unter $Sch_n(X_n^n)$, bei ungeradem n die Aronholdsche Invariante S, die für beliebigen n verallgemeinert werden kann.

Der binäre Vektor besitzt die folgende Schiebungsprodukte:

1) $Sch_k(X_2^k)$ und

2) $Sch_{\frac{k}{2}}(X_2^k)$ bei geradem k.

(*) Im Folgenden werden wir zwischen Form und Vektor gar nicht unterscheiden.

(**) Golownoj ist die russische Bezeichnung des Hauptvektors.

4. Befrachten wir $N_n^{n+1}-1$ Hauptvektoren und bilden wir aus ihnen die Matrize

$$\| a_1 a_2 \dots a_i \dots \|$$

und das kombinatorische Produkt

$$[a_1 a_2 \dots a_i \dots].$$

Heben wir die beiden Ausdrücke in die n-te Potenz, so erhalten wir

$$\| a_1 a_2 \dots a_i \dots \|^n = [a_1 a_2 \dots a_i \dots]^n.$$

Ist die Potenz im Sinne des § 2 verstanden, so erhalten wir die Verallgemeinerung der Trigonometrie des Riemannschen (sphärischen) Raumes; verstehen wir das Potenzieren im Sinne der Schiebung, so haben wir die Verallgemeinerung der Trigonometrie des Lobatschewskischen Raumes nach Poincaré.

5. Jede Form X_n^k ist als eine k-te Potenz eines linearen Ausdruckes mit vektoriellen Koeffizienten X_k^k darstellbar, wenn $n < k$.

Ist $n > k$, so sind die Koeffizienten Vektoren vom Typus X_n^k.

§ 4. Veränderliche Vektoren.

1. Wir betrachten den Vektor $X_n^k \equiv U$, dessen Koeffizienten von $n-1$ Veränderlichen $x_1 x_2 \dots x_{n-1}$ abhängen.

Die Formel

$$N_n^{k+1} = \sum_1^{k+1} {}_i N_{n-1}^i \dots \tag{1}$$

lehrt uns, dass die Mannigfaltigkeit aller Derivierten von der 1-ten bis der k-ten Ordnung (eingeschlossen) ein kombinatorisches Produkt bilden:

$$\left[\prod_1^k {}_m \prod_1^{N_{n-1}^{m+1}} {}_i \; U_{mi} \right],$$

wo U_{mi} ist die i-te Derivierte m-ter Ordnuug des Vektors U:

$$U_{mi} = \frac{\partial^m U}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}$$

(siehe § 2 am Ende).

Dieser Vektor soll mit $[U]$ bezeichnet werden und Normale heissen; die Derivierten, die die Normale $[U]$ bilden, Tangenten heissen.

2. Die Formel (1) lehrt uns auch, dass irgend eine beliebige Derivirte U_{pq}, die nicht eine Tangente ist, ist nach den Tangenten und der Normale zerlegbar:

$$U_{pq} = U_0^{pq} [U] + \sum_1^k {}_m \sum^{N_{n-1}^{m+1}} {}_i \; U_{mi}^{pq} U_{mi}.$$

Die Bedeutung der Koeffizienten werden wir in § 5 können lernen.

3. Der Vektor U, der von den x_i abhängt, soll mit V bezeichnet werden, wenn er unmittelbar von den neuen Veränderlichen y_i abhängen wird. Die Transformationsfunktionen φ_i

$$x_i = \varphi_i(y)$$

sollen ganz beliebig sein und Derivierten beliebiger Ordnungen besitzen.

Es ist leicht zu zeigen, das

$$U_{pq} = \sum_{p}^{1}{}_{m} \sum_{1}^{N_{n-1}^{m+1}}{}_{i} V_{mi} \left(\frac{(\partial y)_i}{(\partial x)_q} \right)^{(p-m+1)},$$

wo der eingeklammerte Faktor eine Funktion der Derivirten von y_i nach x_i, deren Ordnung höchtens $p-m+1$ gleich ist.

Es ist zu bemerken, dass das 1-te Glied dieser Entwicklung

$$\sum_{1}^{N_{n-1}^{p+1}}{}_{r} V_{pr} \frac{(\partial y)_{pr}}{(\partial x)_{pq}}$$

von den höheren Derivierten von y gar nicht abhängt.

