Ц. РУССЬЯН

Метод интегрирования дифференциального уравнения Pfaff'a.

Хотя вопрос об интегрировании дифференциального уравнения Pfaff'a:

$$\omega = \sum_{1}^{p} {}^{k} X_k \, dx_k = 0,$$

где X_k $k = 1 \ldots p$ — данные функции переменных $x_1 \ldots x_p$, не нов, однако до сих пор нет наиболее простого метода его решения. Метод, развитый трудами преимущественно немецких математиков (*), основывается на рассмотрении так называемой канонической формы дифференциального выражения ω и зависит поэтому от ее четности. E. Cartan (****) дал помощью результатов из теории символических дифференциальных выражений метод приведения дифференциального выражения ω к виду, заключающему, вообще, наименьшее число дифференциалов:

$$\omega = \sum_{1}^{n} {}^{i} U_i \, du_i. \tag{a}$$

Отсюда вытекает метод интегрирования дифференциального уравнения $\omega = 0$, не зависящий от четности класса дифференциального выражения ω. E. Goursat (**) дал подобный же метод, но в его изложении эта мысль проводится в тесной связи с рассмотрением канонической формы, а самый метод интегрирования требует, кроме интеграций, еще и последовательных преобразований дифференциального выражения ω.

Я дал в 1899 г. (***) в общих чертах метод интегрирования, основывающийся на рассмотрении „простейшей" формы (a) дифферен-

(*) Pfaff, Abh. d. Kön.-Preus. Akad. d. Wiss. aus dem Jahre 1814—1815, стр. 76—136. Gauss, Götting. gelehr. Anz., 1815. Jacobi, J. Crelle, Bd. 2, 1827. Natani, J. Crelle, Bd. 58, 1861. Clebsch, J. Crelle, Bde 60, 61; 1862—1863. Hamburger, Arch. d. Math. von J. Grunert, 1877. Frobenius, J. Crelle, Bd. 82, 1877. S. Lie, Ark. for Math. og Nat., 1877.

(**) E. Goursat, „Leçons sur le problème de Pfaff", 1922.

(***) Записки Новороссийского Университета, 1899.

(****) „Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff". (Ann. de l'Ec. Norm. Sup, 1899).

циального выражения ω; он отличается от упомянутых выше методов E. Cartan'a и E. Goursat'a тем, что он прямой, не требует последовательных преобразований, так что уравнения, определяющие переменные U_i, u_i $i=1\ldots n$ простейшей формы (a), устанавливаются непосредственно по коэффициентам данного выражения ω, чего нельзя сказать про методы E. Cartan'a и E. Goursat'a; наконец, он весьма прост, так как требует знания только необходимых и достаточных условий приводимости выражения ω к четной, или к нечетной канонической форме. Я намерен здесь развить предлагаемый мною метод. Все формулы упрощены введением корня квадратного косого симметрического определителя четной степени.

Я пользуюсь в последующем некоторыми вспомогательными формулами, которые я выведу прежде всего.

Все рассматриваемые функции предполагаются конечными, однозначными и непрерывными в соответствующих областях значений $x_1\ldots x_p$.

§ 1

1. Если дифференциальное выражение ω приводится к n-членной форме $\omega=\sum_1^n{}^i U_i du_i$, так что $X_k=\sum_1^n{}^i U_i\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ $k=1\ldots p$, то косой симметрический определитель степени $2n$:

$$\Delta_{x_r\ldots x_s}=\begin{vmatrix}(rr)\ldots(sr)\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ (rs)\ldots(ss)\end{vmatrix}$$

где $(\alpha\beta)=\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta}-\frac{\partial X_\beta}{\partial x_\alpha}$ $\alpha,\ \beta=r\ldots s$, имеет вид:

$$\Delta_{x_r\ldots x_s}=\left(\frac{\partial(u_1\ldots u_n U_1\ldots U_n)}{\partial(x_r\ldots x_s)}\right)^2. \tag{a}$$

2. Косой симметрический определитель четной степени $\sqrt{2n}$:

$$\begin{vmatrix}\sum_1^m{}^i t_i(rr)_i\ldots\sum_1^m{}^i t_i(sr)_i\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \sum_1^m{}^i t_i(rs)_i\ldots\sum_1^m{}^i t_i(ss)_i\end{vmatrix},$$

где $(\alpha\beta)_i=\frac{\partial X_{i\alpha}}{\partial x_\beta}-\frac{\partial X_{i\beta}}{\partial x_\alpha}$ $i=1\ldots m$, $\alpha,\ \beta=r\ldots s$, а $t_1\ldots t_m$, $x_r\ldots x_s$ — переменные независимые, и функции X_{i_k} $i=1\ldots m$, $k=r\ldots s$ не зависят от $t_1\ldots t_m$, есть алгебраическая форма степени $2n$ относительно $t_1\ldots t_m$. Его квадратный корень есть алгебраическая форма степени n.

Если $\Delta_{r\ldots s}^{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ означает символический определитель степени $2n$:

$$\left|\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial}{\partial x_r}\cdots\dfrac{\partial}{\partial x_s} & \alpha_1 \\ X_{1r}\ldots X_{1s} & \\ \cdot\quad\cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r}\cdots\dfrac{\partial}{\partial x_s} & \alpha_m \\ X_{mr}\ldots X_{ms} & \end{array}\right| \qquad \alpha_1+\cdots+\alpha_m=n,$$

где символы $|\alpha_1\ldots|\alpha_m$ указывают, что соответствующая пара горизонталей входит $\alpha_1\ldots\alpha_m$ раз, и что элементы каждой из них не подчиняются коммутативному закону, то можно показать, что этот квадратный корень имеет вид:

$$\pm\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_m}\frac{1}{\alpha_1!\ldots\alpha_m!}\Delta_{r\ldots s}^{\alpha_1\ldots\alpha_m}t_1^{\alpha_1}\ldots t_m^{\alpha_m}. \tag{b}$$

Я сделаю только краткое указание на доказательство, так как оно элементарно: мы убеждаемся в справедливости этого утверждения при $n=1$ и доказываем его общность путем заключения от n к $n+1$.

3. Косой симметрический определитель четной степени $2n$:

$$\left|\begin{array}{cccccc} 0 & \ldots & 0 & Y_{1r} & \ldots & Y_{1s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & Y_{m'r} & \ldots & Y_{m's} \\ -Y_{1r} & \cdots & -Y_{m'r} & \sum_1^m i\,t_i(rr)_i & \ldots & \sum_1^m i\,t_i(sr)_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -Y_{1s} & \cdots & -Y_{m's} & \sum_1^m i\,t_i(rs)_i & \ldots & \sum_1^m i\,t_i(ss)_i \end{array}\right|,$$

где $2m'\leqslant 2n$ и функции Y_{ik} $i=1\ldots m'$ $k=r\ldots s$ не зависят от $t_1\ldots t_m$, есть алгебраическая форма степени $2(n-m')$ относительно $t_1\ldots t_m$, если $n>m'$, а его квадратный корень есть форма степени $n-m'$. Если $\Delta_{1\ldots m',\,m'+r\ldots m'+s}^{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ означает символический определитель степени $2n-m'$

$$\left|\begin{array}{c|c} Y_{1r}\ldots Y_{1s} & \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \\ Y_{m'r}\ldots Y_{m's} & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r}\cdots\dfrac{\partial}{\partial x_s} & \alpha_1 \\ X_{1r}\ldots X_{1s} & \\ \cdot & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r}\cdots\dfrac{\partial}{\partial x_s} & \alpha_m \\ X_{mr}\ldots X_{ms} & \end{array}\right| \qquad \alpha_1+\cdots+\alpha_m=n-m'$$

можно показать, что этот квадратный корень имеет вид

$$\sum_{a_1\ldots a_m} \frac{1}{a_1!\ldots a_m!} \Delta^{a_1\ldots a_m}_{1\ldots m',\, m'+r\ldots m'+s} t_1^{a_1}\ldots t_m^{a_m}. \qquad (c)$$

Мы убеждаемся в справедливости этого помощью формулы (b) при $m'=1$ и доказываем общность ее путем заключения от m' к $m'+1$. Если $n=m'$, рассматриваемый косой симметрический определитель равен:

$$\begin{vmatrix} Y_{1r} \ldots Y_{1s} \\ \ldots \\ Y_{m'r} \ldots Y_{m's} \end{vmatrix}^2,$$

а его квадратный корень:

$$\pm \begin{vmatrix} Y_{1r} \ldots Y_{1s} \\ \ldots \\ Y_{m'r} \ldots Y_{m's} \end{vmatrix}$$

Этот случай можно рассматривать, как частный предыдущего, полагая в нем $n \geqslant m'$, так как $0!=1$. Итак, формула (c) верна для $n \geqslant m'$.

4. Пусть будет дано дифференциальное выражение:

$$\Omega = t_1\omega_1 + \cdots + t_m\omega_m,$$

где $\omega_i = \sum_1^p {}^k X_{i_k}\, dx_k$ $i=1\ldots m$; $t_1\ldots t_m$, $x_1\ldots x_p$ — независимые переменные, и функции X_{i_k} $i=1\ldots m$, $k=1\ldots p$ не зависят от $t_1\ldots t_m$. Если x_k $k=1\ldots p$ обозначить чрез t_{m+k}, выражение Ω примет вид:

$$\Omega = \sum_1^{p+m} {}^k T_k\, dt_k,$$

где

$$T_1 = \cdots = T_m = 0, \quad T_{m+k} = \sum_1^m {}^i t_i X_{i_k} \quad k=1\ldots p.$$

Косой симметрический определитель четной степени $2n$ вида $\Delta_{t_{m+r}\ldots t_{m+s}}$ (№ 1), где $2 \leqslant 2n \leqslant p$ равен:

$$\Delta_{t_{m+r}\ldots t_{m+s}} = \Delta_{x_r\ldots x_s} = \begin{vmatrix} \sum_1^m {}^i t_i (rr)_i \ldots \sum_1^m {}^i t_i (sr)_i \\ \ldots\ldots\ldots \\ \sum_1^m {}^i t_i (rs)_i \ldots \sum_1^m {}^i t_i (ss)_i \end{vmatrix},$$

а его квадратный корень имеет вид:

$$\pm \sum_{a_1\ldots a_m} \frac{1}{a_1!\ldots a_m!} \Delta^{a_1\ldots a_m}_{r\ldots s} t_1^{a_1}\ldots t_m^{a_m},$$

где

$$\Delta_{r\dots s}^{a_1\dots a_m} = \left| \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_r} \dots \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_{1r} \dots X_{1s} \end{vmatrix} a_1 \atop {\dots\dots \atop \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_r} \dots \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_{mr} \dots X_{ms} \end{vmatrix} a_m} \right| \quad \begin{matrix} a_1 + \dots + a_m = n, \\ r \dots s = 1 \dots p. \end{matrix}$$

Если какое-либо из дифференциальных выражений ω_i $i = 1 \dots m$, например, ω_q есть полный дифференциал, так что $\dfrac{\partial X_{q\alpha}}{\partial x_\beta} - \dfrac{\partial X_{q\beta}}{\partial x_\alpha} = 0$ $\alpha, \beta = 1 \dots p$, тогда определитель $\Delta_{x_r \dots x_s}$ и его квадратный корень не заключают t_q. Символические определители $\Delta_{r\dots s}^{a_1\dots a_m}$ не заключают пары горизонталей:

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x_r} \dots \dfrac{\partial}{\partial x_s}, \\ X_{qr} \dots X_{qs} \end{matrix}$$

и $a_q = 0$.

Если $m = 1$ и $\omega_1 = \omega$, квадратный корень косого симметрического определителя степени $2n$, где $2 \leqslant 2n \leqslant p$

$$\begin{vmatrix} (rr) \dots (sr) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (rs) \dots (ss) \end{vmatrix}$$

имеет вид:

$$\pm \frac{1}{n!} \left| \begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x_r} \dots \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \quad X_s \end{matrix} \right|_n . \tag{b$_1$}$$

Если дифференциальное выражение ω приводится к n-членной форме:

$$\omega = \sum_1^n {}_i U_i \, du_i,$$

так что

$$\begin{vmatrix} (rr) \dots (sr) \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ (rs) \dots (ss) \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial (u_1 \dots u_n \; U_1 \dots U_n)}{\partial (x_r \dots x_s)} \right)^2$$

(формула (a)), то

$$\frac{1}{n!} \left| \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_r} \dots \dfrac{\partial}{\partial x_r} \\ X_r \dots X_s \end{vmatrix} n \right| = \pm \frac{\partial (u_1 \dots u_n \; U_1 \dots U_n)}{\partial (x_r \dots x_s)} . \tag{b$_2$}$$

5. Косой симметрический определитель степени $2n$, где $2m \leqslant 2n \leqslant p+m$, $\Delta_{t_1\ldots t_m x_r\ldots x_s}$ дифференциального выражения Ω имеет вид:

$$\Delta_{t_1\ldots t_m x_r\ldots x_s} = \begin{vmatrix} 0\ldots & 0 & X_{1r} & \ldots X_{1s} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0\ldots & 0 & X_{mr} & \ldots X_{ms} \\ -X_{1r}\ldots & -X_{mr} & \sum\limits_1^m{}^i\, t_i(rr)_i & \ldots \sum\limits_1^m{}^i\, t_i(sr)_i \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ -X_{1s}\ldots & -X_{ms} & \sum\limits_1^m{}^i\, t_i(rs)_i & \ldots \sum\limits_1^m{}^i\, t_i(ss)_i \end{vmatrix},$$

а его квадратный корень по формуле (c) при $m=m'$, $Y_{i_k}=X_{i_k}$ $i=1\ldots m$ $k=1\ldots p$ вид:

$$\pm\sum_{a_1\ldots a_m}\frac{1}{a_1!\ldots a_m!}\Delta^{a_1\ldots a_m}_{r\ldots s}\, t_1^{a_1}\, t_m^{am}, \qquad (c_1)$$

где

$$\Delta^{a_1\ldots a_m}_{r\ldots s} = \left|\begin{array}{c|l} X_{1r}\;\ldots X_{1s} & \\ \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot & \\ X_{mr}\ldots X_{ms} & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r}\ldots\dfrac{\partial}{\partial x_s} & a_1 \\ X_{1r}\;\ldots X_{1s} & \\ \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r}\ldots\dfrac{\partial}{\partial x_r} & a_m \\ X_{mr}\ldots X_{ms} & \end{array}\right| \qquad \begin{matrix} a_1+\cdots+a_m=n-m \\ r\ldots s=1\ldots p. \end{matrix}$$

Если $m=1$ и $\omega_1=\omega$ квадратный корень косого симметрического определителя степени $2n$, где $2 \leqslant 2n \leqslant p+1$,

$$\begin{vmatrix} 0, & X_r & \ldots & X_s \\ -X_r & (rr) & \ldots & (sr) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ -X_s & (rs) & \ldots & (ss) \end{vmatrix}$$

имеет вид;

$$\pm\frac{1}{(n-1)!}\left|\begin{array}{c|c} X_r\;\ldots\;X_s & \\ \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r}\ldots\dfrac{\partial}{\partial x_s} & n-1 \\ X_r\;\ldots\;X_s & \end{array}\right|. \qquad (c_2)$$

Если $\omega_1=\omega$, и $\omega_2=du_1\ldots\omega_m=du_{m-1}$, так что

$$\Omega=t_1\omega+t_2du_1+\cdots+t_m du_{m-1}$$

то косой симметрический определитель $\Delta_{t_1 \ldots t_m x_r \ldots x_s}$ степени $2n$, где $2m \leqslant 2n \leqslant p+m$, имеет вид:

$$\left| \begin{array}{cccc} 0, & 0 \ldots & 0, & X_r \ \ldots \ X_s \\ 0, & 0 \ldots & 0, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} \ \ldots \ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \cdot & \cdot \ \cdot & \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot \\ 0, & 0 \ldots & 0, & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} \ldots \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} \\ -X_r & -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} \ldots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r}, & t(rr) \ \ldots t(sr) \\ \cdot & \cdot \ \cdot & \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot \\ -X_s & -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \ldots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s}, & t(rs) \ \ldots t(ss) \end{array} \right| ,$$

а его квадратный корень имеет вид:

$$\pm \frac{1}{(n-m)!} t^{n-m} \left| \begin{array}{ccc|c} X_r & \ldots & X_s & \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} & n-m \\ X_r & \ldots & X_s & \end{array} \right| ,$$

если для удобства $t_1 \ldots t_m$ означены через $t t_1 \ldots t_{m-1}$. Таким образом квадратный корень косого симметрического определителя степени $2n$, где $2m \leqslant 2n \leqslant p+m$,

$$\left| \begin{array}{cccc} 0, & 0 \ldots & 0, & X_r \ \ldots \ X_s \\ 0, & 0 \ldots & 0, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} \ldots \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \cdot & \cdot \ \cdot & \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot \\ 0, & 0 \ldots & 0, & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} \ldots \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} \\ -X_r & -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} \ldots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r}, & t(rr) \ \ldots \ t(sr) \\ \cdot & \cdot \ \cdot & \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot \\ -X_s & -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \ldots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s}, & t(rs) \ \ldots \ t(ss) \end{array} \right|$$

