W. GONTCHAROFF

Sur quelques notions fondamentales de la Topologie abstraite

N 1.

C'est à la théorie des ensembles ponctuels dans l'espace Euclidien E_n qu'on rattache ordinarement les principes de l'Analysis situs. On obtient l'Analysis situs général ou Topologie abstraite, si la nature des points ou éléments d'ensembles n'est pas déterminée (*). Il est bien connu que les procédés de la théorie des ensembles sont régis par les lois formelles de l'Algèbre logique, dont on emploie souvent aussi le langage et les notations. En étudiant des relations topologiques, qui existent entre les variétés abstraites, je me suis aperçu que la notion du point n'y joue aucun rôle essentiel et qu'on pourrait entreprendre de s'en passer. Donc, j'ai eu l'idée de rattacher l'Analysis situs directement à l'Algèbre logique sans avoir recours à la théorie des ensembles. L'ouvrage présent est sorti de cet ordre d'idées.

Deux groupes d'axiomes servent de point de départ. Le premier groupe, introduisant la notion primitive de la variété et la relation primitive de l'inclusion n'est pas essentiellement distinct du système d'axiomes de l'Algèbre logique (**). Le second introduit la relation primitive d'être conjoint, ou, plus intuitivement, être à côté de, ce qui sert à caractériser le mode de continuité dans l'espace considéré. En développant la déduction on définit les notions suivantes: point ou élément, variété connexe, composant d'une variété, être située entre deux variétés, variété linéaire (ou ligne) simple, ligne de Jordan. Il va sans dire que ce ne sont que les premiers pas vers le but proposé.

J'ai à insister surtout sur un principe qui m'a guidé dans le choix des définitions, des énoncés et des démonstrations: c'est qu'on ne considère que des propriétés intrinsèques de la variété étudiée, sans faire appel à l'espace environnant. Il est évident que de la ligne de Cantor ou la

(*) Voir, par exemple, M. Fréchet. „Sur les ensembles abstraits" (Ec. Norm., 38).

(**) Schröder. Algebra d. Logik; E. V. Huntington. Sets of independent postulates for the algebra of logic (Trans. Am. M. S. Vol. 5).

définition topologique de la ligne de Jordan fermée proposée par Schoenfliess (*) n'y satisfont pas.

La nature des notions primitives convenablement spécifiée, on retrouve les notions correspondantes de l'espace Euclidien E_n. La notion de la variété linéaire, introduite ici, présente une généralisation de la ligne de Jordan. M. Zoretti a défini la ligne par la propriété d'être irréductible entre deux points (**); il démontre dans l'ouvrage cité que cette définition ne permet pas toujours d'établir les relations d'ordre entre les points de la ligne. On verra que la définition de la ligne, introduite ci-dessous, le permet presque par définition.

N 2.

Les objets considérés, appelés variétés et désignées par des lettres latines majuscules A, B etc., sont supposés appartenir à une classe **X** bien déterminée ou donnée (on dira l'espace **X**). On aura à considérer des classes de variétés faisant partie de **X**: ces classes sont désignées par des lettres **A**, **B** etc.; dans ce cas A représente une variété quelconque de **A**, B celle de **B** etc.

La relation de l'inclusion „A fait partie de B" ou „B contient A" s'écrit: $A \prec B$ ou $B \succ A$ (c'est la même chose). La relation d'égalité $A = B$ est, par définition, équivalente au système de deux relations $A \prec B$, $A \succ B$ (***).

Groupe d'axiomes A

$I_{1,2}$. 1°. $A \prec A$

2°. Si $A \prec B$, $B \prec C$, on a $A \prec C$.

$II_{1,2}$. *1° Quelle que soit la classe donnée des variétés* **A**, *il existe une variété $\Pi(\mathbf{A})$ qui possède la propriété suivante: la relation $X \prec \Pi(\mathbf{A})$ est équivalente au système des relations $X \prec A$, où A est une variété quelconque de* **A**.

2°. Quelle que soit la classe donnée des variétés **A**, *il existe une variété $\Sigma(\mathbf{A})$ qui possède la propriété suivante: la relation $X \succ \Sigma(\mathbf{A})$ est équivalente au système des relations $X \succ A$, où A est une variété quelconque de* **A**.