4. Konstruiren wir jetzt die Determinantenmatrize die wir Transformationsquadrat nennen.

Von einem Punkte O in der Ebene führen wir zwei Perpendikuläre (zueinander) OA horizontal rechts und OB vertical herab. Auf der Horizontale OA messen wir k Strecken, indem die Länge der i-ten soll N_{n-1}^{i+1} sein; dasselbe messen wir; von demselben Punkt O ausgehend, auf der Verticale OB. Wir ergänzen die Figur zum Quadrat, und durch die Streckenenden führen wir entsprechend Horizontalen und Verticalen. Dann ist der Quadrat in Rechtecke getheilt, deren Seiten entsprechend $N_{n-1}^{r+1} \cdot N_{n-1}^{s+1}$ gleich sind. Nur längs der Hauptdiagonale erscheinen, statt der Rechtecke, — Quadrate, weil da $r=s$.

Diese Figur muss man sich vorstellen oder zeichnen, um den Beweis des folgenden Satzes zu verstehen.

Theorem 5. Die Normale bleibt invariant, bei der Transformation des Vektors U, welche auch die Transformationsfunktionen φ_i sein mögen (*).

Zuerst beweise ich den Satz für lineare φ_i und zuletzt für beliebige φ_i.

Sind die Transformationsfunktionen linear, so reduzieren sich die transformierten Derivierten auf die 1-te Gliederreihen, und die transformierte Normale wird:

$$\left[\prod_{1}^{k}{}_{m} \prod_{1}^{N_{n-1}^{m+1}}{}_{i} \sum_{1}^{N_{n-1}^{m+1}}{}_{j} V_{mj} \frac{(\partial y)_{mj}}{(\partial x)_{mi}} \right].$$

(*) In diesem Satze geht die Rede von den Veränderlichen, von denen Formkoeffizienten abhängen.

Um sie aus der ursprünglichen zu erhalten

$$[\Pi_m \Pi_i V_{mi}],$$

bilden wir k Determinanten, alle der Ordnung der Transformationsmatrize, D_m $(m=1, 2, 3 \ldots k)$ die so aus der letzten beschaffen sind:

1) der m-te Diagonalquadrat ist mit

$$\left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^{N_n^m}$$

die nach § 2 entwickelt ist, identisch;

2) der übrige Raum der Hauptdiagonale ist mit Einheiten erfüllt;

3) Der übrige Raum der Determinante ist mit O erfüllt.

Wenn wir die ursprüngliche Normale mit D_m multiplizieren, so bleiben alle ihre Vektoren unverändert, ausser der Vektoren V_{mi}, die in diejenige der transformierten Normale übergehen.

Folglich, ist

$$[U]=[V] \overset{k}{\underset{1}{\Pi}}{}_m D_m.$$

Da

$$D_m = \left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^{N_n^m}$$

so bekommen wir

$$[U]=[V] \overset{k}{\underset{1}{\Pi}}{}_m \left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^{N_n^m} = [V] \left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^{\overset{k}{\underset{1}{\Sigma}}{}_m N_n^m} = (V) \left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^{N_{n+1}^k}.$$

6. Sollen jetzt die Transformationsfunktionen φ_ι beliebig sein, so dass wir für die transformierte Normale die Gleichung

$$[U] = \left[\overset{k}{\underset{1}{\Pi}}{}_m \overset{N_n^{m+1}}{\underset{1}{\Pi}}{}_i \ \underset{m}{\overset{1}{\Sigma}}{}_2 \overset{N_n^{r+1}-1}{\underset{1}{\Sigma}}{}_s \ V_{rs} \left(\frac{(\partial y)_s}{(\partial x)_i}\right)^{(m-r+1)} \right]$$

haben. Um die $[U[$ aus der ursprünglichen $[V]$ abzuleiten, konstruieren wir aus der Transformationsmatrize k Determinanten D'_m $(m=1, 2 \ldots k)$, die so beschaffen sind:

1) der m-te Diagonalquadrat ist mit

$$\left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^{N_n^m}$$

identisch;

2) der übrige Raum der Hauptdiagonale ist mit Einheiten erfüllt;

3) die Rechtecke, die links von und auf derselben Höhe als der m-te Diagonalquadrat liegen, sind entsprechend mit den Funktionen

$$\left(\frac{(\partial y)_s}{(\partial x)_i}\right)^{(m-r+1)}$$

erfüllt;

4) der übrige Raum ist mit 0 erfüllt.