имеет вид:

$$\pm\frac{1}{(n-m)!}\begin{vmatrix} X_r & \ldots & X_s \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r & \ldots & X_s \end{vmatrix}_{n-m} . \qquad (c_3)$$

6. Если дифференциальное выражение ω приводится к n-членной форме:

$$\omega = \sum_1^n {}_i\, U_i\, du_i\,,$$

так что дифференциальное выражение:

$$\Omega = t\omega + t_1\ du_1 + \cdots + t_{m-1}\ du_{m-1}$$

приводится к виду:

$$\Omega = (tU_1 + t_1)\, du_1 + \cdots + (tU_{m-1} + t_{m-1})\, du_{m-1} + tU_m du_m + \cdots + tU_n du_n,$$

тогда по формуле (a):

$$\Delta_{tt_1 \ldots t_{m-1}\, x_r \ldots x_s} = \left(\frac{\partial(u_1 \ldots u_n,\ tU_1 + t_1 \ldots tU_{m-1} + t_{m-1},\ tU_m \ldots tU_n)}{\partial\,(tt_1 \ldots t_{m-1},\ x_r \ldots x_s\,)}\right)^2$$

или

$$\Delta_{tt_1 \ldots t_{m-1}\, x_r \ldots x_s} = \left(\frac{\partial\,(u_1 \ldots u_n,\ tU_{m1} \ldots tU_n)}{\partial\,(tx_r \ldots x_s\,)}\right)^2,$$

а его квадратный корень равен:

$$\pm\frac{\partial\,(u_1 \ldots u_n,\ tU_{m1} \ldots tU)}{\partial\,(t,\ x_r \ldots x_s)}\,.$$

Из сравнения обоих выражений его следует, что

$$\frac{t^{n-m}}{(n-m)!}\begin{vmatrix} X_r & \ldots & X_s \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r & \ldots & X_s \end{vmatrix}_{n-m} = \pm\frac{\partial\,(u_1 \ldots u_n,\ tU_m \ldots tU_n)}{\partial\,(t,\ x_r \ldots x_s)}\,. \qquad (d)$$

Если в частном случае $U_1 = 1$, так что дифференциальное выражение ω приводится к n-членной форме $du_1 + \sum_2^n {}_j U_j\, du_j$, тогда при $m = 1$ получаем, что

$$\frac{1}{(n-1)!}\left|\begin{matrix} X_s \dots X_r \\ \dfrac{\partial}{\partial x} \dots \dfrac{\partial}{\partial x} \\ X_s \dots X_r \end{matrix}\right|_{n-1} = \pm \frac{\partial (u_1 \dots u_n,\ U_2 \dots U_m)}{\partial (x_r \dots x_s)}. \qquad (\alpha_1)$$

7. Мы рассмотрим еще один случай. Пусть

$$\Omega = t\omega + t_1 du_1 + \dots + t_{m-1} du_{m-1} + t_m f,$$

где функции $u_1 \dots u_{m-1}$, f, не зависят от t, $t_1 \dots t_m$, и $m \geqslant 1$. Косой симметрический определитель степени $2n+2$, где $2(m+1) \leqslant 2n+2 \leqslant \leqslant p+m+1$, вида $\Delta_t t_1 \dots t_m x_r \dots x_s$ есть:

$$\left|\begin{matrix}
0, & 0 & \dots & 0, & 0, & X_r & \dots & X_s \\
0, & 0 & \dots & 0, & 0, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} & \dots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \\
\dots & & & & & & & \dots \\
0, & 0 & \dots & 0, & 0, & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & \dots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} \\
0, & 0 & \dots & 0, & 0, & \dfrac{\partial f}{\partial x_r} & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_s} \\
-X_r & -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} & \dots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & -\dfrac{\partial f}{\partial x_r}, & t(rr) & \dots & t(sr) \\
\dots & & & & & & & \dots \\
-X_s & -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} & \dots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} & -\dfrac{\partial f}{\partial x_s}, & t(rs) & \dots & t(ss)
\end{matrix}\right|,$$

а его квадратный корень есть:

$$\pm \frac{1}{(n-m)!} t^{n-m} \left|\begin{matrix}
X_r & \dots & X_s \\
\dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} & & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \\
\dots & & \dots \\
\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & \dots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} \\
\dfrac{\partial f}{\partial x_r} & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_s} \\
\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x_r} & \dots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r & \dots & X_s \end{matrix}\right|_{n-m} & &
\end{matrix}\right|,$$

так что квадратный корень косого симметрического определителя степени $2n+2$, где $2(m+1) \leqslant 2n+2 \leqslant p+m+1$:

$$\begin{vmatrix} 0, & 0 & \ldots & 0, & 0, & \frac{\partial f}{\partial x_r} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_s} \\ 0, & 0 & \ldots & 0, & 0, & \frac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0 & \ldots & 0, & 0, & \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & \ldots & \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} \\ 0, & 0, & \ldots & 0, & 0, & X_r & \ldots & X_s \\ -\frac{\partial f}{\partial x_r}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & -\frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r}, & X_r, & (rr) & \ldots & (sr) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial f}{\partial x_s}, & -\frac{\partial u_1}{\partial x_s} & \ldots & -\frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s}, & -X_s, & (rs) & \ldots & (ss) \end{vmatrix}$$

есть:

$$\pm \frac{1}{(n-m)!} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_r} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_s} & \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_s} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & \ldots & \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} & \\ X_r & \ldots & X_s & \\ \frac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_s} & n-m \\ X_r & \ldots & X_s & \end{vmatrix}. \tag{c_4}$$

Если в частном случае дифференциальное выражение ω приводится к n-членной форме $\omega = \sum_1^n i U_i du_i$, так что дифференциальное выражение Ω получает вид $n+1$-членной формы:

$$\Omega = (tU_1 + t_1)\, du_1 + \cdots + (tU_{m-1} + t_{m-1})\, du_{m-1} + tU_m du_m + \cdots + \\ + tu_n dU_n + t_m df,$$

тогда квадратный корень косого симметрического определителя $\Delta_{tt_1 \ldots t_m x_r \ldots x_s}$ степени $2n+2$ имеет по формуле (a) еще вид:

$$\pm \frac{\partial (f.\, u_1 \cdots u_n,\ tU_1 + t_1, \ldots,\ tU_{m-1} + t_{m-1},\ tU_m, \ldots, tU_n,\ t_m)}{\partial (tt_1 \ldots t_m,\ x_r \ldots x_s)},$$

или вид:

$$\pm \frac{\partial (f,\ u_1, \ldots,\ u_n,\ tU_m, \ldots,\ tU_n}{\partial (t,\ x_r, \ldots,\ x_s)}.$$

Сравнивая оба выражения этого квадратного корня, получаем, что

$$\frac{t^{n-m}}{(n-m)!}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_r} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_s} & \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_r} \cdots \frac{\partial u_1}{\partial x_s} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} \cdots \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} & \\ X_r \ \cdots \ X_s & \\ \frac{\partial}{\partial x_r} \cdots \frac{\partial}{\partial x_s} & n-m \\ X_r \ \cdots \ X_s & \end{vmatrix} = \pm \frac{\partial (f,\ u_1 \ldots u_n,\ tU_m \ldots tU_n)}{\partial (t,\ x_r \ldots x_s)}. \tag{e}$$

Если в частном случае $U_1 = 1$, так что дифференциальное выражение ω приводится к n-членной форме $du_1 + \sum_2^n j \,.\, U_j \,.\, du_j$, то при $m=1$ получим, что

$$\frac{1}{(n-1)!}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_r} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_s} & \\ X_r \ldots X_s & \\ \frac{\partial}{\partial x_r} \cdots \frac{\partial}{\partial x_s} & n-1 \\ X_r \ldots X_s & \end{vmatrix} = \pm \frac{\partial (f,\ u_1 \ldots u_n,\ U_2 \ldots U_n)}{\partial (x_r \ldots x_s)}. \tag{f$_1$}$$

8. Система $p+1$ уравнений в полных дифференциалах:

$$\omega = X_1 dx_1 + \cdots + X_p dx_p = 0,$$

$$(11)\, dx_1 + \cdots + (p1)\, dx_p = 0,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$(1p)\, dx_1 + \cdots + (pp)\, dx_p = 0,$$

установленная для дифференциального выражения ω, всегда сполна интегрируема (Frobenius, l. c.).

Для дифференциального выражения:

$$\Omega = t_1 \omega_1 + \cdots + t_m \omega_m,$$

где $\omega_i = \sum_1^p {}_k X_{i_k} dx_k$, $i = 1 \ldots m$, и функции X_{i_k}, $i = 1 \ldots m$, $k = 1 \ldots p$

не зависят от $t_1 \ldots t_m$, эта система имеет вид:

$$\Omega = t_1\omega_1 + \cdots + t_m\omega_m = 0,$$

$$\omega_1 = 0, \ldots \quad \omega_m = 0,$$

$$-X_{11}dt_1 - \cdots - X_{m_1}dt_m + \sum_1^m {}^i t_i(11)_i dx_1 + \cdots + \sum_1^m {}^i t_i(p1)_i dx_p = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-X_{1p}dt_1 - \cdots - X_{mp}dt_m + \sum_1^m {}^i t_i(1p)_i dx_1 + \cdots + \sum_1^m {}^i t_i(pp)_i dx_p = 0.$$

Первое уравнение есть следствие остальных:

$$X_{11}dx_1 + \cdots + X_{1p}dx_p = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_{m_1}dx_1 + \cdots + X_{mp}dx_p = 0, \tag{g}$$

$$-X_{11}dt_1 - \cdots - X_{m_1}dt_m + \sum_1^m {}^i t_i(11)_i dx_1 + \cdots + \sum_1^m {}^i t_i(p1)_i dx_p = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-X_{np}dt_1 - \cdots - X_{mp}dt_m + \sum_1^m {}^i t_i(1p)_i dx_1 + \cdots + \sum_1^m {}^i t_i(pp)_p dx_p = 0,$$

представляющих сполна интергрируемую систему.

Для дифференциального выражения:

$$\Omega = t\omega + t_1du_1 + \cdots + t_{m-1}du_{m-1}$$

эта последняя система имеет вид:

$$\omega = X_1dx_1 + \cdots + X_pdx_p = 0,$$

$$du_1 = 0 \ldots \quad du_{m-1} = 0, \tag{g$_1$}$$

$$-X_1dt - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}dt_1 - \cdots - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1}dt_{m-1} + t(11)dx_1 + \cdots + t(p1)dx_p = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-X_pdt - \frac{\partial u_1}{\partial x_p}dt_1 - \cdots - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_p}dt_{m-1} + t(1p)dx_1 + \cdots + t(pp)dx_p = 0.$$

§ 2

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы дифференциальное выражение $\omega = \sum_1^p {}^k X_k dx_k$ приводилось к n-членной канонической форме четной(*), или к нечетной(**), состоит в том, чтобы найвысшая степень отличных от нуля главных миноров косых симметрических определителей:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0, & X_1 \dots X_p \\ -X_1 & (11)\dots(p1) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ -X_p & (1p)\dots(pp) \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} (11)\dots(p1) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (1p)\dots(pp) \end{vmatrix}$$

была одна и та же $2n$, или была соответственно $2n$, $2n-2$.

Если дифференциальное выражение ω приводится к n-членной четной канонической форме:

$$\omega = \sum_1^n {}^i U_i du_i$$

и если, например:

$$\Delta_{x_1 \dots x_{2n}} = \begin{vmatrix} (11) \dots (2n\,1) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (12n)\dots(2n2n) \end{vmatrix} > 0,$$

то функция $u_m (m = 1 \dots n)$ определяется по уже определенным функциям $u_1 \dots u_{m-1}$, как произвольное независимое от последних решение полной системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{vmatrix} 0, & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n}} \\ X_1 & (11) \ \dots \ (2n1) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_{2n} & (12n) \dots (2n2n) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n}} & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n+\varrho}} \\ (11) & \dots & (2n1) & (2n+\varrho\, 1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (12n) & \dots & (2n2n) & (2n+\varrho\, 2n) \end{vmatrix} = 0 \quad \varrho = 1 \dots p-2n$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n}} \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial x_1} & (11) \ \dots \ (2n1) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial x_{2n}} & (12n) \dots (2n2n) \end{vmatrix} = 0 \quad j = 1 \dots m-1$$

(Hamburger, l. c., стр. 202—203).

Дифференциальное выражение

$$\Omega = t_1 \omega_1 + \dots + t_m \omega_m \ (\S\ 1)$$

всегда четного класса, так как в этом случае определители Δ_1 и Δ имеют вид:

(*) $\omega = \sum_1^n {}^i U_i\, du_i$.

(**) $\omega = du_1 + \sum_2^n {}^j U_j\, du$.

$$
\Delta_1 = \begin{vmatrix}
0 & \ldots & 0, & \sum_1^m{}^i t_i X_{i1} & \ldots & \sum_1^m{}^i t_i X_{ip} \\
0 & \ldots & 0, & X_{11} & \ldots & X_{1p} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \ldots & 0, & X_{m1} & \ldots & X_{mp} \\
-\sum_1^m{}^i t_i X_{i1} & \ldots & -X_{m1}, & \sum_1^m{}^i t_i (11)_i & \ldots & \sum_1^m{}^i t_i (p1)_i \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-\sum_1^m{}^i t_i X_{i1} & \cdots & -X_{mp}, & \sum_1^m{}^i t_i (1p)_i & \ldots & \sum_1^m{}^i t_i (pp)_i
\end{vmatrix}
$$

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
0 & \ldots & 0, & X_{11} & \ldots & X_{1p} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \ldots & 0, & X_{m1} & \ldots & X_{mp} \\
-X_{11} & \ldots & -X_{m1}, & \sum_1^m{}^i t_i (11)_i & \ldots & \sum_1^m{}^i t_i (p1)_i \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-X_{1p} & \ldots & -X_{mp}, & \sum_1^m{}^i t_i (1p)_i & \ldots & \sum_1^m{}^i t_i (pp)_i
\end{vmatrix},
$$

откуда и следует утверждение.

Необходимое и достаточное условие, чтобы дифференциальное выражение Ω было класса $2n$, состоит, поэтому, в том, чтобы наивысшая степень отличных от нуля главных миноров косого симметрического определителя Δ была равна $2n$. Если дифференциальные выражения ω_i $i = 1 \ldots m$ линейно независимы, так что, по крайней мере, один из главных миноров степени $2m$ вида:

$$
\begin{vmatrix}
0 & \ldots & 0, & X_{1r} & \ldots & X_{1s} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \ldots & 0, & X_{mr} & \ldots & X_{ms} \\
-X_{1r} & \ldots & -X_{mr}, & \sum_1^m{}^i t_i (rr)_i & \ldots & \sum_1^m{}^i t_i (sr)_i \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-X_{1s} & \ldots & -X_{ms}, & \sum_1^m{}^i t_i (rs)_i & \ldots & \sum_1^m{}^i t_i (ss)_i
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
X_{1r} & \ldots & X_{1s} \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
X_{mr} & \ldots & X_{ms}
\end{vmatrix}^2
$$

отличен от нуля, то $2n \geqslant 2m$. Далее, если $2q$ есть наивысшая степень отличных от нуля главных миноров определителя Δ указанного вида, т. е. заключающих элементы его m первых горизонталей (и колонн), то $2n = 2q$. В самом деле, те главные миноры степени $2q + 2$, которых матриссы образуются присоединением к элементам одного из вышеупомянутых отличных от нуля главных миноров степени $2q$ элементов остальных горизонталей и колонн, равны тождественно нулю. Этого же достаточно (Frobenius, l. c.), чтобы были тождественно равны нулю все миноры степени $2q+1$ определителя Δ. Поэтому $2n=2q$. Отсюда снова следует, что необходимое и достаточное условие, чтобы дифференциальное выражение Ω, в котором ω_i $i=1\ldots m$ линейно независимы, было класса $2n$, состоит в том, чтобы была равна $2n$ наивысшая степень отличных от нуля только тех главных миноров определителя Δ, которые заключают элементы его m первых горизонталей (и колонн), т. е. главных миноров вида:

$$\Delta_{t_1\ldots t_m\, x_r\ldots x_s}=\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & X_{1r} & \ldots X_{1s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & X_{mr} & \ldots X_{ms} \\ -X_{1r} & \cdots & -X_{mr}, & \sum_1^m{}^i t_i(rr)_i \ldots & \sum_1^m{}^i t_i(sr)_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -X_{1s} & \cdots & -X_{ms}, & \sum_1^m{}^i t_i(rs)_i \ldots & \sum_1^m{}^i t_i(ss)_i \end{vmatrix}.$$

Можно рассматривать вместо этих косых симметрических определителей четной степени их квадратные корни. Тогда на основании формулы (c_1) § 1 получается:

Теорема I. Класс дифференциального выражения:

$$\Omega=t_1\omega_1+\cdots+t_m\omega_m,$$

где $\omega_i=\sum_1^p{}^k X_{i_k}dx_k$ $i=1\ldots m$; $t_1\ldots t_m$, $x_1\ldots x_p$ — переменные независимые, и функции X_{i_k} $i=1\ldots m$, $k=1\ldots p$ не зависят от $t_1\ldots t_m$, всегда число четное. Если дифференциальные выражения ω_i $i=1\ldots m$ линейно независимы, то последнее не меньше $2m$. Необходимое и достаточное условие, чтобы класс дифференциального выражения Ω был в этом случае равен $2n$, где $2m\leqslant 2n\leqslant p+m$, состоит в том, чтобы найвысшая степень отличных от нуля символических определителей:

$$\begin{vmatrix} X_{1r}\ldots X_{1s} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ X_{mr}\ldots X_{ms} & \\ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_r}\ldots\dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_{1r}\ \ldots X_{1s} \end{vmatrix} & a_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_r}\ldots\dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_{mr}\ldots X_{ms} \end{vmatrix} & a_m \end{vmatrix}$$

была равна $2n-m$.