Dans le cas où la classe **A** est formée d'un nombre fini de variétés A_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ on écrira aussi:

$$\Pi(\mathbf{A}) = A_1 A_2 \ldots A_n, \quad \Sigma(\mathbf{A}) = A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

On démontre l'unicité de $\Pi(\mathbf{A})$ et de $\Sigma(\mathbf{A})$. On appelle $\Pi(\mathbf{A})$ produit et $\Sigma(\mathbf{A})$ somme des variétés de la classe **A**.

(*) A. Schönfliess. Die Entwickelung d. Lehre von d. Punktmannigfaltigkeiten (Jahresbericht d. Deutsch. Math., Ver. 1908, Ergänzungsband II p. 119).

(**) Acta Mathem., 1913.

(***) Il est à remarquer que l'égalité $A = B$ ne signifie pas en général l'identité de A et de B.

X étant la classe de toutes les variétés considérées, posons:

$$\Pi(\mathbf{X}) = 0, \quad \Sigma\cdot(\mathbf{X}) = \Omega.$$

0 et Ω sont appelées (resp.) variété nulle et variété totale. On a $0 \prec X$, $X \prec \Omega$ quel que soit X.

Si la classe **A** est vide, on a à poser: $\Pi(\mathbf{A}) = \Omega$, $\Sigma\cdot(\mathbf{A}) = 0$.

Au cas où $\Pi(\mathbf{A}) = 0$ on écrira tout simplement $\Sigma(\mathbf{A})$ ou $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ au lieu de $\Sigma\cdot(\mathbf{A})$ et $A_1 \dotplus A_2 \dotplus \cdots \dotplus A_n$.

III. **A** *désignant une classe de variétés donnée,* $B\mathbf{A}$ *celle qu'on obtient en multipliant chaque variété de* **A** *par* B *on a*

$$B\,\Sigma\cdot(\mathbf{A}) \prec \Sigma\cdot(B\mathbf{A}).$$

Puisque la relation $B\,\Sigma\cdot(\mathbf{A}) \succ \Sigma\cdot(B\mathbf{A})$ est aisément démontrable, on en déduit:

$$B\,\Sigma\cdot(\mathbf{A}) = \Sigma\cdot(B\mathbf{A}).$$

IV. *Quelle que soit la variété A, il existe une variété $\bar{A}$ qui satisfait aux relations suivantes:*

$$A \dotplus \bar{A} = \Omega, \quad A\bar{A} = 0.$$

La variété $\bar{A}$ est unique, ce qu'on démontre facilement. Nous avons à distinguer les axiomes $\mathrm{II}_{1,2}$ et III finis ou transfinis, selon que la classe **A** est supposée être formée d'un nombre fini on infini de variétés. Le système classique de Schröder n'admet que les axiomes finis. Tout de même je ne vois aucune nécessité à éviter dans la Topologie générale des procédés qu'on emploie sans scrupules dans la Théorie des ensembles. Quoiqu'il en soit, on verra ce qui serait à modifier dans la théorie suivante si l'on s'était décidé à rejeter les axiomes transfinis.

Il est bien connu que chacun des axiomes II_1 et II_2 est une conséquence des autres axiomes: c'est par raison de symétrie qu'on les introduit tous les deux. D'ailleurs ce n'est pas la question de l'indépendance des axiomes que nons avons à étudier.

Il n'est pas nécessaire à rappeler ici les lois des opérations formelles qu'on déduit des axiomes *A I—IV*.

La variété A est dite élément ou point, si les conditions $X \mathrel{\not\!=} 0$ (*), $X \prec A$ entraînent $X = A$. L'existence des éléments n'est pas postulée, ainsi que leur absence.

Les propriétés suivantes des éléments sont à remarquer:

1) un élément A et une variété quelconque B étant donnée, on a ou bien $A \prec B$ ou bien $AB = 0$,

2) deux éléments A et B non égaux étant donnés, on a $AB = 0$,

3) un élément A et une classe de variétés **B** étant donnés, si $A \prec \Sigma\cdot(\mathbf{B})$, il existe une variété B de la classe **B** (au moins) telle que $A \prec B$.