Wenn wir die ursprüngliche $[V]$ mit D'_m multiplizieren, so bleiben alle ihre Vektoren unverändert, ausser der Gruppe V_{mi}, die in diejenigen der transformierten Normale übergehen. Aber man muss die Multiplikation in der vorgeschriebenen Folge

$$[V]D'_k D'_{k-1} D'_{k-2}, \ldots, D'_2 D'_1$$

ausführen, um die transformierte Normale nicht ihre Gestalt verliere.

Es ist leicht sich überzuzeugen, dass $D'_m = D_m$.

Daher ist

$$[U] = [V]\left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^{N^k_{n+1}}$$

was zu beweisen ist.

Nach § 2, ist auch $[U]^m$ eine Invariante, als $[u]^{2 \cdot \frac{m}{2}}$.

7. Ausser der Normale, hat der Veränderliche Vektor $U \equiv X^k_n$ noch eine Invariante — die Krümmung $K^m_{n-1}(U)$, die wir folgendermassen konstruieren.

Die Form

$$D^m U = \frac{d^m U[U]}{[U]^2}$$

hat als Koeffizienten die Normalkomponenten $U^{m\mu}_0$; die m-te Schiebung von $D^m U$ soll Krümmung heissen und mit

$$K^m_{n-1}(D^m U)$$

bezeichnet werden (m sei gerade).

8. Wenn wir uns der Transformationsformel erinnern

$$U_{pq} = \sum_p^1 {}_m \sum_1^{N^{m+1}_{n-1}} {}_i \; V_{mi}\left(\frac{(\partial y)_i}{(\partial x)_q}\right)^{(p-m+1)}$$

so ist leicht zu schliessen, dass, bei der Transformation der Normalkomponenten U^{pq}_0, nur drei Fälle giebt, wenn die höheren Derivirten von y nach x verschwinden:

1) wenn $p = 1$,

2) wenn die φ_i linear sind,

3) wenn $p = k + 1$.

Die dritte Behauptung ist darauf gegründet, dass, wenn $p = k+1$, die Normale nur in der 1-ten Gliederreihe vorkommt; daher

$$U^{pq}_0[U] = \sum_1^{N^{p+1}_{n-1}} {}_{q'} \; V^{pq'}_0 \frac{(\partial y)_{pq'}}{(\partial x)_{pq}}[V],$$

wenn eine der drei Bedingungen erfüllt ist.

Nach dem oben bewiesenen Satze haben wir:

$$\left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^{N^k_{n+1}} \underset{0}{U^{pq}} = \sum_{1}^{N^{p+1}_{n-1}} {}_{q'} \underset{0}{V^{pq'}} \frac{(\partial y)_{pq'}}{(\partial x)_{pq}}.$$

Wenn wir uns jetzt zur Krümmung $K^p_{n-1}(D^pU)$ wenden, so haben wir nach von-Escherich's Satze:

$$\left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^{N^k_{n+1}{}^{(n-1)}} K^p_{n-1}(D^pU) = K^p_{n-1}(D^pV)\left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^p.$$

Bei allgemeinem p ist die Krümmung invariant nur in der projektiven Gruppe.

Ist $p=k+1$, so gilt die Invarianz in der allgemeinen Transformationsgruppe.

9. Die Invarianzbeziehung können wir so schreiben

$$K^p_{n-1}(D^pU) = K^p_{n-1}(D^pV)\left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^{p-N^k_{n+1}{}^{(n-1)}}$$

welche Gleichung, verknüpft mit der Gleichung der Normale, die absolute Invariante liefert

$$\frac{\{K^p_{n-1}(D^pU)\}^{N^k_{n+1}}}{[U]^{p-N^k_{n+1}{}^{(n-1)}}}$$

welche besonders wichtig ist, wenn $p=k+1$.

10. Wenden wir uns zum Hauptvektor, so bleiben für ihn alle Invarianten gültig, die für den allgemeinen Vektor bewiesen sind.

Ausserdem hat der Hauptvektor X^n_n nach eine zweite Reihe von Invarianten, wenn wir die veränderlichen Koeffizienten Funktionen von n Variabeln uns denken (und nicht von $n-1$, wie im untersuchten Falle des allgemeinen Vektors X^k_n).