Рассмотрим три частных случая.

а) Если
$$\Omega = t\omega + t_1 du_1 + \cdots + t_{m-1} du_{m-1},$$

где функции $u_1 \ldots u_{m-1}$ не зависят от t, $t_1 \ldots t_{m-1}$ и дифференциальные выражения ω, $du_1 \ldots du_{m-1}$ линейно независимы, то необходимое и достаточное условие, чтобы класс Ω был равен $2n$, где $2m \leqslant 2n \leqslant p+m$, состоит в том, чтобы наивысшая степень отличных от нуля символических определителей:

$$\begin{vmatrix} X_r & \ldots & X_s \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & \ldots & \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} \\ \left.\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r & \ldots & X_s \end{matrix}\right| & & a \end{vmatrix}$$

была равна $2n-m$. Если класс Ω равен $2n$, то сполна интегрируемая система $p+m$ дифференциальных уравнений (g_1) § 1 заключает только $2n$ независимых уравнений, потому что определитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & X_1 & \ldots & X_p \\ 0 & & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_p} \\ -X_1 & \ldots & -\frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1}, & t(11) & \ldots & t(p1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -X_p & \ldots & -\frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_p}, & t(1p) & \ldots & t(pp) \end{vmatrix}.$$

есть определитель Δ дифференциального выражения Ω.

Если, поэтому, например:

$$\begin{vmatrix} X_1 & \ldots & X_{2n-m} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} \\ \left.\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_{2n-m}} \\ X_1 & \ldots & X_{2n-m} \end{matrix}\right| & & n-m \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

то эти $2n$ независимые уравнения суть:

$$\omega = X_1 dx_1 + \cdots + X_p dx_p = 0,$$

$$du_1 = 0 \ldots du_{m-1} = 0, \tag{g$_2$}$$

$$-X_1 dt - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dt_1 - \cdots - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} dt_{m-1} + t(11)\, dx_1 + \cdots + t(p1)\, dx_p = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-X_{2n-m} dt - \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} dt_1 - \cdots - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} dt_{m-1} + t(12n-m)\, dx_1 + \cdots$$

$$\cdots + t(p2n-m)\, dx_p = 0$$

и представляют сполна интегрируемую систему.

b) Если

$$\Omega = t\omega + t_1 du_1 + \cdots + t_{m-1} du_{m-1} + t_m df,$$

где функции $u_1 \ldots u_{m-1}$, f не зависят от t, $t_1 \ldots t_{m-1}$ и ω, $du_1 \ldots du_{m-1}$, df линейно независимы, то необходимое и достаточное условие, чтобы класс Ω был равен $2n$, где $2(m+1) \leqslant 2n \leqslant p+m+1$, состоит в том, чтобы, по крайней мере, один символический определитель степени $2n-m-1$:

$$\left| \begin{array}{ccc} \dfrac{\partial f}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_s} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} \\ X_r & \ldots & X_s \\ \left.\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r & \ldots & X_s \end{array}\right| & n-m-1 & \end{array} \right| \qquad r \ldots s = 1 \ldots p,$$

был отличен от нуля, и чтобы все символические определители степени $2n-m+1$, если таковые могут быть установлены:

$$\left| \begin{array}{ccc} \dfrac{\partial f}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_s} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} \\ X_r & \ldots & X_s \\ \left.\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r & \ldots & X_s \end{array}\right| & n-m & \end{array} \right|$$

тождественно обращались в нуль. Этот результат следует из теоремы (I), есл в ней вместо m положить $m+1$, если $\omega_1=df$, $\omega_2=du_1 \cdots \omega_m=du_{m-1}$, $\omega_{m+1}=\omega$ и если $t_1 \dots t_{m+1}$ обозначить через $t_m, t_1, \dots, t_{m-1}, t$.

Если класс дифференциального выражения:

$$\Omega=t_1\omega_1+\cdots+t_m\omega_m,$$

где $\omega_i=\sum_1^p{}_k X_{i_k}dx_k$, $i=1\dots m$, и ω_i линейно независимы, равен $2n$, то сполна итегрируемая система (g) § 1 заключает только $2n$ независимых уравнений, так как определитель ее есть определитель Δ дифференциального выражения Ω. На этом основании можно доказать теорему: Необходимое и достаточное условие, чтобы система m независимых уравнений в полных дифференциалах:

$$\omega_1=X_{11}dx_1+\cdots+X_{1p}dx_p=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\omega_m=X_{m_1}dx_1+\cdots+X_{mp}dx_p=0$$

была сполна интегрируемой, состоит в том, чтобы все определители $m+2$-й степени:

$$\begin{vmatrix} X_{1r}\dots & X_{1s} \\ \dots & \dots \\ X_{mr}\dots & X_{ms} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r}\dots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_{ir}\ \dots & X_{is} \end{vmatrix} \qquad i=1\dots m,\quad r\dots s=1\dots p$$

были тождественно равны нулю (*). В самом деле, если эта система сполна интегрируема и если система ее m полных интегралов есть $u_s=e_s$, $s=1\dots m$, так что $\omega_i=\sum_1^m{}_s a_{i_s}du_s$, $i=1\dots m$ и $\sum\pm a_{11}\dots a_{m_m}\neq 0$, то дифференциальное выражение $\Omega=t_1\omega_1+\cdots+t_m\omega_m$ приводится к виду:

$$\Omega=U_1du_1+\cdots+U_mdu_m,$$

где $U_s=\sum_1^m{}_i t_i a_{i_s}$, $s=1\dots m$ и, следовательно, переменные U_s, u_s, $s=1\dots m$ — независимы. Поэтому класс дифференциального выражения Ω равен $2m$. Обратно, если его класс равен $2m$, то система $\omega_i=0$, $i=1\cdots m$ — сполна интегрируемая. В самом деле, тогда сполна интегируруемая система (g) § 1 заключает только $2m$ независимых

(*) Два других доказательства были даны мною в 1898 г. (Записки Новороссийского университета), уравнений, например:

$$\omega_1 = X_{11}dx_1 + \cdots + X_{1p}dx_p = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\omega_m = X_{m1}dx_1 + \cdots + X_{mp}dx^p = 0,$$

$$-X_{11}dt_1 - \cdots - X_{m1}dt_m + \sum_1^m {}_i t_i (11)_i dx_1 + \cdots + \sum_1^m {}_i t_i (p1)_i dx_p = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$-X_{1m}dt_1 - \cdots - X_{mm}dt_m + \sum_1^m {}_i t_i (1m)_i dx_1 + \cdots + \sum_1^m {}_i t_i (pm)_i dx_p = 0,$$

в числе которых находится необходимо и рассматриваемая система. Так как последняя не заключает $t_1 \ldots t_m$, $dt_1 \ldots dt_m$ и так как m последних уравнений независимы относительно $dt_1 \ldots dt_m$, она сама по себе сполна интегрируема.

Итак, необходимое и достаточное условие, чтобы система m независимых уравнений в полных дифференциалах была сполна интегрируемой, состоит в том, чтобы класс дифференциального выражения:

$$\Omega = t_1\omega_1 + \cdots + t_m\omega_m$$

был равен $2m$. Для этого, в свою очередь, по теореме I при $2n = 2m$ необходимо и достаточно, чтобы все символические определители степени $2n - m + 2 = m + 2$:

$$\begin{vmatrix} X_{1r} & \ldots & X_{1s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{mr} & \ldots & X_{ms} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_{ir} & \ldots & X_{is} \end{vmatrix} \qquad i = 1 \ldots m \quad r \ldots s = 1 \ldots p,$$

были тождественнно равны нулю, что и требовалось доказать.

§ 3

Перейдем теперь к нашей задаче.

Пусть будет дано дифференциальное уравнение Pfaff'а:

$$\omega = \sum_1^p {}_k X_k dx_h = 0.$$

Мы сначала приведем дифференциальное выражение ω к простейшей форме, т. е. к форме с наименьшим числом дифференциалов. Всякое дифференциальное выражение ω приводится к простейшей форме:

$$\omega = \sum_1^n {}_i U_i du_i,$$

например, к канонической. Если последняя n-членная, то $2n \leqslant p$, или $2n-1 \leqslant p$; следовательно, во всяком случае $2n \leqslant p+1$. Дифференциальное выражение $t\omega$, где $t, x_1, \ldots, x_p$ — переменные независимые, тогда класса $2n$, так что u_i, tU_i, $i=1\ldots n$ — независимые функции.

Обратно, если класс дифференциального выражения $t\omega$ равен $2n$, простейшая форма дифференциального выражения ω n-членная, так как класс дифференциального выражения $t\omega$ есть инвариант.

Таким образом, необходимое и достаточное условие, чтобы простейшая форма дифференциального выражения ω была n-членной, состоит в том, чтобы класс дифференциального выражения $t\omega$ был равен $2n$. Если, поэтому, положить в теореме I $m=1$, $\omega_1 = \omega$, получается

Теорема II. Необходимое и достаточное условие, чтобы простейшая форма дифференциального выражения ω была n-членной, состоит в том, чтобы, по крайней мере, один символический определитель степени $2n-1$ $(\leqslant p)$ вида:

$$\left|\begin{array}{c} X_r \ldots X_s \\ \left|\begin{array}{c} \dfrac{\partial}{\partial x_r} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \ldots X_s \end{array}\right| n-1 \end{array}\right| \quad r\ldots s = 1\ldots p,$$

был отличен от нуля, и чтобы все определители степени $2n+1$ этого вида:

$$\left|\begin{array}{c} X_r \ldots X_s \\ \left|\begin{array}{c} \dfrac{\partial}{\partial x_r} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \ldots X_s \end{array}\right| n \end{array}\right|,$$

если они могут быть установлены, обращались тождественно в нуль. Если эти условия выполняются, дифференциальное выражение ω приводится к простейшей n-членной форме:

$$\omega = \sum_1^n {}^i U_i \, du_i \, .$$

Я изложу два метода ее определения.

Первый метод сводит ее определение к определению канонической (четной) формы дифференциального выражения $t\omega$: если

$$\omega = \sum_1^n {}^i U_i \, du_i$$

есть эта простейшая форма, то $t\sum_1^i {}^i U_i \, du_i$ есть, очевидно, каноническая (четная), форма дифференциального выражения $t\omega$. Обратно, если

$$t\omega = \sum_1^n {}^i V_i \, dv_i$$

есть каноническая (четная) форма дифференциального выражения $t\omega$, то функции v_i $i=1\dots n$ не зависят от t, а V_i $i=1\dots n$ имеют вид $V_i = tU_i$, где U_i не заключают t, так что $\sum_1^n i\, U_i\, dv_i$ есть простейшая форма дифференциального выражения ω.

В самом деле, пусть, например:

$$\left|\begin{array}{c} X_1 \dots X_{2n-1} \\ \left.\dfrac{\partial}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}}\right| n-1 \\ X_1 \dots X_{2n-1} \end{array}\right| \gtreqless 0.$$

Переменное $v_m\,(1 \leqslant m \leqslant n)$ определяется по уже определенным переменным $v_1 \dots v_{m-1}$, как произвольное независимое от них решение полной системы (A) § 1:

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial f}{\partial t} & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} \\ 0 & 0 & X_1 & \dots & X_{2n-1} \\ tX_1, & -X_1 & t(11) & \dots & t(2_{n-1}1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ tX_{2n-1} & -X_{2n-1} & t(12_{n-1}) & \dots & t(2_{n-1}2_{n-1}) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial t} & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dots \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} \\ 0 & X_1 & \dots X_{2n-1} & X_{2n-1+\varrho} \\ -X_1 & t(11) & \dots t(2_{n-1}1) & t(2_{n-1+\varrho}1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -X_{2n-1} & t(12_{n-1}) & \dots t(2_{n-1}2_{n-1}) & t(2_{n-1+\varrho}2_{n-1}) \end{vmatrix} = 0$$

$$\varrho = 1 \dots p - (2_{n-1})$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial f}{\partial t} & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} \\ \dfrac{\partial v_j}{\partial t} & 0 & X_1 & \dots & X_{2n-1} \\ \dfrac{\partial v_j}{\partial x_1}, & -X_1 & t(11) & \dots & t(2_{n-1}1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial v_j}{\partial x_{2n-1}}, & -X_{2n-1} & t(12_{n-1}) & \dots & t(2_{n-1}2_{n-1}) \end{vmatrix} = 0 \quad j = 1 \dots m-1,$$

так как

$$\Delta_{tx_1 \dots x_{2n-1}} = \begin{vmatrix} 0 & X_1 & \dots X_{2n-1} \\ -X_1 & t(11) & \dots t(2_{n-1}1) \\ \dots & \dots & \dots \\ -X_{2n-1} & t(12_{n-1}) & \dots t(2_{n-1}2_{n-1}) \end{vmatrix} = t^{2n-2} \left|\begin{array}{c} X_1 \dots X_{2n-1} \\ \left.\dfrac{\partial}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}}\right| n-1 \\ X_1 \dots X_{2n-1} \end{array}\right|^2 > 0,$$

если $t \gtreqless 0$. Первое дифференциальное уравнение имеет вид:

$$t \frac{\partial f}{\partial t} \Delta_{tx_1 \ldots x_{2n-1}} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Отсюда следует, что все функции v_i $i=1 \ldots n$ не зависят от t. Полагая в остальных уравнениях $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial v_j}{\partial t} = 0$ $j = 1 \ldots m-1$, можно рассматривать их левые части, как первые миноры косых симметрических определителей степени $2n+2$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} \\ 0 & 0 & X_1 & \ldots & X_{1n-1} & X_{2n-1+\partial} \\ -\frac{\partial f}{\partial x_1} & -X_1 & t(11) & \ldots & t(2_{n-1}1) & t(2n-+\varrho 1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial f}{\partial t_{2n-1}} & -X_{2n-1} & t(12n-1) & \ldots & t(2n-1\,2n-1). & t(2n-1+\varrho\, 2n-1) \\ -\frac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}}, & -X_{2n-1+\varrho} & t(12n-1+\varrho) & \ldots & t(2n-1\,2n-1+\varrho), & t(2n-1+\varrho\, 2n-1+\varrho) \end{vmatrix}$$

$$\varrho = 1 \ldots p - (2^{n-1})$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial v_j}{\partial x_1} & \ldots & -\frac{\partial v_j}{\partial x_{2n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & X_1 & \ldots & X_{1n-1} \\ -\frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x_1}, & -X_1 & t(11) & \ldots & t(2_{n-1}1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}}, & \frac{\partial v_j}{\partial x_{2n-1}}, & -X_{2n-1} & t(12n-1) & \ldots & t(2n-1\,2n-1) \end{vmatrix} \quad j=1\,.\,.m-1$$

относительно элемента первой колонны и последней, rel. второй горизонтали. На основании теоремы о первом миноре косого симметрического определителя четной степени и на основании формулы (c_1) § 1 при $m=1, 2, 3$, $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = df$, $\omega_3 = dv_j$, эти уравнения принимают вид:

$$t^{2n-2} \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} \\ X_1 \ldots X_{2n-1} & X_{2n-1+\varrho} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} & \frac{\partial}{\partial x_{2n-1+\varrho}} \\ X_1 \ldots X_{2n-1} & X_{2n-1+\varrho} \end{vmatrix} n-1 \right| \cdot \left| \begin{matrix} X_1 \ldots X_{2n-1} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1 \ldots X_{2n-1} \end{vmatrix} n-1 \end{matrix} \right| = 0$$

$$\varrho = 1 \ldots p - (2n-1)$$

$$t^{2n-3}\left|\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} & \\ \frac{\partial v_j}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial v_j}{\partial x_{2n-1}} & \\ X_1 & \ldots & X_{2n-1} & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} & n-2 \\ X_1 & \ldots & X_{2n-1} & \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{ccc|c} X_1 & \ldots & X_{2n-1} & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} & n-1 \\ X_1 & \ldots & X_{2n-1} & \end{array}\right| = 0$$

$$j = 1 \ldots m-1$$

или, наконец, вид:

$$\left|\begin{array}{cccc|c} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} & \\ X_1 & \ldots & X_{2n-1} & X_{2n-1+\varrho} & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} & \frac{\partial}{\partial x_{2n-1+\varrho}} & n-1 \\ X_1 & \ldots & X_{2n-1} & X_{2n-1+\varrho} & \end{array}\right| = 0, \quad \left|\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} & \\ \frac{\partial v_j}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial v_j}{\partial x_{2n-1}} & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} & n-2 \\ X_1 & \ldots & X_{2n-1} & \end{array}\right| = 0$$

$$\varrho = 1 \ldots p-(2n-1); \quad j = 1 \ldots m-1$$

и представляют полную систему. Если функции v_i $i = 1 \ldots n$ определены из этих уравнений, то функции V_i $i = 1 \ldots n$ определяются из уравнений:

$$tX_k = \sum_1^n {}^i V_i \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \quad k = 1 \ldots p,$$

заключающих только n независимых. Из формы их следует, что V_i $i = 1 \ldots n$ имеют вид tU_i, где U_i не зависят от t, r и т. д.