(*) Le trait vertical signifie la non-existence de la relation.

Soit $\mathbf{E}_A$ la classe de tous les éléments faisant partie de A. Alors $\Sigma(\mathbf{E}_A) \prec A$. Si, de plus, la relation

$$\Sigma(\mathbf{E}_A) = A$$

est vérifiée, la variété A est dite *élémentaire*. La condition nécessaire et suffisante pour que A soit élémentaire est que chaque partie de A non nulle contienne au moins un élément.

On démontre:

1) si $A \prec B$, B étant élémentaire, A est aussi élémentaire,

2) si toutes les variétés A de la classe $\mathbf{A}$ sont élémentaires, $\Sigma(\mathbf{A})$ est aussi élémentaire,

3) une variété quelconque est la somme de deux variétés A et B telles que $AB = 0$, A est élémentaire, B ne contient aucun élément. D'ailleurs les cas $A = 0$ ou $B = 0$ ne sont pas exclus.

L'exemple d'une variété élémentaire est fourni par l'ensemble $\mathbf{E}$ des éléments quelconques: on définit les variétés comme sous-ensembles de $\mathbf{E}$ et la relation $A \prec B$ signifiera que A est sous-ensemble de B. Alors $\mathbf{E}\,(= \Omega)$ et tous les sous-ensembles de $\mathbf{E}$ sont élémentaires.

J'emprunte à M. S. Bernstein l'exemple d'une variété non nulle sans élément (*). La classe $\mathbf{X}$ est formée de toutes les suites possibles des nombres 0 et 1 (fractions dyadiques si l'on veut:

$$A \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots) \equiv [\alpha_n].$$

La relation $A \prec B$ veut dire que l'une de trois circonstances suivantes (au moins) a lieu:

1°. ou bien la suite $[\alpha_n]$ contient un nombre fini ou nul de nombres 1,

2°. ou bien la suite $[\beta_n]$ contient un nombre fini on nul de nombres 0,

3°. ou bien on a $\alpha_n \leqslant \beta_n$, $(n = 1, 2, 3 \ldots)$.

La variété $\Omega \equiv (1, 1, 1 \ldots)$ ne contient aucun élément, ainsi que toute autre variété qui n'est pas égale à $0 \equiv (0, 0, 0 \ldots)$.

N 3.

La relation primitive „A est conjoint de B" est désignée par $A \asymp B$.

Groupe d'axiomes B

I. *Si* $A \asymp B$, *on a* $B \asymp A$ *aussi*

on dit tout simplement que les variétés A et B sont conjointes.

$\mathrm{II}_{1,2}$. $$0 \not\asymp A$$

$$0 \neq A \prec B \textit{ entraîne } A \asymp B.$$

(*) „Les axiomes de la Théorie des probabilités" (Commun. de la Soc. Math. de Kharkow, T. XV, N 5—6, p. 245).

En particulier, on a, A étant non nulle, $A \asymp \Omega$, $A \asymp A$.

III. *Les relations, $A \asymp B$, $A^* \succ A$ entraînent $A^* \asymp B$.*

Donc, si $A \asymp B$, $A^* \succ A$, $B^* \succ B$, on a $A^* \asymp B^*$ (I et III).

Si $AB \neq 0$, on a $A \asymp B$ (II et III).

IV. *Si $A \asymp B + C$, on a l'une des relations (au moins)*

$$A \asymp B \quad ou \quad A \asymp C.$$

Il s'ensuit: si $A \asymp B_1 + B_2 + \cdots + B_n$ (somme finie!), on a $A \asymp B_k$, k étant un (au moins) des nombres $1, 2 \ldots n$.

Les propositions suivantes sont conséquences de III et IV:

1) De $A \divideontimes B$, $A^* \prec A$, $B^* \prec B$ il suit $A^* \divideontimes B^*$,

2) De $A \divideontimes B$, $A \divideontimes C$ il suit $A \divideontimes B + C$.