Der Grund dieses Umstandes ist die Identität

$$N^n_{n+1} = \sum_{1}^{n} {}_i N^i_n = N^{n+1}_n$$

die lehrt, dass in diesem Falle tangentiell alle Derivirten von der 1 bis der $n-1$-er Ordnung sind, und die Normale

$$[U] = \left[\prod_{1}^{n-1}{}_r \prod_{1}^{N^n_n}{}_s U_{rs}\right]$$

ist.

Da der Beweis derselbe ist, führe ich nur die Resultaten an.

$$1)\quad [U]=[V]\left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^{N_{n+2}^{n-1}},$$

$$2)\quad K_n^p(D^pU)\left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^{nN_{n+2}^{n-1}}=K_n^p(D^pV)\left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^p,$$

$$3)\quad \frac{\{K_n^p(D^pU)\}^{N_{n+2}^{n-1}}}{[U]^{p-nN_{n+2}^{n-1}}}.$$

NB den Fall, wenn $p=n$! Die Invarianz ist dann gültig für beliebige Transformationsfunktionen φ_i.

11. Der Hauptvektor X_n^n hat noch zwei Besonderheiten.

a) Die absolute Invariante, wenn $p=n$, kann von der Begrenzung befreit werden, dass n gerade sein muss: im Falle eines ungeraden n soll man den Ausdruck bilden

$$K_n^{n+1}(D^nU),$$

der die verallgemeinerte Aronholdsche Invariante S bezeichnen soll. Die grosse prinzipielle Bedeutung dieser Eigenschaft des Hauptvektors wird im folgenden § beleuchtet.

b) Statt der Normale, können wir uns der vorletzten Schiebung der n 1-ten Derivirten

$$Sch_{n-1}(U_1'U_2',\ldots,U_n')$$

benutzen, um mit ihr die absolute Invariante zu bilden, aber es ist ganz schwer sie geometrisch zu intetpretieren.

12. Auch die binäre Form hat noch zwei Reihen Invarianten, wenn wir ihre Koeffizienten Funktionen nicht von einer, wie es die Theorie des allgemeinen Vektors fordert, sondern von zwei Veränderlichen abhängen. Der Grund besteht in der Identität:

$$N_2^{n+1}=1+N_2^n.$$

a) Die 1-te Reihe der binären Form X_2^n benutzt als Tangenten die n-ten Derivierten und als Normale — den Vektor

$$[U]=\left[\prod_1^n{}_m U_{nm}\right]$$

der immer nur in der projektiven Gruppe invariant bleibt, mir Ausnahme des Falles $n=2$, der sich zum Hauptvektor bezieht.

b) Die zweite Reihe benutzt als Normale die $\frac{n}{2}$-te Schiebung der 1-ten Derivierten

$$Sch_{\frac{n}{2}}(U_1'U_2')$$

die eine absolute Invariante in der allgemeinen Transformationsgruppe liefert, aber ihre geometrische Interpretation ist schwierig.

13. Wenn wir den allgemeinen Vektor $U \equiv X_2^k$ betrachten, als von einer Veränderlichen abhängend, so ist seine Normale

$$[u] = [U' U'' U''', \ldots, U^{(k)}].$$

Ihre Invarianz kann man sehr einfach konstatieren, womit wir die allgemeine Theorie, die keine, so zu sagen, „sinnliche" Verifikation zulässt, stützen.

Der Leser mag den Fall selbständig behandeln.

§ 5. Die Rauminvariante

Am Ende meiner Arbeit gehe ich zur geometrischen Interpretation der absoluten Invariante des Vektors mit veränderlichen Koeffizienten. Ich werde mich auf den Hauptvektor X_n^n gründen, doch sind alle Resultate auf den allgemeinen Vektor übertragbar.

1. Die Riemannsche Massbestimmung

$$ds^2 = (dR)^2$$

genügt um zu beweisen, dass die Fläche an sich eine Invariante besitzt: das ist die Gausssche Krümmung. Wenn wir aber zum Raume von n Dimensionen übergehen, ist diese Massbestimmung nicht genügend — es müssen, ausser der 1-ter Differentiale, auch die höheren eingeführt werden, nämlich —

$$\Phi = \left(\sum_{1}^{n-1}{}_i \, d^i U \right)^2.$$

Diese Form ist heterogen, aber wir können ihr eine Gestalt einer quadratischen homogenen Form geben, wenn wir die Bezeichnung der Pascalschen Potenz des Jakobians einführen:

$$\Phi = \sum_{1}^{n-1}{}_{ii'} \sum_{1}^{N_n^n}{}_{mm'} (U_{im} U_{i'm'}) \, (dx)_{im} \, (dx)_{i'm'}.$$

Die Determinante dieser Form ist invariant, weil sie nichts anders ist, als $[U]^2$ der Quadrat der Normale.