Но я дам другой метод определения функций U_i, u_i, $i = 1 \ldots n$, имеющий то преимущество, что линейные дифференциальные уравнения, определяющие функции u_i, $i = 1 \ldots n$, получаютса уже в виде, разрешенном относительно частных производных. Этот медот основывается на необходимых и достаточных условиях, чтобы $du_1 \ldots du_m$, $(1 \leqslant m \leqslant n)$ входили в одну и ту же простейшую форму $\sum_1^n {}^i U_i, \; du_i$ дифференциального выражения ω.

Для этого необходимо, чтобы дифференциальное выражение:

$$\Omega = t\omega + t_1\, du_1 + \cdots + t_m\, du_m,$$

где $tt_1 \ldots t_m$, $x_1 \ldots x_p$ переменные независимые, было класса $2n$, так как в этом случае дифференциальное выражение Ω имеет вид:

$$\Omega = (tU_1 + t_1)\, du_1 + \cdots + (tU_m + t_m)\, du_m + tU_{m+1}\, du_{m+1} + \cdots + tU\, du_n,$$

где переменные u_i, tU_i, $i = 1 \ldots n$, а, следовательно, и переменные $u_1 \ldots u_n$, $tU_1 + t_1 \ldots tU_m + t_m$, $tU_{m+1} \ldots tU_n$ независимы. Обратно,

Теорема III. Если дифференциальное выражение:

$$\Omega = t\omega + t_1\,du_1 + \cdots + t_m\,du_m,$$

где $1 \leqslant m \leqslant p$ и $tt_1 \ldots t_m x_1 \ldots x_p$ -- переменные независимые и независимые функции $u_1 \ldots u_m$ не зависят от $tt_1 \ldots t_m$ — класса $2n$, то $m \leqslant n$ и простейшая форма дифференциального выражения ω наиболее n-членная.

В самом деле, введем $u_1 \ldots u_m$ как новые переменные независимые вместо, например, $x_1 \ldots x_m$. Тогда:

$$\omega = \overline{U}_1 du_1 + \cdots + \overline{U}_m du_m + \overline{\omega},$$

где

$$\overline{U}_i = \sum_1^m {}^s X_s \frac{\partial x_s}{\partial u_i} \quad i = 1 \ldots m, \quad \overline{\omega} = \sum_{m+1}^p {}^k \overline{X}_k dx_k,$$

и

$$\overline{X}_k = X_k + \sum_1^m {}^s X_s \frac{\partial x_s}{\partial x_k} \qquad k = m+1 \ldots p.$$

Коэффициенты $\overline{U}_i,\ \overline{X}_k\ \ i = 1 \ldots m,\ k = m+1 \ldots p$ суть функции $u_1 \ldots u_m$, $x_{m-1} \ldots x_p$.

Пусть простейшая форма дифференциального выражения $\overline{\omega}$ при постоянных $u_1 \ldots u_m$ будет $r - m$-членная:

$$\overline{\omega} = \sum_{m+1}^r {}^j U_j\, du_j,$$

где $0 \leqslant 2(r-m) \leqslant p - m + 1$ и переменные $u_{m+1} \ldots u_r$, $tU_{m+1} \ldots tU_r$ независимы. Тогда:

$$\omega = \sum_1^r {}^i U_i\, du_i,$$

где

$$U_i = \overline{U}_i - \sum_{m+1}^r {}^j U_j \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \qquad i = 1 \ldots m,$$

и дифференциальное выражение Ω получает вид:

$$\Omega = (tU_1 + t_1)\,du_1 + \cdots + (tU_m + t_m)\,du_m + tU_{m+1}du_{m+1} + \cdots + tU_r du_r.$$

Так как его класс равен $2n$, и переменные $u_{m+1} \ldots u_r$, $tU_{m+1} \ldots tU_r$, а, следовательно, и переменные $u_1 \ldots u_r$, $tU_1 + t_1 \ldots tU_m + t_m$, $tU_{m+1} \ldots tU_r$ независимы, то $2r = 2n$ и $r = n$. Следовательно, $m \leqslant n$ и

$$\omega = \sum_1^n {}^i U_i\, du_i, \qquad (\alpha)$$

т. е. простейшая форма дифференциального выражения ω наиболее n-членная, что и требовалось доказать.

Если она n-членная, то на основании равенства (α) получается.

Теорема IV. Если простейшая форма дифференциального выражения ω n-членная, то необходимое и достаточное условие, чтобы она заключала $du_1, \ldots, du_m (m \leqslant n)$, состоит в том, чтобы дифференциальное выражение:

$$\Omega = t\omega + t_1 du_1 + \cdots + t_m du_m,$$

где $tt_1 \ldots t_m$, $x_1 \ldots x_p$ — переменные независимые, было класса $2n$.

Следствие. Из формы коэффициентов U_i, $i = 1 \ldots n$ следует, что если функции $u_1 \ldots u_m$ $(m < n)$ простейшей n-членной формы:

$$\omega = \sum_1^n {}_i\, U_i du_i$$

дифференциального выражения ω уже найдены, то ее определение сводится по введении $u_1 \ldots u_m$, как новых переменных независимых, к определению простейшей $n - m$-членной формы дифференциального выражения $\overline{\omega}$ при постоянных $u_1 \ldots u_m$.

Из теоремы I (случай b) и теоремы III следует

Теорема V. Если простейшая форма дифференциального выражения ω n-членная, то не все символические определители степени $2n - m - 1$ $(m \leqslant n - 1)$:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} \ldots \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial x_r} \ldots \dfrac{\partial u_m}{\partial x_s} \\ X_r \;\ldots\; X_s \\ \left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x_r} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \;\ldots\; X_s \end{array} \right| n - m - 1 \end{array} \right| \quad r \ldots s = 1 \ldots p,$$

где функции $u_1 \ldots u_m$ произвольны, независимы тождественно обращаются в нуль.

Если бы все эти определители тождественно обращались в нуль для некоторой системы независимых функций $u_1 \ldots u_m (m \leqslant n - 1)$, то из теоремы I (случай b) следовало бы при $f = u_m$, что класс дифференциального выражения:

$$\Omega = t\omega + t_1 du_1 + \cdots t_m du_m$$

равен наиболее $2(n - 1)$ и что, поэтому, по теореме III простейшая форма дифференциального выражения наиболее $n - 1$-членная.

Теперь я изложу второй метод определения простейшей формы дифференциального выражения ω.

Пусть условия теоремы II будут выполнены и пусть, поэтому, его простейшая форма будет n-членная:

$$\omega = \sum_1^n {}_i U_i \, du_i$$

и пусть, например:

$$\left| \begin{array}{c|c} X_1 \ldots X_{2n-1} & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}} & n-1 \\ X_1 \ldots X_{2n-1} & \end{array} \right| \gtrless 0$$

или по формуле (d) § 1 при $m=1$, $t \gtrless 0$

$$\frac{\partial (u_1 \ldots u_n, \; tU_1 \ldots tU_n)}{\partial (t, \; x_1 \ldots x_{2n-1})} \gtrless 0$$

в некоторой области E значений $x_1 \ldots x_p$.

Пусть сначала $n > 1$.

Функция u_1 определяется по теореме IV при $m=1$ из необходимого и достаточного условия, чтобы класс дифференциального выражения:

$$\Omega = t\omega + t_1 du_1$$

был равен $2n$. Если мы обозначим искомую функцию u_1 через f, то из теоремы I (случай b) при $m=1$, которая в этом случае применима, так как ω и du_1 линейно независимы и $2n \geqslant 4$, следует, что необходимое и достаточное условие для функции f состоит в том, чтобы, по крайней мере, один символический определитель степени $2n-2$, где $2n-2 \leqslant p-1$:

$$\left| \begin{array}{c|c} \dfrac{\partial f}{\partial x_r} \ldots \dfrac{\partial f}{\partial x_s} & \\ X_r \ldots X_s & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_s} & n-2 \\ X_r \ldots X_s & \end{array} \right| \quad r \ldots s = 1 \ldots p$$

был отличен от нуля и чтобы все символические определители этого вида степени $2n$, если они могут быть установлены, обращались тождественно в нуль.

Первое условие по теореме V при $m=1$, $u_1 = f$ всегда выполняется в некоторой области $E' \leqslant E$. Что же касается второго условия, то оно при $2n-1=p$ не существует, и функция u_1 остается в этом случае произвольной. Итак, если дифференциальное выражение:

$$\omega \; X_1 \, dx_1 + \cdots X_{2n-1} \, dx_{2n-1}$$

приводится к n-членной простейшей форме, т. е. если

$$\left|\begin{matrix} X_1 \dots X_{2n-1} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1 \dots X_{2n+1} \end{matrix}\right| n-1 \Bigg| \gtrless 0,$$

то одна из функций $u_1 \dots u_n$ произвольна (*).

Пусть $2n-1 < p$. Искомая функция u_1 должна быть по второму условию каким-либо решением (отличным от постоянного) системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x_r} \dots \frac{\partial f}{\partial x_s} \\ X_r \dots X_s \\ \left|\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x_r} \dots \frac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \dots X_s \end{matrix}\right| n-1 \end{matrix}\right| = 0, \; r \dots s = 1 \dots p.$$

Эта система по формуле (e) § 1 при $m=1$, $t \gtrless 0$ равносильна системе:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial(f, u_1 \dots u_n, tU_1 \dots tU_n)}{\partial(tx_r \dots x_s)} = 0, \qquad r \dots s = 1 \dots p,$$

и так как

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_n, tU_1 \dots tU_n)}{\partial(tx_1 \dots x_{2n-1})} \gtrless 0,$$

она заключает только $p-(2n-1)$ независимых уравнений:

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}}, & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} \\ X_1 \dots X_{2n-1}, & X_{2n-1+\varrho} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}}, & \frac{\partial}{\partial x_{2n-1+\varrho}} \\ X_1 \dots X_{2n-1}, & X_{2n-1+\varrho} \end{matrix}\right| n-1 \Bigg| = 0, \; \varrho = 1 \dots p-(2n-1).$$

Они представляют полную систему.

Именно, если обе части каждого из них умножить на

$$\frac{1}{(n-1)!^2} \left|\begin{matrix} X_1 \dots X_{2n-1} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1 \dots X_{2n-1} \end{matrix}\right| n-1 \Bigg|,$$

(*) Если в этом случае положить, что u_1 равно одному из переменных независимых, например, x_1, тогда определение простейшей формы сводится по теореме IV (следствие) к определению простейшей $n-1$-членной формы дифференциального выражения $X_2 dx_2 + \dots + X_{2n-1} dx_{2n-1}$ при постоянном x_1.

то, на основании формул (c_3), (c_4) § 1 при $m=1$ и на основании теоремы о первом миноре косого симметрического определителя четной степени, можно рассматривать их новые левые части, как первые миноры косых симметрических определителей степени $2n+2$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} \\ 0 & 0 & X_1 & \dots & X_{2n-1} & X_{2n-1+\varrho} \\ -\frac{\partial f}{\partial x_1}, & -X_1 & (11) & \dots & (2n-11) & (2n-1+\varrho 1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}}, & -X_{2n-1} & (12n-1) & \dots & (2n-1\ 2n-1) & (2n-1+\varrho\, 2n-1) \\ -\frac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}}, & -X_{2n-1+\varrho} & (12n-1+\varrho) & \dots & (2n-1\ 2n-1+\varrho) & (2n-1+\varrho\ 2n-1+\varrho) \end{vmatrix}$$

$$\varrho = 1 \dots p-(2n-1)$$

относительно элемента $-\frac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}}$, так что она получает вид:

$$a_1 = \begin{vmatrix} 0\ , & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} \\ 0\ , & X_1 & \dots & X_{2n-1} & X_{2n-1+\varrho} \\ -X_1 & (11) & \dots & (2n-1) & (2n-1+\varrho 1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -X_{2n-1} & (12n-1) & \dots & (2n-1\ 2n-1) & (2n-1+\varrho\ 2n-1) \end{vmatrix} = 0, \varrho = 1 \dots p-(2n-1).$$

Система линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} \\ 0 & X_1 & \dots & X_{2n-1} & X_{2n-1+\varrho} \\ -X_1 & t(11) & \dots & t(2n-1\ 1) & t(2n-1+\varrho\ 1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -X_{2n-1}, & t(1\ 2n-1) & \dots & t(2n-1\ 2n-1) & t(2n-1+\varrho\ 2n-1) \end{vmatrix} = 0, \varrho = 1 \dots p-(2n-1)$$

— полная, так как соответствующая ей система Pfaff'а:

$$\omega = X_1\, dx_1 + \dots + X_p\, dx_p = 0,$$
$$-X_1\, dt + t(11)\, dx_1 + \dots + t(p1)\, dx_p = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$-X_{2n-1}\, dt + t(12n-1)\, dx_1 + \dots + t(p\,2n-1)\, dx_p = 0$$

есть сполна интегрируемая система (g_2) § 2 при $m=1$.

Последняя система линейных дифференциальных уравнений имеет вид:

$$A_\varrho \cdot t \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + a_\varrho = 0, \quad \varrho = 1 \dots p-(2n-1),$$

где A_ϱ не зависят от t, и отсюда легко видеть, что и система $a_\varrho = 0$, $\varrho = 1 \ldots p - (2n-1)$ — полная. Итак, система (1) — полная (*). Функция u_1 должна быть каким-либо решением (отличным от постоянного) полной системы (1). Она определена, и дифференциальное выражение ω имеет в некоторой области простейшую форму, заключающую du_1.

Можно показать, что не все определители $2n-2$-й степени:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{i-1}},\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{i+1}} \ldots \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1 \ \ldots \ X_{i-1},\ \ X_{i+1} \ \ldots \ X_{2n-1} \\ \left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_{i-1}},\ \dfrac{\partial}{\partial x_{i+1}} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1 \ \ldots \ X_{i-1},\ \ X_{i+1} \ \ldots \ X_{2n-1} \end{array} \right| n-2 \end{array} \right| \qquad i = 1 \ldots 2n-1$$

в ней тождественно равны нулю. В самом деле, пусть все они в ней тождественно обращаются в нуль. Тогда из формулы (d) § 1 при $m = 2$ следовало бы, что

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_n, tU_2 \ldots tU_n)}{\partial(tx_1 \ldots x_{i+1}, x_{i+1} \ldots x_{2n-1})} = 0,\ i = 1 \ldots 2n-1.$$

Следовательно, не равный нулю определитель:

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_n,\ tU_1 \ldots tU_n)}{\partial(t,\ x_1 \ldots x_{2n-1})}$$

имел бы вид:

$$t^{n-1}\, U_1 \frac{\partial(u_1 \ldots u_n,\ U_2 \ldots U_n)}{\partial(x_1 \ldots x_{2n-1})},$$

поэтому:

$$U_1 \gtreqless 0,\ \frac{\partial(u_1 \ldots u_n,\ U_2 \ldots U_n)}{\partial(x_1 \ldots x_{2n-1})} \gtreqless 0.$$

С другой стороны:

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_n, tU_j,\ tU_2 \ldots tU_n)}{\partial(t, x_1 \ldots x_{2n-1})} = 0,\ j = 2 \ldots n.$$

Поэтому на основании предыдущего неравенства:

$$U_j = 0, \quad j = 2 \ldots n,$$

т. е. простейшая форма дифференциального выражения ω была бы одночленная, что невозможно, так как $n > 1$.

