S. BERNSTEIN

Sur une propriété de la fonction exponentielle.

Je me propose de démontrer dans cette Note une proposition très simple concernant la fonction exponentielle en me reservant de revenir prochainement sur ses généralisations. Le théorème élémentaire dont il s'agit peut être énoncé de la façon suivante: Si la fonction de la variable réelle $f(x)$ est absolument monotone(*) sur tout l'axe réel, on a, pour toute valeur de x,

$$f(x) \geqslant e^x$$

si $f(0) = f'(0) = 1$.

La fonction exponentielle e^x peut être aussi définie comme la fonction absolument monotone qui, pour $x = 0$, reçoit la valeur 1 avec sa dérivée, et, pour $x = 1$, prend la valeur e; d'ailleurs il n'existe pas de fonction de la nature indiquée qui, pour $x = 1$, reste inférieure à e.

La démonstration la plus courte que nous donnerons plus loin supposera connue la propriété des fonctions absolument monotones d'être analytiques. Je commencerai par donner une autre démonstration qui, quoique plus longue, est à certains égards plus instructive et s'appuie sur le lemme suivant:

Lemme. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ des nombres donnés quelconques, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres positifs donnés; si p_i sont des paramètres non négatifs satisfaisant à la seule condition

$$M = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_n p_n, \tag{1}$$

où M est un nombre fixe, l'ensemble E des points du plan ayant pour coordonnées

$$x = a + \alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_n p_n, \quad y = b + \beta_1 p_1 + \cdots + \beta_n p_n \tag{2}$$

est formé par le plus petit polygone convexe contenant tous les points P_i de coordonnées

$$x_i = a + \frac{\alpha_i}{\lambda_i} M, \quad y_i = b + \frac{\beta_i}{\lambda_i} M \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

(*) La fonction $f(x)$ est absolument monotone, si toutes ses différences successives sont non négatives.

Pour établir ce lemme, remarquons d'abord que l'ensemble E est borné, car $p_i \leqslant \frac{M}{\lambda_i}$ en vertu de (1). De plus E est limité par un contour C convexe, puisque, (x_0, y_0) et (x_1, y_1) faisant partie de l'ensemble E, il en sera de même du point (ξ, η), tel que

$$\xi = \varrho\lambda_0 + (1-\varrho)x_1,$$
$$\eta = \varrho y_0 + (1-\varrho)y_1,$$

lorsque $0 < \varrho < 1$.

Disons, pour abréger, que P est un sommet d'un contour convexe C, si toute droite passant par P possède au moins d'un côté de ce point des points extérieurs à C aussi voisins de P que l'on veut. (Ainsi tous les points d'un contour convexe qui n'a pas de partie rectiligne seraient des sommets). Cette définition étant posée, notre affirmation sera prouvée, si nous montrons que les seuls points qui peuvent être des sommets de C se trouvent parmi les points P_i, dont les coordonnées sont données par les formules (3).

A cet effet, posons $\frac{\lambda_1 p_i}{M} = q_i$; les formules (2) prendront alors la forme

$$x = a + \varphi_1 q_1 + \cdots + \varphi_n q_n, \quad y = b + f_1 q_1 + \cdots + f_n q_n, \tag{2 bis}$$

où

$$\varphi_i = \frac{M\alpha_i}{\lambda_i}, \quad f_i = \frac{M\beta_i}{\lambda_i},$$

tandis que (1) se réduit à

$$1 = q_1 + q_2 + \cdots + q_n \tag{1 bis}$$

avec la condition $q_i \geqslant 0$. Cela étant, soit d'abord i un indice tel qu'il n'existe pas d'autre indice $h \gtreqless i$ pour lequel on ait simultanément $\varphi_h = \varphi_i$, $f_h = f_i$; dans ces conditions, le point (x_0, y_0) pour lequel $q_i > 0$ ne pourrait être un sommet, si en même temps $q_h > 0$, car, en laissant invariables les autres paramètres et en prenant $q_i + \varepsilon$ ef $q_h - \varepsilon$ au lieu de q_i et q_h respectivement, on obtient un nouveau point (x_1, y_1) de l'ensemble E, tel que