2. Die absolute Invariante

$$\frac{\left\{ K_n^n (D^n U) \right\}^{N_{n+2}^{n-1}}}{[U]^{n - n N_{n+2}^{n-1}}}$$

ist als Funktion der Koeffizienten der Form Φ ausdrückbar.

Da für den Nenner der Satz schon bewiesen ist, so bleibt es nur für den Zähler zu beweisen. Es ist noch zu bemerken, dass wenn n ungerade ist, nimmt die Invariante die Gestalt an

$$\frac{\left\{K_n^{n+1}(D^n U)\right\}^{N_{n+2}^{n-1}}}{[U]^{(n+1)\left(1-N_{n+2}^{n-1}\right)}}$$

wo K_n^{n+1} die verallgemeinerte Aronhold'sche Invariante S bedeutet.

3. Irgend eine n-te Derivirte des Vektors U (die m-te in der Reihenfolge) U_{nm} ist in der folgender Form darstellbar

$$U_{nm} = U_0^{nm}[U] + \sum_{1}^{n-2}{}_i \sum_{1}^{N_n^{i+1}}{}_k U_{ik}^{nm} U_{ik} + \sum_{1}^{N_n^n}{}_\varrho U_\varrho^{nm} U_\varrho.$$

Hier ist U_ϱ die Tangente der höchsten Ordnung, d. h. der $n-1$-ter.

Die Koeffizienten der Zerlegung sind die Verallgemeinerungen der Christoffelschen Symbole 2-ter Gattung, und sind durch die verallgemeinerte Christoffelschen Symbole 1-ter Gattung ausdrückbar, was aus den Gleichungen folgt

$$\left(\frac{2}{nm} \cdot U_{rs}\right) = \sum_{1}^{n-2}{}_i \sum_{1}^{N_n^{i+1}}{}_k U_{ik}^{nm} (U_{ik} \cdot U_{rs}) + \sum_{1}^{N_n^n}{}_\varrho U_\varrho^{nm} (U_\varrho U_{rs}).$$

4. Die Christoffelschen verallgemeinerten Symbole 2-ter Gattung haben die folgende Bedeutung

$$U_0^{nm} = \frac{U_{nm}[U]}{[U]^2},$$

$$U_{ik}^{nm} = \frac{U_{nm}[U_{ik}]}{U_{ik}[U_{ik}]} = \frac{[U_{ik}^{nm}]\,[U]}{[U]^2},$$

$$U_\varrho^{nm} = \frac{[U_\varrho^{nm}]\,[U]}{[U]^2}.$$

Hier bedeutet $[U_{ik}]$ die Normale, in der der Vektor U_{ik} durch der Normale selbst ersetzt ist; der Vektor $[U_{ik}^{nm}]$ bedeutet die Normale, in der der Vektor U_{ik} durch den Vektor U_{nm} ersetzt ist.

5. Die Komponente des Vektors $[U_{ik}]$ nach dem Vektor U_{rs} hat den Wert

$$\frac{[U_{ik}]\,[U_{rs}]}{U_{rs}\,[U_{rs}]} = -\frac{[U_{ik}]\,[U_{rs}]}{[U]^2},$$

der das Element der zum quadrat der Normale $[U]^2$ reziproken Determinante ist.

Es ist selbstverständlich, dass $[U_{ik}]$ nach der Normale $[U]$ keine Komponente hat.