Considérons le cas spécial (qui est le plus important) de la classe de variétés élémentaires. Supposons que la notion de la limite d'une suite d'éléments $[A_n]$ est introduite jouissant de deux propriétés suivantes: 1°. si l'élément A est la limite de la suite $[A_n]$, il est aussi la limite de chaque suite partielle $[A_{p_n}]$; 2°. l'élément A est la limite de la suite $[A]$ dont tous les termes sont égaux à A. On définit, comme d'habitude, la variété (ou ensemble) dérivée A', ainsi que les dérivées d'ordres supérieurs finis on transfinis.

Sauf indication contraire, dans ce cas spécial la relation $A \asymp B$ est interprétée comme équivalente à la relation

$$AB + AB' + A'B \neq 0,$$

ce qui signifie: ou bien les ensembles A et B ont un élément commun ou bien il existe un élément-limite de l'un de ces ensembles qui fait partie de l'autre.

D'ailleurs, on pourrait interpréter la relation $A \asymp B$ comme équivalente à

$$A(B + B' + B'' + \cdots + B^{(\lambda)}) + B(A + A' + A'' + \cdots + A^{(\lambda)}) \neq 0$$

ou

$$(A + A' + A'' + \cdots + A^{(\lambda)})(B + B' + B'' + \cdots + B^{(\lambda)}) \neq 0,$$

λ désignant un nombre quelconque fini ou transfini.

N 4.

Revenons au cas général.

La variété A est appelée c o n n e x e, si elle n'est pas la somme de deux variétés non nulles et non conjointes, c'est-à-dire si des relations

$$A = X + Y, \quad X \divideontimes Y$$

il suit ou bien $X = 0$ ou bien $Y = 0$.

Il est évident que chaque élément est connexe, 0 aussi est connexe.

Théorème 1. Si la variété connexe A fait partie de $X + Y$, où $X \divideontimes Y$, on a ou bien $A \prec X$ ou bien $A \prec Y$.

Dém. De $A \prec X + Y$ on déduit $A = AX + AY$. Puisque $X \ast Y$, $AX \prec X$, $AY \prec Y$, on a $AX \ast AY$. Or, A étant connexe, l'une des variétés AX et AY est égale à 0. Soit $AY = 0$. Alors $A = AX \prec X$.

Théorème 2. Si les variétés connexes A et B sont conjointes, leur somme $A \dotplus B$ est connexe.

Dém. Soit $A + B$ non connexe: $A \dotplus B = X + Y$, $X \ast Y$, $X \neq 0$, $Y \neq 0$. En vertu du th. 1 on a ou bien $A \prec X$ ou bien $A \prec Y$. Soit $A \prec X$. De même on a ou bien $B \prec X$ ou bien $B \prec Y$. En admettant que $B \prec X$, on obtiendrait $A \dotplus B \prec X$, $Y = 0$. Soit, donc, $B \prec Y$. Alors, de $A \prec X$ et $X \ast Y$ il s'ensuit $A \ast B$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Théorème 3. Soit **A** une classe de variétés connexes (dont le nombre est > 1). Si $\Sigma = \Sigma \cdot (\mathbf{A})$ n'est pas connexe, on peut séparer des variétés de la classe **A** en deux classes $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ (toutes deux non vides) d'une telle manière que deux variétés A_1 et A_2 appartenant aux classes différentes soient toujours non conjointes.

Dém. En effet, soit $\Sigma = X + Y$, $X \ast Y$, $X \neq 0$, $Y \neq 0$. Chaque variété A de **A** fait partie ou bien de X ou bien de Y. Soit $\mathbf{A}_1$ la classe de variétés A qui font partie de X; de même, $\mathbf{A}_2$ la classe de variétés A qui font partie de Y. Si, par exemple, la classe $\mathbf{A}_2$ était vide, on aurait $Y = 0$. Soient A_1 une variété de la classe $\mathbf{A}_1$, A_2 une variété de la classe $\mathbf{A}_2$. Puisque $A_1 \prec X$, $A_2 \prec Y$, $X \ast Y$, on a $A_1 \ast A_2$.

Théorème 4. Inversement, soit **A** une classe **finie** de variétés connexes et non nulles; si l'on peut séparer **A** en deux classes non vides de la manière indiquée dans le théorème précédent, alors $\Sigma = \Sigma \cdot (\mathbf{A})$ n'est pas connexe.