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \varepsilon(\varphi_i - \varphi_h), \\ y_1 &= y_0 + \varepsilon(f_i - f_h); \end{aligned} \tag{4}$$

ainsi tous les points de la droite (4) assez voisins de (x_0, y_0) seraient intérieurs au contour C, de sorte que ce point n'est pas un sommet. Supposons ensuite que $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_k$, $f_1 = f_2 = \cdots = f_k$, mais que, pour tous les autres indices h, on n'a pas simultanément $\varphi_h = \varphi_1$ et $f_h = f_1$. Dans ce cas, tous les points (x_0, y_0), pour lesquels $q_1 + \cdots + q_k = Q$, où Q est un nombre fixe, sont identiques, si les valeurs des autres paramètres sont les mêmes. Donc, d'après le même raisonnement, nous concluons d'une façon générale que tous les sommets possibles seront obtenus en faisant successivement $q_1 = 1$, $q_2 = 1, \ldots, q_n = 1$; ces points (qui pourront ne pas être tous différents) auront leurs coordonnées déterminées par (3). C. q. f. d.

Remarque. Le lemme établi subsiste évidemment, lorsque n croît indéfiniment, et il peut alors être présenté sous la forme suivante:

Si $p(x)\geqslant 0$ et

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx=1$$

alors quelles que soient les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$, l'ensemble E des points, ayant pour coordonnées

$$X=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,p(x)\,dx,\quad Y=\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,p(x)\,dx$$

sera limité par le plus petit contour convexe contenant tous les points de la courbe

$$X=f(x),\quad Y=\varphi(x).$$

Sans nous arrêter sur les applications de cette remarque, indiquons quelques exemples: 1) soit $f(x)=|x|^m$, $\varphi(x)=|x|^l$ où $m>l$, alors $X^l\geqslant Y^m$;

2) si $\displaystyle\int_{-a}^{a} xp(x)\,dx=0$ et $\displaystyle\int_{-a}^{a} p(x)\,dx=1$, alors $\left|\displaystyle\int_{-a}^{a} xp(x)\,dx\right|\leqslant\dfrac{a}{3}\cdot$

Démontrons à présent un second lemme qui résulte du précédent:

Lemme. Si $f(a)$ et ses différences successives

$$\Delta_1 f(a)=f(a+1)-f(a),\quad \Delta_2 f(a)=f(a+2)-2f(a+1)+f(a),$$
$$\Delta_3 f(a),\ldots,\Delta_n f(a)$$

sont non négatives, on a

$$f(a+n).f(a+n-2)\geqslant\frac{n}{n-1}f(a+n-1)\,[f(a+n-1)-\frac{1}{n}f(a+n)].\quad (5)$$

En effet, en posant pour abréger $a=0$, on a

$$\begin{aligned} y&=f(n-2)=f(0)+(n-2)\Delta_1+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}\Delta_2+\cdots+\Delta_{n-2},\\ x&=f(n-1)=f(0)+(n-1)\Delta_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\Delta_1+\cdots+\Delta_{n-1},\quad (6)\\ M&=f(n)=f(0)+n\Delta_1+\cdots+n\Delta_{n-1}+\Delta_n. \end{aligned}$$

Donc, en laissant M fixe, on voit que le point (x,y) défini par les formules (6) se trouve, d'après le lemme précédent, à l'intérieur du plus petit polygone convexe ayant pour sommets les points

$$P_1(M, M), \quad P_2\left(M\frac{n-1}{n}, \; M\frac{n-2}{n}\right), \ldots,$$

$$P_k\left(M\frac{n-k+1}{n}, \; M\frac{(n-k)(n-k+1)}{n(n-1)}\right), \ldots, \quad P_{n+1}(0, 0).$$

Il est facile de voir que tous ces points, ayant leurs abscisses équidistantes, se trouvent sur la parabole

$$My = \frac{x}{n-1}[nx - M]; \tag{7}$$

par conséquent, le polygone cherché aura pour sommets tous les points considérés, et, outre la relation évidente $y \leqslant x$ qui correspond au côté supérieur $(P_{n+1}\, P_0)$ de notre polygone, on a, en tenant compte des équations des côtés inférieurs (*),

$$\begin{aligned} &y \geqslant 2x - M \quad \text{pour} \quad M\frac{n-1}{n} \leqslant x \leqslant M, \\ &y \geqslant \frac{n-2}{n-1}\left[2x - \frac{n-1}{n}M\right] \quad \text{pour} \quad M\frac{n-2}{n} \leqslant x \leqslant M\frac{n-1}{n}, \\ &y \geqslant \frac{n-3}{n-1}\left[2x - \frac{n-2}{n}M\right] \quad \text{pour} \quad M\frac{n-3}{n} \leqslant x \leqslant M\frac{n-2}{n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{8}$$