6. Zerlegen wir jetzt den Vektor

$$[U_{ik}^{nm}] = M_0^{ik}[U] + \sum_{1}^{n-2}{}_r \sum_{1}^{N_n^{r+1}}{}_s M_{rs}^{ik} U_{rs} + \sum_{1}^{N_n^n}{}_\varrho M_\varrho^{ik} U_\varrho.$$

Die Koeffizienten M haben den Wert:

$$M_0^{ik} = \frac{[U_{ik}^{nm}][U]}{[U]^2} = U_{ik}^{nm},$$

$$M_{rs}^{ik} = \frac{[U_{ik}^{nm}][U_{rs}]}{U_{rs}[U_{rs}]}.$$

Der Zähler verschwindet für alle Komponenten des Vektors $[U_{rs}]$, ausser für die Komponente mach U_{ik}; daher können wir schreiben:

$$M_{rs}^{ik} = -\frac{[U_{ik}^{nm}]U_{ik}}{U_{rs}[U_{rs}]} \frac{[U_{ik}][U_{rs}]}{[U]^2} = -\frac{U_{nm}[U]}{[U]^2} \frac{[U_{ik}][U_{rs}]}{[U]^2} =$$

$$= -U_0^{nm} \frac{[U_{ik}][U_{rs}]}{[U]^2}.$$

Also ist:

$$[U_{ik}^{nm}] = U_{ik}^{nm}[U] - U_0^{nm} \sum_1^{n-2}{}_r \sum_1^{N_n^{r+1}}{}_s \frac{[U_{ik}][U_{rs}]}{[U]^2} U_{rs} - U_0^{nm} \sum_1^{N_n^n}{}_\varrho \frac{[U_{ik}][U_\varrho]}{[U]^2} U_\varrho.$$

Im speziellen Falle haben wir

$$[U_\varrho^{nm}] = U_\varrho^{nm}[U] - \sum_1^{n-2}{}_r \sum_1^{N_n^{r+1}}{}_s U_0^{nm} \frac{[U_\varrho][U_{rs}]}{[U]^2} U_{rs} - \sum_1^{N_n^n}{}_{\varrho'} U_0^{nm} \frac{[U_\varrho][U_{\varrho'}]}{[U]^2} U_{\varrho'}.$$

Im Folgenden werden wir den Ausdruck

$$\frac{[U_\varrho][U_{\varrho'}]}{[U]^2}$$

einfacher so bezeichnen: $(\varrho\varrho')$.

7. Die Derivierte der Normale

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}[U] \equiv \frac{\partial}{\partial x_\varphi}[U] = \sum_1^{N_n^n}{}_\varrho [U_\varrho^{\varrho\varphi}](*)$$

reduziert sich auf die angewiesene Summe, weil die vorangehenden Summanden verschwinden. Daher haben wir die folgende Zerlegung:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}[U] = \sum_1^{N_n^n}{}_\varrho [U_\varrho^{\varrho\varphi}] = \sum_1^{N_n^n}{}_\varrho U_\varrho^{\varrho\varphi}[U] - \sum_\varrho \sum_r \sum_s U_0^{\varrho\varphi} \frac{[U_\varrho][U_{rs}]}{[U]^2} U_{rs} -$$

$$- \sum_1^{N_n^n}{}_{\varrho\varrho'} U_0^{\varrho\varphi} \frac{[U_\varrho][U_{\varrho'}]}{[U]^2} U_{\varrho'}.$$

(*) $U_{\varrho\varphi}$ heisst die n-te Derivirte, indem wir zu der Gruppe von $n-1$ Veränderlichen (ϱ) die n te x_φ zufügen.

Es ist zu bemerken die Identität

$$\sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho}\, U_{\varrho}^{\varrho\varphi} = \frac{\partial \lg}{\partial \varphi} \sqrt{[U]^2}.$$

8. Jetzt sind wir im Stande die $(n+1)$-te Derivierte des Vektors U darzustellen; zum Beispiel, $\frac{\partial}{\partial\varphi} U_{nm}$.

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} U_{nm} = \frac{\partial}{\partial\varphi} U_0^{nm} [U] + U_0^{nm} \frac{\partial}{\partial\varphi} [U] +$$

$$+ \sum_{1}^{n-2}{}_{i} \sum_{1}^{N_n^{i+1}}{}_{k} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} U_{ik}^{nm} U_{ik} + U_{ik}^{nm} \frac{\partial}{\partial\varphi} U_{ik} \right) +$$

$$+ \sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} U_{\varrho}^{nm} U_{\varrho} + U_{\varrho}^{nm} \frac{\partial}{\partial\varphi} U_{\varrho} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\varphi} U_0^{nm} [U] + \sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho} U_{\varrho}^{\varrho\varphi} U_0^{nm} [U] -$$