(*) Если в некоторой области один из коэффициентов $U_1 \ldots U_n$, например, $U_n \gtreqless 0$, то из свойства системы (1) иметь в ней $2n-1$ независимых решений $u_1 \ldots u_n \dfrac{U_1}{U_n} \ldots \dfrac{U_{n-1}}{U_n}$ следует снова, что она полная.

Итак, пусть, например:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} \\ X_1 \dots X_{2n-2} \\ \left.\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-2}} \\ X_1 \dots X_{2n-2} \end{matrix}\right| n-2 \end{vmatrix} \geqq 0,$$

т. е. на основании формулы (d) § 1 при $m=2$, $t \geqq 0$

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_n,\ tU_2 \dots tU_n)}{\partial(t,\ x_1 \dots x_{2n-2})} \geqq 0$$

в некоторой области $E_1 \leqslant E$.

Если $n > 2$, функция u_2 определяется, как независимая от u_1, и под условием по теореме IV при $m=2$, чтобы класс дифференциального выражения:

$$\Omega = t\omega + t_1 du_1 + t_2 du_2$$

был равен $2n$. Для этого необходимо и достаточно по теореме I (случай b), которая в данном случае применима, так как ω, du_1, du_2 линейно независимы и $2n \geqslant 6$, чтобы, означая искомую функцию u_2 через f, все символические определители степени $2n-1$:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_r} \dots \dfrac{\partial f}{\partial x_s} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} \dots \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ X_r \dots X_s \\ \left.\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x_r} \dots \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \dots X_s \end{matrix}\right| n-2 \end{vmatrix} \quad r \dots s = 1 \dots p$$

обращались тождественно в нуль, и чтобы, по крайней мере, один определитель степени $2n-3$:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_r} \dots \dfrac{\partial f}{\partial x_s} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} \dots \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ X_r \dots X_s \\ \left.\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x_r} \dots \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \dots X_s \end{matrix}\right| n-3 \end{vmatrix} \quad r \dots s = 1 \dots p$$

был отличен от нуля. Искомая функция u_2 должна быть независимым от u_1 решением системы линейных дифференциальных уравнений.

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_r} \ldots \dfrac{\partial f}{\partial x_s} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} \ldots \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ X_r \ldots X_s \\ \left.\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x_r} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \ldots X_s \end{matrix}\right| n-2 \end{matrix}\right| = 0, \; r \ldots s = 1 \ldots p.$$

Эта система в силу формулы (e) при $m=2$, $t \gtreqless 0$ равносильна системе:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial(f, u_1 \ldots u_n, tU_2 \ldots tU_n)}{\partial(tx_r \ldots x_s)} = 0, \; r \ldots s = 1 \ldots p,$$

и так как

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_n, tU_2 \ldots tU_n)}{\partial(tx_1 \ldots x_{2n-2})} \gtreqless 0,$$

она заключает только $p-(2n-2)$ независимых уравнений:

$$(2) \quad \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-2}}, \; \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-2+\varrho}} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}}, \; \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2+\varrho}} \\ X_1 \ldots X_{2n-2}, \; X_{2n-2+\varrho} \\ \left.\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-2}}, \; \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-2+\varrho}} \\ X_1 \ldots X_{2n-2}, \; M_{2n-2+\varrho} \end{matrix}\right| n-2 \end{matrix}\right| = 0, \; \varrho = 1 \ldots p-(2n-2).$$

Они представляют полную систему. В самом деле, умножим их левые части на

$$\frac{1}{(n-2)!^2} \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} \\ X_1 \ldots X_{2n-n} \\ \left.\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-2}} \\ X_1 \ldots X_{2n-2} \end{matrix}\right| n-2 \end{matrix}\right|.$$

Тогда, на основании формул (c_3) (c_4) § 1 при $m=2$, и на основании теоремы о первом миноре косого симметрического определителя четной степени, можно последние рассматривать, как первые миноры косых симметрических определителей степени $2n+2$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-2}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-2+\varrho}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2+\varrho}} \\ 0 & 0 & 0 & X_1 & \ldots & X_{2n-2} & X_{2n-2+\varrho} \\ -\frac{\partial f}{\partial x_1} & -\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & -X_1 & (11) & \ldots & (2n-2\,1) & (2n-2+\varrho\,1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{\partial f}{\partial x_{2n-2}} & -\frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} & -X_{2n-2} & (1\,2n-2) & \ldots & (2n-2\,2n-2) & (2n-2+\varrho\,2n-2) \\ -\frac{\partial f}{\partial x_{2n-2+\varrho}}, & -\frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2+\varrho}} & -X_{2n-2+\varrho}, & (1\,2n-2+\varrho) & \ldots & (2n-2\,2n-2+\varrho) & (2n-2+\varrho\,2n-2+\varrho) \end{vmatrix}$$

$$\varrho = 1 \ldots p-(2n-2)$$

относительно элемента $-\frac{\partial f}{\partial x_{2n-2+\varrho}}$, так что система (2) принимает вид:

$$\beta\varrho = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-2}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-2+\varrho}} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2+\varrho}} \\ 0 & 0 & X_1 & \ldots & X_{2n-2} & X_{2n-2+\varrho} \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & -X_1 & (11) & \ldots & (2n-2\,1) & (2n-2+\varrho\,1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} & -X_{2n-2} & (1\,2n-2) & \ldots & (2n-2\,2n-2) & (2n-2+\varrho\,2n-2) \end{vmatrix} = 0$$

$$\varrho = 1 \ldots p-(2n-2).$$

Система линейных уравнений:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial t_1} & \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial f}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-2}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-2+\varrho}} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2+\varrho}} \\ 0 & 0 & X_1 & \ldots & X_{2n-2} & X_{2n-2+\varrho} \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & -X_1 & t(11) & \ldots & t(2n-2\,1) & t(2n-2+\varrho\,1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} & -X_{2n-2} & t(1\,2n-2) & \ldots & t(2n-2\,2n-2) & t(2n-2+\varrho\,2n-2) \end{vmatrix} = 0$$

$$\varrho = 1 \ldots p-(2n-2)$$

— полная, так как соответствующая ей система Pfaff'a:

$$\omega = X_1 dx_1 + \cdots + X_p dx_p = 0,$$
$$du_1 = 0,$$
$$-\frac{\partial u_1}{\partial x_1} dt_1 - X_1 dt + t(11)\, dx_1 + \cdots + t(p1)\, dx_p = 0,$$

. . . .

$$-\frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} dt_1 - X_{2n-2}\, dt + t(1\, 2n-2)\, dx_1 + \cdots + t(p2n-2)\, dx_p = 0$$

есть сполна интегрируемая система (g_2) § 2 при $m=2$. Эта последняя система линейных уравнений имеет вид:

$$t\left(A_\varrho \frac{\partial f}{\partial t} + B_\varrho \frac{\partial f}{\partial t_1}\right) + \beta_\varrho = 0,\ \varrho = 1 \ldots p - (2n-2),$$

где A_ϱ, B_ϱ не зависят от t, t_1, откуда, как легко видеть, следует, что и система $\beta_\varrho = 0$, $\varrho = 1 \ldots p - (2n-2)$ полная.

Итак, система (2) — полная (*). Искомая функция u_2 должна быть независимым от u_1 решением полной системы (2). Что касается второго условия, оно в силу теоремы V при $m=2$ выполняется в некоторой области для всякого независимого от u_1 решения этой системы. Таким образом, u_2 должна быть каким-либо независимым от u_1 решением полной системы (2). Функция u_2 определена, и дифференциальное выражение ω имеет в некоторой области простейшую n—членную форму заключающую du_1, du_2.

Можно показать, что не все определители степени $2n-3$:

$$\left|\begin{array}{c} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{i-1}},\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{i+1}} \cdots \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial u_2}{\partial x_{i-1}},\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_{i+1}} \cdots \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} \\ X_1 \ldots X_{i-1},\ X_{i+1} \ldots X_{2n-2} \\ \left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial}{\partial x_{i-1}},\ \dfrac{\partial}{\partial x_{i+1}} \cdots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-2}} \\ X_1 \ldots X_{i-1},\ X_{i+1} \ldots X_{2n-2} \end{array}\right| n-3 \end{array}\right| \quad i = 1 \ldots 2n-2.$$

равны в ней тожественно нулю. Если бы это было так, то мы имели-бы на основании формулы (d) § 1 при $m=3$, что

$$\frac{\partial (u_1 \ldots u_n,\ tU_3 \ldots tU_n)}{\partial (tx_1 \ldots x_{i-1}\, x_{i+1} \ldots x_{2n-2})} = 0, \quad i = 1 \ldots 2n-2$$

(*) Если в некоторой области один из коэффициентов $U_2 \ldots U_n$, например, $U_n \gtrless 0$, то из того обстоятельства, что система (2) имеет $2n-2$ независимых решений $n_1 \ldots n_n \dfrac{U_2}{U_n} \ldots \dfrac{U_{n-1}}{U_n}$, также следует, что она полная.

и неравный нулю определитель:

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_n,\ tU_2 \dots tU_n)}{\partial(tx_1 \dots x_{2n-2})},$$

имел бы вид:

$$t^{n-3} U_2 \frac{\partial(u_1 \dots u_n,\ U_3 \dots U_n)}{\partial(x_1 \dots x_{2n-2})},$$

откуда:

$$U_2 \gtreqless 0, \quad \frac{\partial(u_1 \dots u_n,\ U_3 \dots U_n)}{\partial(x_1 \dots x_{2n-2})} \gtreqless 0.$$

Но, с другой стороны:

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_n\, tU_j,\ tU_3 \dots tU_n)}{\partial(t,\ x_1 \dots x_{2n-2})} = 0, \quad j = 3 \dots n.$$

Следовательно, на том же основании:

$$t^{n-3} U_j \frac{\partial(u_1 \dots u_n,\ U_3 \dots U_n)}{\partial(x_1 \dots x_{2n-2})} = 0, \quad j = 3 \dots n,$$

следовательно:

$$U_j = 0, \quad j = 3 \dots n,$$

т. е. простейшая форма дифференциального выражения ω была бы двучленной, что невозможно, так как $n > 2$.

Пусть, например:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-3}} & \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_{2n-3}} & \\ X_1 & \dots & X_{2n-3} & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{2n-3}} & n-3 \\ X_1 & \dots & X_{2n-3} & \end{array} \right| \gtreqless 0,$$

т. е. на основании формулы (d) § 1 при $m = 3$, $t \gtreqless 0$, пусть

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_n,\ tU_3 \dots tU_n)}{\partial(tx_1 \dots x_{2n-3})} \gtreqless 0,$$

в некоторой области $E_2 \leqslant E_1$.

Если $n > 3$, то функция u_3 определяется по теореме IV при $m = 3$, как независимая от u_1, u_2, под условием, чтобы класс дифференциального выражения:

$$\Omega = t\omega + t_1 du_1 + t_2 du_2 + t_3 du_3$$

был равен $2n$ и т. д.

Вообще, если $m-1$ функций $u_1, \ldots, u_{m-1}$ уже определены, так что дифференциальное выражение имеет в некоторой области простейшую n-членную форму, заключающую $du_1, \ldots, du_{m-1}$ и если в той же области $E_{m-1} \leqslant E_{m-2}$:

$$\left|\begin{array}{ccc} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_2}{\partial x_{2n-m}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} \\ X_1 & \ldots & X_{2n-m} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_{2n-m}} \\ X_1 & \ldots & X_{2n-m} \end{array}\right| n-m \quad \gtreqless 0,$$

т. е. на основании формулы (d) § 1 при $t \gtreqless 0$:

$$\frac{\partial\left(u_1 \ldots u_n t U_m \ldots t U_n\right)}{\partial\left(t x_1 \ldots x_{2n-m}\right)} \gtreqless 0,$$

то при $n > m$ функция u_m определяется по теореме IV, как независимая от $u_1 \ldots u_{m-1}$, под условием, чтобы класс дифференциального выражения:

$$\Omega = t\omega + t_1 du_1 + \cdots + t_{m-1} du_{m-1} + t_m du_m$$

был равен $2n$. По теореме I (случай b), которая в этом случае применима потому, что ω, $du_1, \ldots, du_m$ линейно независимы и $2n \geqslant 2(m+1)$, следует, если обозначить u_m через f, что для этого необходимо и достаточно, чтобы все символические определители степени $2n-m+1$:

$$\left|\begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x_r} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_s} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & \ldots & \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} \\ X_r & \ldots & X_s \\ \frac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r & \ldots & X_s \end{array}\right| n-m \qquad r \ldots s = 1 \ldots p,$$

обращались тождественно в нуль, и чтобы, по крайней мере, один символический определитель степени $2n-m-1$:

$$\left|\begin{array}{ccc|l} \dfrac{\partial f}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_s} & \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} & \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \\ \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} & \\ X_r & \ldots & X_s & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} & \\ X_r & \ldots & X_s & n-m-1 \end{array}\right| \quad r \ldots s = 1 \ldots p,$$

был отличен от нуля. Искомая функция u_m должна быть независимым от $u_1 \ldots u_{m-1}$ решением системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\left|\begin{array}{ccc|l} \dfrac{\partial f}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_s} & \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} & \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \\ \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x} & \ldots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_s} & \\ X_r & \ldots & X_s & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} & \\ X_r & \ldots & X_s & n-m \end{array}\right| = 0, \quad r \ldots s = 1 \ldots p.$$

По формуле (e) § 1 при $t \gtrless 0$ эта система равносильна системе:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial\,(f,\ u_1 \ldots,\ u_n t U_m \ldots,\ t U_n)}{\partial\,(t x_r \ldots x_s)} = 0,$$

$$r \ldots s = 1 \ldots p$$

и так как

$$\frac{\partial\,(u_1 \ldots u_n,\ t U_m \ldots t U_n)}{\partial\,(t x_1 \ldots x_{2n-m})} \gtrless 0,$$

она заключает только $p-(2n-m)$ независимых уравнений:

$$
(m)\quad \left|\begin{array}{ccc}
\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\
\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots\,\dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\
\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & \ldots\,\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\
X_1 & \ldots\, X_{2n-m} & X_{2n-m+\varrho} \\
\dfrac{\partial}{\partial x_1} & \ldots\,\dfrac{\partial}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\
X_1 & \ldots\, X_{2n-m} & X_{2n-m+\varrho}
\end{array}\right|
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ n-m \\ \\ \end{array}
= 0.
$$

Они составляют полную систему. В самом деле, если умножить их левые части на

$$
\frac{1}{(n-m)!^2}\left|\begin{array}{cc}
\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots\,\dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & \ldots\,\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} \\
X_1 & \ldots\, X_{2n-m} \\
\dfrac{\partial}{\partial x_1} & \ldots\,\dfrac{\partial}{\partial x_{2n-m}} \\
X_1 & \ldots\, X_{2n-m}
\end{array}\right|
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ n-m \\ \\ \end{array},
$$

на основании формул (c_3), (c_4) § 1 и на основании теоремы о первом миноре косого симметрического определителя четной степени, можно последние рассматривать, как первые миноры косых симметрических определителей степени $2n+2$:

$$
\left|\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2-nm+\varrho}} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & X_1 & X_2 & \ldots & X_{2n-m} & X_{2n-m+\varrho} \\
-\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & -X_1 & (11) & \ldots & (2n-m1) & (2n-m+\varrho 1) \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
-\dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m}} & -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} & \ldots & -\dfrac{\partial n_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} & -X_{2n-m} & (12n-m) & \ldots & (2n-m2n-m) & (2n-m+\varrho 2n-m) \\
-\dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & \ldots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & -X_{2n-m+\varrho} & (12n-m+\varrho) & \ldots & (2n-m2n-m+\varrho) & (2n-m+\varrho 2n-m+\varrho)
\end{array}\right|
$$

относительно элемента $-\dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m+\varrho}}$. Тогда система (m) получает вид:

$$
j_\varrho = \begin{vmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \dots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} \dots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -X_1 \dots & X_{2n-m} & X_{2n-m+\varrho} \\
-\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & -X_1 & (11) \dots & (2n-m1) & (2n-m+\varrho 1) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-\dfrac{\partial x_1}{\partial x_{2n-m}} & -\dfrac{\partial x_2}{\partial x_{2n-m}} & \dots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} & -X_{2n-m} & (12n-m) \dots & (2n-m2n-m) & (2n-m+\varrho 2n-m)
\end{vmatrix} = 0.
$$

$$\varrho = 1 \dots p - (2n-m).$$

Система линейных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial f}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial t_{m-1}} & \dfrac{\partial f}{\partial t} & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} & \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\
0 & \dots & 0 & 0 & X_1 & & X_{2n-m} & X_{2n-m+\varrho} \\
\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & -X_1 & t(11) & \dots & t(2n-m1) & t(2n-m+\varrho 1) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-\dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} & \dots & -\dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} & -X_{2n-m} & t(12n-m) & \dots & t(2n-m2n-m) & t(2n-m+\varrho 2n-m)
\end{vmatrix} = 0
$$

$$\varrho = 1 \dots p - (2n-m)$$

— полная, так как соответствующая ей система Pfaff'а:

$$\omega = X_1 dx_1 = \dots + X_p dx_p = 0,$$

$$du_1 = 0 \dots du_{m-1} = 0,$$

$$-\frac{\partial u_1}{\partial x_1} dt_1 - \dots - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} dt_{m-1} - X_1 dt + t(11)\, dx_1 + \dots$$

$$\dots + t(p1)\, dx_p = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} dt_1 - \dots - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} dt_{m-1} - X_{2n-m} dt + t(12n-m)\, dx_1 + \dots$$

$$\dots + t(p2n-m)\, dx_p = 0,$$

есть сполна интегрируемая система (g_2) § 2.