Ainsi, a fortiori, on a $My \geqslant \frac{x}{n-1}[nx - M]$, c'est à dire

$$f(n) \cdot f(n-2) \geqslant \frac{nf(n-1)}{n-1}\left[f(n-1) - \frac{f(n)}{n}\right], \tag{9}$$

ce qui est équivalent à (5) C. q. f. d.

Posons à présent $a + n - 1 = b$ et supposons que $f(x)$ a ses différences finies de tous les ordres non-négatives sur tout l'axe réel. On aura donc, quel que soit b et n,

$$f(b+1) \cdot f(b-1) \geqslant \frac{n}{n-1} f(b)\left[f(b) - \frac{1}{n} f(b+1)\right].$$

Par conséquent, si b étant fixe, on fait croître n indéfiniment, on trouve que

$$f(b+1) \cdot f(b-1) \geqslant [f(b)]^2. \tag{10}$$

(*) On vérifie facilement, grâce aux propriétés connues des paraboles que les arêtes (8) de la parabole (7) sont tangentes à la parabole $My = \frac{n}{n-1}\left[x - \frac{M}{2n}\right]^2$, de sorte que tous les côtés de notre polygone sont comprises entre les deux paraboles considérées, dont la distance verticale est égale à $\frac{M}{4n(n-1)}$.

Ainsi, en posant $b=1$ et $f(0)=1$, $f(1)=t \geqslant 1$, on a $f(2) \geqslant t^2$; en faisant ensuite $b=2$, et substituant dans (10) les valeurs $f(1)=t$, $f(2)=t^2$, on a de même $f(3) \geqslant t^3$. De proche en proche on trouve, pour toute valeur entière positive de n,

$$f(n) \geqslant f(1) \, . \, f(n-1) \geqslant t^n. \tag{11}$$

En appliquant le même procédé en sens inverse, on voit pareillement que l'inégalité

$$f(n) \geqslant t^n \tag{11 bis}$$

subsiste également pour les valeurs entières négatives de n.

Soit h un nombre quelconque; en supposant toujours $f(0)=1$, on aura, en vertu de (11), pour $x=nh$,

$$f(x)=f(nh) \geqslant [f(h)]^n = [f(h)]^{\frac{x}{h}}, \tag{12}$$

en admettant que les différences succesives de $f(x)$ correspondant à l'accroissement fini h sont non-négatives.

Donc, en faisant tendre h vers 0 et en remarquant que

$$\lim_{h=0} [f(h)]^{\frac{x}{h}} = e^{xf'(0)},$$

on voit que, en supposant $f'(0)=1$, on a, quel que soit x,

$$f(x) \geqslant e^x, \text{ c. q. f. d.}$$

Le même résultat peut être obtenu plus rapidement, en s'appuyant sur le théorème (*): si la fonction $f(x)$ est absolument monotone sur le segment ab ($a<b$), elle est développable en série de Taylor suivant les puissances de $(x-a)$ convergente sur tout le segment ab.

Il est aisé alors de vérifier que, si $f(x)$ est absolument monotone sur la partie de l'axe réel $(-\infty, b)$, on a, pour toute valeur de $x \leqslant b$, l'inégalité

$$f(x) \, . \, f''(x) - [f'(x)]^2 \geqslant 0. \tag{13}$$

En effet, soit $-n$ un nombre négatif, on a les développements

$$f(x) = a_0 + a_1(x+n) + \cdots + a_k(x+n)^k + \cdots,$$
$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x+n) + \cdots + ka_k(x+n)^{k-1} + \cdots,$$
$$f''(x) = 2a_2 + \cdots + k(k-1)a_k x^{k-2} + \cdots,$$

convergents, pour $-n < x < b$, à coéfficients positifs. D'où

$$(x+n)f'(x) = a_1(x+n) + 2a_2(x+n)^2 + \cdots + ka_k(x+n)^k + \cdots,$$
$$(x+n)f'(x) + (x+n)^2 f''(x) = a_1(x+n) + 4a_2(x+n)^2 + \cdots + k^2 a_k(x+n)^k + \cdots$$

(*) S. Bernstein. „Sur les propriétés des fonctions analytiques d'une variable réelle" Mathem. Ann. 1914.