$$- \sum_{\varrho} \sum_{i} \sum_{k} U_0^{nm} U_0^{\varrho\varphi} \frac{[U_{\varrho}]\,[U_{ik}]}{[U]^2} U_{ik} - \sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho\varrho'} U_0^{nm} U_0^{\varrho\varphi} (\varrho\varrho') U_{\varrho'} +$$

$$+ \sum_{1}^{n-2}{}_{i} \sum_{1}^{N_n^{i+1}}{}_{k} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} U_{ik}^{nm} U_{ik} + U_{ik}^{nm} \frac{\partial}{\partial\varphi} U_{ik} \right) + \sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho} \frac{\partial}{\partial\varphi} U_{\varrho}^{nm} U_{\varrho} +$$

$$+ \sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho} U_{\varrho}^{nm} U_0^{\varrho\varphi} [U] + \sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho\varrho'} U_{\varrho}^{nm} U_{\varrho'}^{\varrho\varphi} U_{\varrho'} + \sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho} \sum_{1}^{n-2}{}_{i} \sum_{1}^{N_n^{i+1}}{}_{k} U_{\varrho}^{nm} U_{ik}^{\varrho\varrho} U_{ik} =$$

$$= [U] \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} U_0^{nm} + \sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho} U_{\varrho}^{\varrho\varphi} U_0^{nm} + \sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho} U_{\varrho}^{nm} U_0^{\varrho\varphi} \right) +$$

$$+ \sum_{1}^{n-2}{}_{i} \sum_{1}^{N_n^{i+1}}{}_{k} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} U_{ik}^{nm} U_{ik} + U_{ik}^{nm} \frac{\partial}{\partial\varphi} U_{ik} + \sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho} U_{\varrho}^{nm} U_{ik}^{\varrho\varphi} U_{ik} - \right.$$

$$\left. - \sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho} U_0^{nm} U_0^{\varrho\varphi} \frac{[U_{\varrho}]\,[U_{ik}]}{[U]^2} U_{ik} \right) +$$

$$+ \sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho} U_{\varrho} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} U_{\varrho}^{nm} + \sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho'} U_{\varrho'}^{nm} U_{\varrho}^{\varrho'\varphi} - \sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho'} U_0^{nm} U_0^{\varrho'\varphi} (\varrho\varrho') \right).$$

Stellen wir die $n+1$ Veränderlichen $(m)\varphi$ in irgend einer andern Permutation $(m')\varphi' = (m)\varphi$ vor, so bekommen wir, den ersten und den dritten Zerlegungsglied betrachtend:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} U_0^{nm} - \frac{\partial}{\partial \varphi'} U_0^{nm'} + \sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho} (U_\varrho^{\varrho\varphi} U_0^{nm} - U_\varrho^{\varrho\varphi'} U_0^{nm'}) +$$

$$+ \sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho} U_0^{\varrho\varphi} U_\varrho^{nm} - U_0^{\varrho\varphi'} U_\varrho^{nm'}) = 0.$$

Das ist die verallgemeinerte Codazzische Formel, indem wir den mittleren Glied identisch verschwinden lassen können.

9. Der dritte Zerlegungsglied liefert die Formel:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} U_\varrho^{nm} - \frac{\partial}{\partial \varphi'} U_\varrho^{nm'} + \sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho'} (U_{\varrho'}^{nm} U_\varrho^{\varrho'\varphi} - U_{\varrho'}^{nm'} U_\varrho^{\varrho'\varphi'}) =$$

$$= \sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho'} (U_0^{nm} U_0^{\varrho'\varphi} - U_0^{nm'} U_0^{\varrho'\varphi'}) \, (\varrho\varrho').$$

In der rechten Seite der Gleichung haben wir den verallgemeinerten Riemann'schen Symbol zweiter Gattung, der sich durch die verallgemeinerte dreigliedrige Symbole Christoffels ausdrücken läßt.

10. Die absolute Invariante

$$\frac{\{K_n^n(D^n U)\}^{N_{n+2}^{n-1}}}{[U]^{n\left(1 - N_{n+2}^{n-1}\right)}}$$

als eine Determinante n-ter Klasse n-ter Ordnung, bei geradem n, läßt sich als eine Funktion solcher verallgemeinerten Riemannschen Symbole darstellen, was aus den Bildungs nnd Zerlegungs Gesetze folgt.

СОДЕРЖАНИЕ

У.С.Р.Р.
Державне видавництво

Стр.
I
I
Ш
2
I24
I26