Последняя система линейных дифференциальных уравнений имеет вид:

$$t\left(A_\varrho \frac{\partial f}{\partial t} + B_\varrho \frac{\partial f}{\partial t_1} + \cdots + C_\varrho \frac{\partial f}{\partial t_{m-1}}\right) + j_\varrho = 0, \quad \varrho = 1 \ldots p - (2n - m)$$

где A_ϱ, $B_\varrho \ldots C_\varrho$ не зависят от $tt_1 \ldots t_{m-1}$, откуда легко видеть, что и система $j_\varrho = 0$, $\varrho = 1 \ldots p - (2n - m)$ также полная. Итак, система (m) — полная (*). Искомая функция u_m должна быть независимым от $u_1 \ldots u_{m-1}$ решением полной системы (m). Что касается второго условия, то оно по теореме V выполняется в некоторой области для всякого решения системы (m), независимого от $u_1 \ldots u_{m-1}$. Функция u_m должна быть каким-либо независимым от $u_1 \ldots u_{m-1}$ решением полной системы (m). Она найдена, и дифференциальное выражение ω имеет в некоторой области n-членную простейшую форму, заключающую $du_1 \ldots du_m$.

Можно показать, что не все определители степени $2n - m - 1$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial u_1}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{i+1}} \ldots \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial u_m}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial u_m}{\partial x_{i+1}} \ldots \frac{\partial u_m}{\partial x_{2n-m}} \\ X_1 \ldots X_{i-1} & X_{i+1} \ldots X_{2n-m} \\ \left.\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} \ldots \frac{\partial}{\partial x_{2n-m}} \\ X_1 \ldots X_{i-1} & X_{i+1} \ldots X_{2n-m} \end{matrix}\right| n - m - 1 & \end{vmatrix} \quad i = 1 \ldots 2n - m$$

обращаются в ней тождественно в нуль. Иначе, по формуле (d) § 1, в которой вместо m подставлено $m + 1$, следовало бы, что

$$\frac{\partial (u_1 \ldots u_n \, tU_{m+1} \ldots tU_n)}{\partial (t, \, x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_{2n-m})} = 0, \quad i = 1 \ldots 2n - m,$$

и, поэтому, отличный от нуля определитель:

$$\frac{\partial (u_1 \ldots u_n, \; tU_m \ldots tU_n)}{\partial (tx_1 \ldots x_{2n-m})}$$

имел бы вид:

$$t^{n-m} U_m \frac{\partial (u_1 \ldots u_n U_{m+1} \ldots U_n)}{\partial (x_1 \ldots x_{2n-m})},$$

откуда:

$$U_m \gtreqless 0, \qquad \frac{\partial (u_1 \ldots u_n U_{m+1} \ldots U_n)}{\partial (x_1 \ldots x_{2n-m})} \gtreqless 0.$$

(*) Если в некоторой области один из коэффициентов $U_m \ldots U_n$, например, $U_n \gtreqless 0$, то из того обстоятельства, что система (m) имеет $2n - m$ независимых решений $u_1 \ldots u_n \frac{U_m}{U_n} \ldots \frac{U_{n-1}}{U_n}$, также следовало бы, что система (m) полная.

Но, с другой стороны:

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_n.\ tU_j.\ tU_{m+1} \dots tU_n)}{\partial(tx_1 \dots x_{2n-m})} = 0 \quad j = m+1 \dots n,$$

откуда, на том же основании, следовало бы, что

$$t^{n-m} U_j \frac{\partial(u_1 \dots u_n U_{m+1} \dots U_n)}{\partial(x_1 \dots x_{2n-m})} = 0 \quad j = m+1 \dots n,$$

и потому

$$U_j = 0 \quad j = m+1 \dots n,$$

т. е. простейшая форма дифференциального выражения ω была бы m-членной, что невозможно, так как $n > m$. Наше утверждение доказано. Пусть, например:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m-1}} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial x_{2n-m-1}} & \\ X_1 & \dots & X_{2n-m-1} & \\ \hline \frac{\partial}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{2n-m-1}} & n-m-1 \\ X_1 & \dots & X_{2n-m-1} & \end{array} \right| \gtreqless 0,$$

т. е. на основании формулы (d) § 1 с заменой m на $m-1$ при $t \gtreqless 0$ пусть

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_n\ tU_{m+1} \dots tU_n)}{\partial(tx_1 \dots x_{2n-m-1})} \gtreqless 0$$

в некоторой области $E_m \leqslant E_{m-1}$.

Полагая в предыдущем изложении $m = 1, 2 \dots n-1$, найдем функции $u_1 \dots u_{n-1}$ простейшей формы:

$$\omega = \sum_{1}^{n}{}_{i}\, U_i\, du_i.$$

Пусть, наконец, $m = n \geqslant 1$.

Для определения функции $u_n\ (n \geqslant 1)$ должно поступать иначе, потому что теорема I (случай b) уже неприложима в виду того, что дифференциальные выражения $\omega, du_1 \dots du_n$ линейно зависимы. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы du_n входил с $du_1 \dots du_{n-1}$ в одну и ту же простейшую n-членную форму, состоит, очевидно, в том, чтобы $\omega, du_1 \dots du_n$ были линейно зависимы. Следовательно, если обозначить u_n через f, необходимое и достаточное условие для функции f есть, чтобы она была независимым от $u_1 \dots u_{n-1}$ решением системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_s} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_s} \\ X_r & \ldots & X_s \end{vmatrix} = 0, \quad r \ldots s = 1 \ldots p,$$

которая в силу неравенства:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} \\ X_1 & \ldots & X_n \end{vmatrix} \gtrless 0$$

заключает только $p-n$ независимых уравнений:

$$(n) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f}{\partial x_{n+\varrho}} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{n+\varrho}} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} & \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n+\varrho}} \\ X_1 & \ldots & X_n & X_{n+\varrho} \end{vmatrix} = 0, \quad \varrho = 1 \ldots p-n.$$

Так как дифференциальное выражение ω имеет в области E_{n-1} простейшую n-членную форму, в которую входят $du_1 \ldots du_n$, система (n) имеет n независимых решений и, следовательно, есть система полная. Единственное независимое от $u_1 \ldots u_{n-1}$ решение ее есть искомая функция u_n. Итак, все функции u_i $i = 1 \ldots n$ определены.

Очевидно, что в некоторой области $E_n \leqslant E_{n-1}$

$$\frac{\partial\,(u_1 \ldots u_n)}{\partial\,(x_1 \ldots x_n)} \gtrless 0.$$

Механический процесс определения функций u_i $i = 1 \ldots n$ таков: если выполнены необходимые и достаточные условия приведения дифференциального выражения ω к n-членной простейшей форме, т. е. если, по крайней мере, один символический определитель степени $2n-1$, где $1 \leqslant n \leqslant \dfrac{p+1}{2}$,

$$\left|\begin{array}{ccc|c} X_r & \ldots & X_s & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} & n-1 \\ X_r & \ldots & X_s & \end{array}\right| \quad r \ldots s = 1 \ldots p$$

отличен от нуля в некоторой области E и если все символические определители степени $2n+1$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} X_r & \ldots & X_s & \\ \frac{\partial}{\partial x_r} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_s} & n \\ X_r & \ldots & X_s & \end{array}\right|,$$

если таковые могут быть установлены, обращаются в ней тождественно в нуль, и если, например:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} X_1 & \ldots & X_{2n-1} & \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} & n-1 \\ X_1 & \ldots & X_{2n-1} & \end{array}\right| \gtreqless 0,$$

то если функции $u_1 \ldots u_{m-1}$ $(0 \leqslant m-1 < n)$ уже определены и если в некоторой области $E_{m-1} \leqslant E$, определитель, например:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} & \\ . & . & . & \\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} & \\ X_1 & \ldots & X_{2n-m} & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_{2n-m}} & n-m \\ X_1 & \ldots & X_{2n-m} & \end{array}\right| \gtreqless 0,$$

функция u_m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ должна быть каким-либо независимым от $u_1 \ldots u_{m-1}$ решением полной системы $p-(2n-m)$ линейных дифференциальных уравнений:

$$\left|\begin{array}{cccc|c} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-m}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & \\ . & . & . & . & \\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} & \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & \\ X_1 & \ldots & X_{2n-m} & X_{2n-m+\varrho} & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_{2n-m}} & \frac{\partial}{\partial x_{2n-m+\varrho}} & n-m \\ X_1 & \ldots & X_{2n-m} & X_{2n-m+\varrho} & \end{array}\right| = 0$$

$$\varrho = 1 \ldots p\ .\ (2n-m).$$

Если функция $u_m\,(m<n)$ определена, то не все определители степени $2n-m-1$:

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial u_1}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{i+1}} \ldots \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} & \\ \ldots & \ldots & \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial u_m}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial u_m}{\partial x_{i+1}} \ldots \frac{\partial u_m}{\partial x_{2n-m}} & \\ X_1 \ldots X_{i-1} & X_{i+1} \ldots X_{2n-m} & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} \ldots \frac{\partial}{\partial x_{2n-m}} & n-m-1 \\ X_1 \ldots X_{i-1} & X_{i+1} \ldots X_{2n-m} & \end{matrix}\right| \quad i=1\ldots 2n-m$$

в области E_{m-1} тождественно обращаются в нуль.

Если $2n-1=p$, функция u_1 произвольна.

2. Перейдем теперь к определению коэффициентов $U_i\;i=1\ldots n$. Из уравнения:

$$\omega=\sum_1^p{}^k X_k dx_k=\sum_1^n{}^i U_i du_i$$

следует, что

$$X_k=\sum_1^n{}^i U_i\frac{\partial u_i}{\partial x_k},\; k=1\ldots p.$$

Вследствие независимости функций $u_i,\; i=1\ldots n\;\left(\frac{\partial(u_1\ldots u_n)}{\partial(x_1\ldots x_n)}\gtrless 0\right.$ в области $\left.E_n\right)$ и вследствие тождеств:

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_r} \ldots \frac{\partial u_1}{\partial x_s} \\ \ldots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_r} \ldots \frac{\partial u_n}{\partial x_s} \\ X_r \ldots X_s \end{matrix}\right|=0,\; r\ldots s=1\ldots p$$

эта система p линейных неоднородных уравнений относительно n неизвестных $U_i,\; i=1\ldots n$ заключает только n независимых уравнений, которые и определяют их, и простейшая форма дифференциального выражения ω определена.

Мы дали, таким образом, два метода определения простейшей формы. Оба они не зависят от четности класса дифференциального выражения ω. Второй метод имеет перед первым не только то преимущество, что дифференциальные уравнения, определяющие функции $u_i,\; i=1\ldots n$ (системы (1), (2) ... (m)), разрешены относительно частных производных, но также и то, что в нем мы не пользуемся дифференциальными уравнениями (A) § 1, выводимыми в теории канонических форм, и что он, таким образом, менее зависит от последней; для его обоснования нужны из этой теории только необходимые и достаточные условия приводимости данного дифференциального выражения ω к канонической четной, или нечетной форме. Если эти условия выводить данным G. Darboux (*) способом, предлагаемый метод представляет наибольшую простоту.

Оба эти метода, как сказано, не зависят от четности класса дифференциального выражения ω. Можно, однако, рассматривать отдельно случай четного и нечетного класса.

3. Каноническая n-членная форма дифференциального выражения ω — четная, или нечетная, смотря по тому, одна ли и та же $2n$ наивысшая степень отличных от нуля главных миноров косих симметрических определителей Δ, Δ_1 (§ 2), или она равна соответственно $2n-2$, $2n$. Можно вместо главных миноров рассматривать их квадратные корни. Квадратные корни косых симметрических определителей степени $2q\ (\leqslant p+1)$:

$$\begin{vmatrix} (rr)\dots(sr) \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ (rs)\dots(ss) \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & X_\varrho \dots X_\sigma \\ -X_\varrho & (\varrho\varrho)\dots(\varrho\sigma) \\ \cdot\ \ \cdot & \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ -X_\sigma & (\varrho\sigma)\dots(\sigma\sigma) \end{vmatrix} \quad r\dots\sigma=1\dots p$$

равны по формулам (b_1), (c_2) § 1 соответственно:

$$\pm\frac{1}{q!}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_r}\dots\frac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r\ \dots\ X_s \end{vmatrix}_q \quad \pm\frac{1}{(q-1)!}\begin{vmatrix} X_\varrho\ \dots\ X_\sigma \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\varrho}\dots\frac{\partial}{\partial x_\sigma} \\ X_\varrho\ \dots\ X_\sigma \end{vmatrix}_{q-1} \end{vmatrix}.$$

Получается таким образом

Теорема VI. Класс дифференциального выражения:

$$\omega=\sum_1^p{}^k X_k dx_k$$

равен $2n$, или $2n-1$, смотря по тому, будут ли наивысшие степени отличных от нуля символических определителей:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_r}\dots\frac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r\ \dots\ X_s \end{vmatrix}_q \quad \begin{vmatrix} X_\varrho\ \dots\ X_\sigma \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\varrho}\dots\frac{\partial}{\partial x_\sigma} \\ X_\varrho\ \dots\ X_\sigma \end{vmatrix}_k \end{vmatrix} \quad r\dots\sigma=1\dots p$$

соответственно $2n$, $2n-1$, или $2n-2$, $2n-1$.

Определение четной канонической формы тождественно с изложенным выше определением простейшей формы, так как они тожде-

(*) Bull. d. sc. math. et astr., 2-me Série, 1882.

ственны. Поэтому рассмотрим отдельно только второй случай. Пусть, например,

$$\left| \begin{array}{c|c} \begin{matrix} X_1 \dots X_{2n-1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1 \dots X_{2n-1} \end{matrix} & n-1 \end{array} \right| \gtreqless 0, \quad \left| \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-2}} \\ X_1 \dots X_{2n-2} \end{matrix} & n-1 \end{array} \right| \gtreqless 0$$

в некоторой области E, и пусть определители этого вида, но высшей степени обращаются в ней тождественно в нуль. Тогда дифференциальное выражение ω приводится к нечетной n-членной канонической форме

$$\omega = du_1 + \sum_2^n {}_j U_j du_j .$$

Займемся определением функции u_1. Так как дифференциальное выражение $\omega - du_1$ приводится к $n-1$-членной простейшей форме

$$\omega - du_1 = \sum_2^n {}_j U_j du_j ,$$

то по теореме II, если в ней вместо ω и n подставить соответственно $\omega - du_1$ и $n-1$, необходимое и достаточное условие для функции u_1 состоит в том, чтобы она удовлетворяла системе линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$(1') \quad \left| \begin{array}{c|c} \begin{matrix} X_r - \dfrac{\partial f}{\partial x_r} \dots X_s - \dfrac{\partial f}{\partial x_s} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} \quad \dots \quad \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \quad \dots \quad X_s \end{matrix} & n-1 \end{array} \right| = 0, \; r \dots s = 1 \dots p$$

и чтобы по крайней мере один символический определитель степени $2n-3$

$$\left| \begin{array}{c|c} \begin{matrix} X_r - \dfrac{\partial f}{\partial x_r} \dots X_s - \dfrac{\partial f}{\partial x_s} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} \quad \dots \quad \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \quad \dots \quad X_s \end{matrix} & n-2 \end{array} \right| r \dots s = 1 \dots p,$$

если $n > 1$, для $f = u_1$ был отличен от нуля. Последнее условие всегда соблюдается в некоторой области $E' \leqslant E$, так как иначе по теореме II дифференциальное выражение $\omega - du_1$ приводилось-бы к наиболее $n-2$-членной, а, следовательно, дифференциальное выражение ω к наиболее $n-1$-членной простейшей форме.