Donc, en posant $A_k = a_k(x+n)^k \geqslant 0$ et en tenant compte de l'identité

$$[A_0 + A_1 + \cdots + A_k + \cdots][A_1 + 4A_2 + \cdots + k^2 A_k + \cdots] - \\ - [A_1 + 2A_2 + \cdots + kA_k + \cdots]^2 = \Sigma A_i A_k (k-i)^2 \geqslant 0,$$

on voit que

$$f(x) \, . \, [f'(x) + (x+n) f''(x)] \geqslant (x+n)[f'(x)]^2,$$

ou autrement,

$$f(x) \, . \, f''(x) + \frac{f(x) \, . \, f'(x)}{x+n} \geqslant [f'(x)]^2. \tag{14}$$

Donc, en laissant x fixe et faisant croître n indéfiniment, on a, en effet,

$$f(x) f''(x) \geqslant [f'(x)]^2. \tag{13}$$

L'inégalité (13) est équivalente à

$$[\log f(x)]'' = \frac{f'' f - (f')^2}{f^2} \geqslant 0.$$

Donc, en posant $\log f(x) = \varphi(x)$, on constate que la ligne $y = \varphi(x)$ est convexe, de sorte que, si, pour $x = 0$, $\varphi(x) = 0$, $\varphi'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} = k$, on a pour toute valeur de $x < b$, $\varphi(x) \geqslant kx$, d'où $f(x) \geqslant e^{kx}$.

Montrons aussi que la fonction e^{kx} peut être définie comme il suit: c'est la fonction absolument monotone sur tout l'axe réel, telle que $f(0) = 1$, $f'(0) = k$, $f''(0) = k^2$.

En effet, si en un point on a $f(x) f''(x) - [f'(x)]^2 = 0$, cette égalité est remplie identiquement. Pour le voir remarquons que d'après ce qu précède on a, pour toute valeur de n, quel que soit x,

$$f^{(n-1)}_{(x)} \, . \, f^{(n+1)}_{(x)} \geqslant [f^{(n)}_{(x)}]^2.$$

D'autre part, puisque $F(x) = f(x) \, . \, f''(x) - f'^2(x)$ ne devient jamais négative, on a nécessairement $F'(x) = 0$ au point, où $F(x) = 0$; mais alors

$$F'(x) = f(x) f'''(x) - f'(x) \, . \, f''(x) = f'(x) \left[\frac{f'(x) \, . \, f'''(x)}{f''(x)} - f''(x) \right] = 0,$$

c'est à dire

$$f'(x) f'''(x) - [f''(x)]^2 = 0;$$

donc, en répétant le même raisonnement, on trouve successivement que l'on a au point considéré

$$f^{(n-1)}(x) \, . \, f^{(n+1)}(x) - [f^{(n)}(x)]^2 = 0$$

pour toute valeur de n. Ainsi, on a, pour $x = 0$,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{f'''(x)}{f''(x)} = \cdots = \frac{f^{(n+1)}(x)}{f^{(n)}(x)} = k.$$

Par conséquent, l'hypothèse faite entraîne que

$$f(x)=1+kx+\frac{k^2}{2!}x^2+\cdots+\frac{k^n x^n}{n!}+\cdots=e^{kx}.$$

Remarquons, enfin, que, si la fonction absolument monotone, pour $x<b$, satisfait pour trois valeurs x_0, x_1, x_2 inférieures à b aux égalités

$$f(x_0)=Ae^{kx_0},\quad f(x_1)=Ae^{kx_1},\quad f(x_2)=Ae^{kx_2},$$

où A et k sont des constantes données, on a identiquement $f(x)=Ae^{kx}$.

En effet, d'après ce qui précède, la ligne $y=\log f(x)$ est convexe; donc, si elle passe par 3 points en ligne droite, elle se réduit à une droite entre ces points, et, comme elle est analytique, elle se prolonge également en ligne droite dans les deux sens.