Итак, u_1 должна быть каким-либо решением системы (1'). Если $2n-1=p$, эта система заключает только одно уравнение:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} X_1-\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & X_{2n-1}-\dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}} & n-1 \\ X_1 & \ldots & X_{2n-1} & \end{array}\right|=0$$

решение которого $f=\varphi_1+\varphi(\varphi_2\ldots\varphi_{2n-1})$, где $\varphi_1\ldots\varphi_{2n-1}$ некоторые независимые функции от $x_1\ldots x_p$, а φ — произвольная функция, и дает искомую функцию.

Пусть теперь $2n-1<p$.

Дифференциальное выражение $\omega-df$ приводится к n-членной простейшей форме

$$\omega-df=d(u_1-f)+\sum_2^n {}_j U_j du_j.$$

Поэтому, из формулы (d_1) § 1 следует, если в ней вместо ω и u_1 подставить $\omega-df$ и u_1-f, что система (1') тождественна с системой

$$\frac{\partial(u_1-f,\ u_2\ldots u_n,\ U_2\ldots U_n)}{\partial(x_r\ldots x_s)}=0,\ r\ldots s=1\ldots p.$$

Так как, далее,

$$\left|\begin{array}{ccc|c} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-2}} & \\ X_1 & \ldots & X_{2n-2} & n-1 \end{array}\right|\gtreqless 0,$$

или

$$\left|\begin{array}{ccc|c} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-2}} & \\ X_1-\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & X_{2n-2}-\dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-2}} & n-1 \end{array}\right|\gtreqless 0,$$

то из формулы (b_2) § 1, если в ней вместо ω и n подставить соответственно $\omega-du_1$ и $n-1$, следует, что

$$\frac{\partial(u_2\ldots u_n,\ U_2\ldots U_n)}{\partial(x_1\ldots x_{2n-2})}\gtreqless 0.$$

Поэтому, система (1') заключает только $p-(2n-2)>1$ независимых уравнений

$$(1'')\quad \left|\begin{array}{cccc|c} X_1-\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & X_{2n-2}-\dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-2}}, & X_{2n-2+\varrho}-\dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-2+\varrho}} & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-2}} & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-2+\varrho}} & n-1 \\ X_1 & \ldots & X_{2n-2} & X_{2n-2+\varrho} & \end{array}\right|\gtreqless 0,$$

$$\varrho=1\ldots p-(2n-2).$$

С другой стороны из вышеизложенного второго метода определения простейшей формы следует, что искомая функция u_1 должна также удовлетворять полной системе $p-(2n-1)$ линейных однородных дифференциальных уравнений

$$(1)\quad \left|\begin{array}{ccc|c} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1}}, & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} & \\ X_1\ldots & X_{2n-1}, & X_{2n-1+\varrho} & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}}, & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1+\varrho}} & n-1 \\ X_1\ldots & X_{2n-1}, & X_{2n-1+\varrho} & \end{array}\right| = 0, \quad \varrho = 1\ldots p-(2n-1),$$

которая по формуле (e_1) § 1 тождественна с системой

$$\frac{\partial(f,\ u_1\ldots u_n,\ U_2\ldots U_n)}{\partial(x_1\ldots x_{2n-1},\ x_{2n-1+\varrho})} = 0, \quad \varrho = 1\ldots p-(2n-1).$$

Можно показать, что система $(1'')$ равносильна системе

$$\left|\begin{array}{ccc|c} X_1-\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & X_{2n-1}-\dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}} & n-1 \\ X_1 & \ldots & X_{2n-1} & \end{array}\right| = 0,$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1}}, & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} & \\ X_1\ldots & X_{2n-1}, & X_{2n-1+\varrho} & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}}, & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-2+\varrho}} & n-1 \\ X_1\ldots & X_{2n-1}, & X_{2n-1+\varrho} & \end{array}\right| = 0 \quad (1'''),$$

$$\varrho = 1\ldots p-(2n-1).$$

В самом деле системы $(1'')$, $(1''')$ могут быть представлены в форме соответственно

$$(\beta)\ \frac{\partial(u_1-f,\ u_2\ldots u_n,\ U_2\ldots U_n)}{\partial(x_1\ldots x_{2n-2},\ x_{2n-2+\varrho})} = 0, \quad \varrho = 1\ldots p-(2n-2)$$

и

$$(J)\ \frac{\partial(u_1-f,\ u_2\ldots u_n,\ U_2\ldots U_n)}{\partial(x_1\ldots x_{2n-1})} = 0, \quad \frac{\partial(f,\ u_1\ldots u_n,\ U_2\ldots U_n)}{\partial(x_1\ldots x_{2n-1},\ x_{2n-1+\varrho})} = 0$$

$$\varrho = 1\ldots p-(2n-1).$$

Дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial(f,\ u_1 \dots u_n,\ U_2 \dots U_n)}{\partial(x_1 \dots x_{2n-1},\ x_{2n-1+\varrho})} = 0,$$

или

$$\frac{\partial(u_1 - f_1,\ u_1 \dots u_n,\ U_2 \dots U_n)}{\partial(x_1 \dots x_{2n-1},\ x_{2n-1+\varrho})} = 0,$$

$$\varrho = 1 \dots p - (2n-1),$$

равносильным уравнениям

$$\frac{\partial(u_1 - f,\ u_1 \dots u_n,\ U_2 \dots U_n)}{\partial(x_1 \dots x_{2n-1},\ x_{2n-1+\varrho})} \cdot \frac{\partial(u_2 \dots u_n,\ U_2 \dots U_n)}{\partial(x_1 \dots x_{2n-2})} = 0$$

$$\varrho = 1 \dots p - (2n-1),$$

так как второй множитель не равен нулю.

По теореме о минорах производного определителя эти последние уравнения можно представить в виде

$$\frac{\partial(u_1 - f,\ u_1 \dots u_n,\ \varphi_2 \dots \varphi_n)}{\partial(x_1 \dots x_{2n-1})} \cdot \frac{\partial(u_1 \dots u_n,\ U_2 \dots U_n)}{\partial(x_1 \dots x_{2n-2},\ x_{2n-1+\varrho})} -$$

$$- \frac{\partial(u_1 - f,\ u_2 \dots u_n,\ U_2 \dots U_n)}{\partial(x_1 \dots x_{2n-2},\ x_{2n-1+\varrho})} \cdot \frac{\partial(u_1 \dots u_n,\ U_2 \dots U_n)}{\partial(x_1 \dots x_{2n-1})} = 0$$

$$\varrho - 1 \dots p - (2n-1),$$

что и доказывает утверждение. Функция u_1 должна быть таким образом каким либо решением системы $(1''')$. Ее решение находится следующим образом: пусть $v_1 \dots v_{2n-1}$ будут все $2n-1$ независимые решения полной системы $p-(2n-1)$ линейных однородных дифференциальных уравнений

$$(1)\quad \left|\begin{array}{ccc|c} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1}}, & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} & & \\ X_1 \dots X_{2n-1}, & X_{2n-1+\varrho} & & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}}, & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1+\varrho}} & n-1 & \\ X_1 \dots X_{2n-1}, & X_{2n-1+\varrho} & & \end{array}\right| = 0,\ \varrho = 1 \dots p - (2n-1).$$

Введем их, как новые переменные независимые, в систему $(1''')$ вместо $x_1 \dots x_{2n-1}$. Тогда система $(1''')$ примет вид

$$V_1 \frac{\partial f}{\partial v_1} + \cdots + V_{2n-1} \frac{\partial f}{\partial v_{2n-1}} + V = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1+\varrho}} = 0,\ \varrho = 1 \dots p - (2n-1)$$

Можно показать, что $V_1 \ldots V_{2n-1}$, V не зависят от $x_{2n-1+\varrho}$, $\varrho = 1 \ldots p-(2n-1)$. В самом деле, первое дифференциальное уравнение системы $(1''')$

$$\left| \begin{matrix} X_1 - \frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots X_{2n-1} - \frac{\partial f}{\partial x_{2n-1}} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \ldots \quad \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1 \quad \ldots \quad X_{2n-1} \end{matrix} \right| n-1 \right| = 0$$

тождественно с уравнением

$$\frac{\partial (u_1 - f_1,\ u_2 \ldots u_n,\ U_2 \ldots U_n)}{\partial (x_1 \ldots x_{2n-1})} = 0$$

и получает после указанного преобразования вид

$$\frac{\partial (u_1 - f,\ u_2 \ldots u_n,\ U_2 \ldots U_n)}{(\partial (v_1 \ldots v_{2n-1})} \cdot \frac{\partial (v_1 \ldots v_{2n-1})}{\partial (x_1 \ldots x_{2n-1})} = 0,$$

или вид

$$\frac{\partial (u_1 - f,\ u_2 \ldots u_n,\ U_2 \ldots U_n)}{\partial (v_1 \ldots v_{2n-1})} = 0.$$

Но так как система (1) тождественна с системой

$$\frac{\partial (f\ u_1 \ldots u_n,\ U_2 \ldots U_n)}{\partial (x_1 \ldots x_{2n-1},\ x_{2n-1+\varrho})} = 0,\ \varrho = 1 \ldots p-(2n-1),$$

то $v_1 \ldots v_{2n-1}$ суть независимые функции от $u_1 \ldots u_n$, $U_2 \ldots U_n$, и обратно $u_1 \ldots u_n$, $U_2 \ldots U_n$ суть функции $v_1 \ldots v_{2n-1}$ только.

Поэтому, дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial (u_1 - f,\ u_2 \ldots u_n,\ U_2 \ldots U_n}{\partial (v_1 \ldots v_{2n-1})} = 0.$$

или уравнение

$$V_1 \frac{\partial f}{\partial v_1} + \cdots + V_{2n-1} \frac{\partial f}{\partial v_{2n-1}} + V = 0,$$

не зависит от $x_{2n-1+\varrho}$, $\varrho = 1 \ldots p-(2n-1)$.

Решение этого уравнения

$$f = \varphi_1 + \varphi (\varphi_2 \ldots \varphi_{2n-1}),$$

где $\varphi_1 \ldots \varphi_{2n-1}$ — определенные независимые функции $v_1 \ldots v_{2n-1}$, а φ — произвольная функция, преобразованная к начальным независимым переменным $x_1 \ldots x_p$, дает искомую функцию u_1.

Остальные функции u_j; U_j, $j = 2 \ldots n$ определяются вышеизложенным методом, если вместо ω и n положить соответственно $\omega - du_1$ и $n-1$.

Таким образом, функция u_1 должна во всех случаях удовлетворять и дифференциальному уравнению

$$\begin{vmatrix} X_1 - \dfrac{\partial x}{\partial x_1} \ldots X_{2n-1} - \dfrac{\partial x}{\partial x_{2n-1}} \\ \begin{array}{ccc|c} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}} & n-1 \\ X_1 & \ldots & X_{2n-1} & \end{array} \end{vmatrix} = 0.$$

Между тем функция u_1 простейшей формы

$$\omega = \sum_1^n {}^i U_i du_i,$$

того же дифференциального выражения в случае $2n-1=p$ произвольна, в случае $2n-1<p$ должна удовлетворять только системе (1), от которой вышеприведенное неоднородное уравнение независимо. Отсюда следует, что каноническая нечетная форма дифференциального выражения ω нечетного класса, есть частичный случай вообще, его простейшей формы, когда переменные u_i, $i=1\ldots n$ определены так, что один из коэффициентов U_i, $i=1\ldots n$ равен единице.

§ 4

Теперь перейдем к интегрированию данного дифференциального уравнения Pfaff'a

$$\omega = \sum_1^p {}^k X_k \, dx_k = 0. \qquad \text{(I)}$$

Мы приводим его левую часть ω к простейшей форме. Пусть она будет n — членной

$$\omega = \sum_1^n {}^i U_i \, du_i, \quad 1 \leqslant n \leqslant \frac{p+1}{2},$$

так что данное дифференциальное уравнение принимает вид

$$\omega = \sum_1^n {}^i U_i \, du_i = 0.$$

Могут представиться два случая.

1. Пусть вследствие искомых интегралов на все коэффициенты U_i, $i=1\ldots n$ обращаются в нуль. Следовательно, например, $U_1 \gtreqless 0$ в некоторой области переменных независимых $x_1 \ldots x_p$ и переменные $u_1 \ldots u_n \dfrac{U_2}{U_1} \ldots \dfrac{U_n}{U_1}$ независимы. Тогда вследствие искомых интегралов

должно быть

$$du_1 + \sum_2^n{}_j \frac{U_j}{U_1} du_j = 0, \qquad (\mathrm{I}')$$

откуда следует, что u_1 должна быть функцией $u_2 \ldots u_n$.

Пусть вообще

$$u_s = f_s(u_{m+1} \ldots u_n), \quad s = 1 \cdots m,$$

где $u_{m+1} \ldots u_n$ независимы. Дифференциальное уравнение (I′) принимает вследствие этих последних соотношений вид

$$\sum_1^{n-m}{}_t \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_{m+t}} + \sum_2^m{}_s \frac{U_s}{U_1} \frac{\partial f_s}{\partial u_{m+t}} + \frac{U_{m+t}}{U_1} \right) du_{m+t} = 0,$$

откуда по независимости функций $u_{m+t} \ldots u_n$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_{m+t}} + \sum_2^m{}_s \frac{U_s}{U_1} \frac{\partial f_s}{\partial u_{m+t}} + \frac{U_{m+t}}{U_1} = 0, \quad t = 1 \cdots n - m.$$

Обратно, на основании n уравнений

$$u_s = f_s(u_{m+t} \ldots u_n), \quad s = 1 \cdots m$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_{m+t}} + \sum_2^m{}_s \frac{U_s}{U_2} \frac{\partial f_s}{\partial u_{m+t}} + \frac{U_{m+t}}{U_1} = 0, \quad t = 1 \cdots n - m,$$

удовлетворяется дифференциальное уравнение (I′) и, следовательно, дифференциальное уравнение (I).

Эти уравнения совместны, независимы, необходимы в рассматриваемом случае и достаточны.

Эти n уравнений, или уравнений

$$u_s = f_s(u_{m+1} \ldots u_n), \quad s = 1 \ldots m, \quad U_{m+t} + \sum_1^m{}_s U_s \frac{\partial f_s}{\partial u_{m+t}} = 0, \quad t = 1 \ldots m - n,$$

где $U_1 \gtreqless 0$, представляют в рассматриваемом случае искомые интегралы в наименьшем числе.

Если $m = n$, они имеют вид $u_i = c_i \quad i = 1 \cdots n$, где c_i — произвольные постоянные, и представляют систему n полных интегралов.

2. Если вследствие искомых интегралов все коэффициенты $U_i \; i = 1 \cdots n$ должны тождественно обратиться в нуль, этот случай возможен только тогда, если уравнения $U_i \; i = 1 \cdots n$ совместны. Эти уравнения могут тогда представить систему интегралов, но число независимых может быть и меньше, чем n.

Если дифференциальное выражение ω приводится к вообще n—членной форме

$$\omega = \sum_1^n{}_i U_i du_i,$$

где функции u_i $i = 1 \cdots n$ независимы, то дифференциальное уравнение $\omega = 0$ интегрируется n независимыми полными интегралами $u_i = c_i$ $i = 1 \cdots n$, и обратно, в чем легко убедиться, приняв независимые функции u_i $i = 1 \cdots n$ за новые независимые переменные. Отсюда следует, что если простейшая форма дифференциального выражения ω n—членная, то дифференциальное уравнение $\omega = 0$ интегрируется наименьшим числом n полных интегралов, и обратно.

Отсюда

Теорема VII. Наименьшее число полных интегралов дифференциального уравнения Pfaff'а

$$\omega = \sum_1^p {}^k X_k \, dx_k = 0$$

не превосходит $\frac{p+1}{2}$. Необходимое и достаточное условие, чтобы оно было равно n $\left(\leqslant \frac{p+1}{2}\right)$, состоит в том, чтобы наивысшая степень отличных от нуля символических определителей

$$\left| \begin{matrix} X_r & \ldots & X_s \\ \frac{\partial}{\partial x_r} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r & \ldots & X_s \end{matrix} \right|_b \quad r \cdots s = 1 \cdots p$$

была равна $2n - 1$.

Пример. Пусть будет дано дифференциальное уравнение

$$\omega = x_5 \, dx_1 + x_1 \, dx_2 + x_2 \, dx_3 + x_3 \, dx_4 + x_4 \, dx_5 = 0$$

(E. Goursat, l. c.). В этом случае $p = 5$.

Символический определитель пятой степени

$$\left| \begin{matrix} x_5 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} & \frac{\partial}{\partial x_5} \\ x_5 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \right|_2 = 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

не равен тождественно нулю. Пусть в некоторой области E $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \gtrless 0$. Из условия $2n - 1 = 5$ находим, что данное дифференциальное выражение ω имеет 3-х членную простейшую форму

$$\omega = U_1 \, du_1 = U_2 \, du_2 + U_3 \, du_3,$$

где функция u_1 произвольна. Пусть $u_1 = x_1$

Символический определитель четвертой степени

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_1}{\partial x_5} \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_5 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_5} \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & x_1 & x_2 & x_4 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ x_5 & x_1 & x_2 & x_4 \end{vmatrix} = x_4$$

не равен тождественно нулю. Пусть в области $E_1 < E$, $x_4 \gtrless 0$. Функция u_2 должна быть каким-либо независимым от x_1 решением линейного дифференциального уравнения

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_4} & \frac{\partial f}{\partial x_5} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & x_4 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} & \frac{\partial}{\partial x_5} \\ x_5 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. уравнения

$$(x_2 + x_4)\frac{\partial f}{\partial x_2} - x_1\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_4\frac{\partial f}{\partial x_4} - (x_1 + x_3)\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0.$$

Одно из его решений, независимое от x_1, есть $\frac{x_2}{x_4} - \log x_4$. Пусть $u_2 = \frac{x_2}{x_4} - \log x_4$.

Определитель:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_5} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_5} \\ X_1 & X_2 & X_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_4} & 0 \\ x_5 & x_1 & x_4 \end{vmatrix} = 1,$$

отличен от нуля в области $E_2 = E_1$.

Функция u_3 должна быть единственным, независимым от x_1, $\frac{x_2}{x_4}\log x_4$ решением полной системы:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_4} & \frac{\partial f}{\partial x_5} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_4} & \frac{\partial u_1}{\partial x_5} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_5} & \frac{\partial u_2}{\partial x_5} \\ X_1 & X_2 & X_4 & X_5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_5} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_1}{\partial x_5} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_5} \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_5 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. системы:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_4} & \frac{\partial f}{\partial x_5} \\ \frac{1}{x_4} & -\frac{x_2+x_4}{x_4^2} & 0 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_5} \\ \frac{1}{x_4} & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_4 \end{vmatrix} = 0$$

или, наконец, системы:

$$x_4(x_2+x_4)\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4^2\frac{\partial f}{\partial x_4} - (x_3x_4 + x_1x_2 + x_1x_4)\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0,$$

$$x_4\frac{\partial f}{\partial x_3} - x_2\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0.$$

Оно есть:

$$u_3 = \frac{x_2x_3 + x_4x_5}{x_4} + \frac{x_1x_4 + x_1x_2}{x_4}\log x_4 - \frac{x_1}{2}\log^2 x_4.$$

Итак, функции u_1, u_2, u_3 суть:

$$u_1 = x_1, \quad u_2 = \frac{x_2}{x_4} - \log x_4, \quad u_3 = \frac{x_2x_3 + x_4x_5}{x_4} + \frac{x_1x_4 + x_1x_2}{x_4}\log x_4 - \frac{x_1}{2}\log^2 x_4.$$

Коэффициенты U_1, U_2, U_3 определяются из системы 5-ти линейных уравнений:

$$x_5 = U_1 + U_3\left(\frac{x_2+x_4}{x_4}\log x_4 - \frac{1}{2}\log^2 x_4\right), \quad x_1 = \frac{1}{x_4}U_2 + U_3\left(\frac{x_3}{x_4} + \frac{x_1}{x_4}\log x_4\right),$$

$$x_2 = U_3 + U_2\frac{x_2}{x_4}, \quad x_3 = -U_2\frac{x_2+x_4}{x_4^2} + U_3\frac{x_1x_2 + x_1x_4 - x_2x_3}{x_4^2} -$$

$$-\frac{x_1x_2}{x_4^2}\log x_4 - \frac{x_1}{x_4}\log x_4, \quad x_4 = U_3,$$

из которых независимы только три:

$$x_5 = U_1 + U_3\left(\frac{x_2+x_4}{x_4}\log x_4 - \frac{1}{2}\log^2 x_4\right),$$

$$x_1 = \frac{1}{x_4}U_2 + U_3\left(\frac{x_3}{x_4} + \frac{x_1}{x_4}\log x_4\right), \quad x_4 = U_3.$$

Из них находим, что:

$$U_1 = x_5 - (x_2+x_4)\log x_4 + \frac{x_4}{2}\log^2 x_4, \; U_2 = x_1x_4 - x_3x_4 - x_1x_4\log x_4, \; U_3 = x_1,$$

так что:

$$\omega = \left[x_5 - (x_2+x_4)\log x_4 + \frac{x_4}{2}\log^2 x_4\right]dx_1 + (x_1x_4 - x_3x_4 - x_1x_4\log x_4)$$

$$d\left(\frac{x_2}{x_4} - \log x_4\right) + x_4 d\left(\frac{x_2x_3 + x_4x_5}{x_4} + \frac{x_1x_4 + x_1x_2}{x_4}\log x_4 - \frac{x_1}{2}\log^2 x_4\right).$$

Система наименьшего числа (три) полных интегралов дифференциального уравнения $\omega=0$ есть

$$x_1=C_1,\quad \frac{x_2}{x_4}-\log x_4=C_2,\quad \frac{x_2x_3+x_4x_5}{x_4}+\frac{x_1x_4+x_1x_2}{x_4}\log x_4-\frac{x_1}{2}\log^2 x_4=C_3$$

Система трех интегралов $U_1=U_2=U_3=0$ невозможна.

Так как определитель:

$$\left|\begin{matrix}\frac{\partial}{\partial x_r}\dots\frac{\partial}{\partial x_s}\\ X_r\ \dots\ X_3\end{matrix}\right|_n$$

при $p=5$, $n=3$ не существует, дифференциальное выражение ω приводится к трехчленной нечетной канонической форме:

$$\omega=du_1+U_2du_2+U_3du_3.$$

Функция u_1 определяется из неоднородного линейного дифференциального уравнения:

$$\begin{vmatrix} x_5-\frac{\partial f}{\partial x_1} & x_1-\frac{\partial f}{\partial x_2} & x_2-\frac{\partial f}{\partial x_3} & x_3-\frac{\partial f}{\partial x_4} & x_4-\frac{\partial f}{\partial x_5}\\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} & \frac{\partial}{\partial x_5}\\ x_5 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix}=0,$$

или уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial x_3}+\frac{\partial f}{\partial x_4}+\frac{\partial f}{\partial x_5}=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$$

Его общее решение есть:

$$f=-\frac{3}{2}x_1^2+x_1(x_2+x_3+x_4+x_5)+\varphi(x_2-x_1,\ x_3-x_1,\ x_4-x_1,\ x_5-x_1),$$

где φ — произвольная функция. Пусть, например,

$$\varphi=(x_2-x_1)(x_3-x_1)$$

и пусть:

$$u_1=-\frac{3}{2}x_1^2+x_1'(x_2+x_3+x_4+x_5)+(x_2-x_1)(x_3-x_1)=$$

$$=-\frac{1}{2}x_1^2+x_2x_3+x_1(x_4+x_5).$$

Переменные u_2, u_3, U_2, U_3 определяются, как переменные простейшей формы $U_2du_2+U_3du_3$ дифференциального выражения:

$$\omega-du_1=(x_1-x_4)\,dx_1+(x_1-x_3)\,dx_2+(x_3-x_1)\,dx_4+(x_4-x_3)\,dx_5.$$

Так как символический определитель третьей степени:

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & x_1 - x_3 & x_3 - x_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1 - x_4 & x_1 - x_3 & x_3 - x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_4$$

не равен тождественно нулю, положим, что в некоторой области $E < E_1$

$$x_1 - x_4 \gtreqless 0.$$

Функция u_2 должна быть каким-либо решением полной системы:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_3} & \dfrac{\partial f}{\partial x_4} \\ x_1 - x_4 & x_1 - x_3 & 0 & x_3 - x_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ x_1 - x_4 & x_1 - x_3 & 0 & x_3 - x_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_3} & \dfrac{\partial f}{\partial x_5} \\ x_1 - x_4 & x_1 - x_3 & 0 & x_4 - x_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_5} \\ x_1 - x_4 & x_1 - x_3 & 0 & x_4 - x_1 \end{vmatrix} = 0.$$

т. е. системы:

$$(x_1 - x_4)\frac{\partial f}{\partial x_2} + (x_3 - x_1)\frac{\partial f}{\partial x_3} - (x_4 - x_1)\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0,$$

$$(x_4 - x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (x_4 - x_3)\frac{\partial f}{\partial x_3} + (x_4 - x_1)\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0.$$

Независимые решения ее суть:

$$x_1 - x_5, \quad x_2 - x_4, \quad \frac{x_3 - x_4}{x_1 - x_4}.$$

Пусть:

$$u_2 = x_2 - x_4.$$

Так как определитель:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ X_1 & X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x_1 - x_4 & x_1 - x_3 \end{vmatrix} = x_4 - x_1 \gtreqless 0,$$

в области E_1, u_3 должна быть единственным независимым от $x_2 - x_4$ решением полной системы:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1 - x_4 & x_1 - x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_4} \\ 0 & 1 & -1 \\ x_1 - x_4 & x_1 - x_3 & x_3 - x_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_5} \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1 - x_4 & x_1 - x_3 & x_4 - x_1 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. системы

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial x_4}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_5}=0.$$

Оно есть x_1-x_5. Коэффициенты $U_2 \,.\, U_3$ определяются из уравнений:

$$x_1-x_4=U_3, \quad x_1-x_3=U_2, \quad x_3-x_1=-U_2, \quad x_4-x_1=-U_3,$$

откуда:

$$U_2=x_1-x_3, \quad U_3=x_1-x_4,$$

и нечетная каноническая форма дифференциального выражения ω есть

$$\omega=d\left(-\frac{1}{2}x_1{}^2+x_2x_3+x_1x_4+x_1x_5\right)+(x_1-x_3)\,d\,(x_2-x_4)+$$
$$+(x_1-x_4)\,d\,(x_1-x_5).$$

Из этого следует, что простейшая 2-х членная (каноническая четная) форма дифференциального выражения:

$$\omega-du_1=(x_1-x_4)\,dx_1+(x_1-x_3)\,dx_2+(x_3-x_1)\,dx_4+(x_4-x_1)\,dx_5$$

есть

$$\omega-du_1=(x_1-x_3)\,d(x_2-x_4)+(x_1-x_4)\,d(x_1-x_5).$$

Система наименьшего числа (два) полных интегралов уравнения

$$\omega-du_1=0$$

есть:

$$x_2-x_4=C_1, \quad x_1-x_5=C_2.$$

Система двух интегралов вида $U_2=U_3=0$ возможна и имеет вид:

$$x_1-x_3=0, \quad x_1-x_4=0.$$

C. RUSSYAN

Integrationsmethode der Pfaffschen Differentialgleichung

Die Integrationsmethode der Pfaffschen Differentialgleichung

$$\omega = \sum_{1}^{p}{}^{k} X_k dx_k = 0$$

die wir den Arbeiten von Pfaff, Jacobi, Natani, Clebsch, Hamburger, Frobenius und S. Lie verdanken, besteht darin, dass man erst den Differentialausdruck ω auf die kanonische Form, gerade oder ungerade bringt und dann die gegebene Differentialgleichung integriert. Die Methode hängt also von der Geradheit der Klasse des Differentialausdruckes ω ab.

E. Cartan hat mit Hilfe der Ergebnisse aus der Theorie der symbolischen Differentialformen die Integrationsmethode gegeben, die von diesem Umstande unabhängig ist. E. Goursat hat auch eine Integrationsmethode gegeben, die auf dasselbe Prinzip sich gründet, die aber suczessive Transformationen verlangt.

Der Verfasser giebt die Integrationsmethode die auch von dieser Beschaffenheit ist, aber ist sie direkt und verlangt nicht die suczessiven Transformationen: alle Differentialgleichungen, die zur Lösung des Problems nothwendig sind, anstellen sich unmittelbar nach den Koeffizienten des gegebenen Differentialausdruckes ω, was in Bezug auf die oben erwähnten Methoden nicht der Fall ist; endlich ist sie einfach, da sie nur die drei Hilfssätze verlangt.

Der Verfasser giebt die oben erwähnten Differentialgleichungen in der nicht aufgelösten und in der aufgelösten Form.

Das Hauptergebniss ist: Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die gegebene Differentialgleichung mit Hilfe der kleinsten Anzahl n der vollständigen Integrale $U_i = C_i$, $i = 1 \ldots n$ sich integrieren, oder dafür dass der Differentialausdruck ω auf die Form

$$\omega = \sum_{1}^{n}{}^{i} U_i du_i$$

mit der kleinsten Anzahl n der Differentiale sich reduziren lasse, ist dass der hochste Grad der nicht sämmtlich identisch verschwindenden Determinanten

$$\left|\begin{array}{c} X_r \; \ldots \; X_s \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} \cdots \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \; \ldots \; X_s \end{array}\right|_{\alpha} \quad r \ldots s = 1 \ldots p$$

gleich $2n-1$ sei, wo das Zeichen ∂ zeigt, dass das Paar der Zeilen

$$\begin{array}{c} \dfrac{\partial}{\partial x_r} \cdots \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r \; \ldots \; X_s \end{array}$$

deren Elemente dem kommutativen Gesetze nicht unterworfen sind, α-mal vorkommt.

Wenn im gewissen Bereich E_1

$$\left|\begin{array}{c} X_1 \; \ldots \; X_{2n-1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1 \; \ldots \; X_{2n-1} \end{array}\right|_{n-1} \gtrless 0$$

ist und die Funktionen $u_1 \ldots u_{m-1}$ $(0 \leqslant m-1 < n)$ schon bestimmt sind, nicht alle Determinanten des $2n-m$ Grades

$$\left|\begin{array}{c} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{i-1}}, \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{i+1}} \ldots \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m+1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{i-1}}, \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{i+1}} \ldots \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m+1}} \\ X_1 \; \ldots \; X_{i-1}, \; X_{i+1} \; \ldots \; X_{2n-m+1} \\ \left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_{i-1}}, \dfrac{\partial}{\partial x_{i+1}} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-m+1}} \\ X_1 \; \ldots \; X_{i-1}, \; X_{i+1} \; \ldots \; X_{2n-m+1} \end{array}\right|_{n-m} \end{array}\right|$$

$$i = 1 \ldots 2n-m+1$$

identisch verschwinden.

Es sei im gewissen Bereiche $E_m (\leqslant E_1)$

$$\left|\begin{array}{c} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}} \\ X_1 \; \ldots \; X_{2n-m} \\ \left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial}{\partial x_{2n-m}} \\ X_1 \; \ldots \; X_{2n-m} \end{array}\right|_{n-m} \end{array}\right| \gtrless 0.$$

Alsdann die Funktion u_m ist beliebige von $u_1 \ldots u_{m-1}$ unabhängige Lösung des vollständigen Systems der $p-(2n-m)$ linearen unabhängigen Differentialgleichungen

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-m}}, & \frac{\partial f}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m}}, & \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\ X_1 & \ldots & X_{2n-m}, & X_{2n-m+\varrho} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_{2n-m}}, & \frac{\partial}{\partial x_{2n-m+\varrho}} \\ X_1 & \ldots & X_{2n-m}, & X_{2n-m+\varrho} \end{vmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ X \end{matrix}}\right| n-m \quad = 0.$$

$$\varrho = 1 \ldots p-(2n-m)$$

Wenn die Funktion U_m bestimmt ist, so sind nicht alle Determinanten des Grades $2n-m-1$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{i+1}} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-m}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_m}{\partial x_{i-1}}, & \frac{\partial u_m}{\partial x_{i+1}} & \ldots & \frac{\partial u_m}{\partial x_{2n-m}} \\ X_1 & \ldots & X_{i-1}, & X_{i+1} & \ldots & X_{2n-m} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_{i-1}}, & \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_{2n-m}} \\ X_1 & \ldots & X_{i-1}, & X_{i+1} & \ldots & X_{2n-m} \end{vmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ X \end{matrix}}\right| n-m-1$$

$$i = 1 \ldots 2n-m$$

identisch null.

Wenn man $m = 1, 2 \ldots n$ setzt, so hat man die Funktionen $u_1 \ldots u_n$ mit Hilfe der Integrationen der Ordnung $2n-1, 2n-3, \ldots 1$.

Wenn $2n-1 = p$ ist, die Funktion u_1 ist willkürlich. Man bestimmt die Koeffizienten $U_1 \ldots U_n$ aus dem Systeme der linearen Gleichungen

$$X_k = \sum_1^n {}_i\, U_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad k = 1 \ldots p$$

das nur die n unabhängigen enthält.

Nachdem die Reduction der Differentialgleichung $\omega = 0$ auf die Form

$$\omega = \sum_1^n {}_i\, U_i du_i = 0$$

erledigt ist, man integriert dieselbe nach bekannter Weise mit Hilfe der nur ausführbaren Operazionen.

Der Verfasser benutzt dieselbe Methode für die Reduktion des Differentialausdruckes ω auf die kanonische Form.