Dém. On pose $X = \Sigma \cdot (\mathbf{A}_1)$, $Y = \Sigma \cdot (\mathbf{A}_2)$ et applique l'axiome IV *B*.

La généralisation au cas de la classe **A** infinie n'est pas possible, comme l'exemple d'un ensemble continu quelconque de E_n le montre.

La classe de variétés **A** est dite monotone s'il existe la relation d'inclusion entre deux variétés quelconques lui appartenant, c'est-à-dire si, quelles que soient A_1 et A_2 de **A**, on a ou bien $A_1 \prec A_2$ ou bien $A_1 \succ A_2$.

Théorème 5. Soit **A** une classe monotone de variétés connexes et non nulles. La somme $\Sigma = \Sigma \cdot (\mathbf{A})$ est connexe.

Dém. Dans le cas contraire, soient $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ deux classes construites d'après le th. 3. Soit A_1 une variété de $\mathbf{A}_1$, A_2 une variété de $\mathbf{A}_2$. Alors on a $A_1 \ast A_2$, $A_1 A_2 = 0$. Puisque **A** est monotone on peut supposer $A_1 \prec A_2$. Par conséquent, $A_1 = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

N 5.

La variété U est dite composant de la variété A, si elle satisfait aux conditions suivantes: 1°. U est connexe, 2°. $U \neq 0$, 3°. $U \prec A$, 4°. Si $U \prec X \prec A$ et si X est connexe, on a $X = U$.

Théorème 1. Si la variété B connexe et non nulle fait partie de la variété A, il existe un composant de A qui contient B.

Dém. Soit $\mathbf{C}_B^A$ la classe de variétés connexes, contenant B et contenu par A: par exemple, B apartient à $\mathbf{C}_B^A$. On s'assure que $\Sigma = \Sigma(\mathbf{C}_B^A)$ est le composant de A qui contient B. En effet, Σ est connexe: autrement on séparerait la classe $\mathbf{C}_B^A$ en deux classes (th. 3 N 4) d'une telle manière que des variétés appartenant aux classes différentes ne soient pas conjointes, ce qui est impossible, puisque toutes les variétés de $\mathbf{C}_B^A$ contiennent une partie commune $B \neq 0$. On a $\Sigma \prec A$, puisque toutes les variétés de $\mathbf{C}_B^A$ font partie de A. Enfin, supposons X connexe et $\Sigma \prec X \prec A$. Alors $B \prec \Sigma \prec X$, et X appartient à $\mathbf{C}_B^A$; donc, $X \prec \Sigma$, d'où $X = \Sigma$ c. q. f. d. (*).

Il est évident que, inversement, si la variété n'a pas de parties connexes, elle n'a pas de components.

Théorème 2. Deux composants de A non égaux ne sont pas conjoints.

Dém. Soient U_1 et U_2 deux composants de A tels que $U_1 \asymp U_2$. En vertu du th. 2 N 4, $U_1 \dot{+} U_2$ est connexe. Des relations $U_1 \prec U_1 \dot{+} U_2 \prec A$, $U_2 \prec U_1 \dot{+} U_2 \prec A$ on conclut, U_1 et U_2 étant composants de A: $U_1 \dot{+} U_2 = U_1$, $U_1 \dot{+} U_2 = U_2$, d'où $U_1 = U_2$.

Théorème 3. Une variété quelconque A est la somme de tous ses composants et d'une variété ne contenant pas de variétés connexes non nulles.

Dém. En désignant par $\mathbf{U}_A$ la classe des composants de A, on a $\Sigma(\mathbf{U}_A) \prec \mathrm{A}$. En posant $Z = \mathrm{A}\,\overline{\Sigma(\mathbf{U}_A)}$, on obtient $\mathrm{A} = \Sigma(\mathbf{U}_A) \dot{+} Z$ et s'assure aisément qu'aucune partie non nulle de Z n'est connexe.

En particulier, les cas $Z = 0$ ou $\Sigma(\mathbf{U}_A) = 0$ ne sont pas exclus.

Nous réservons le nom de variété régulière à une variété qui est égale à la somme de ses composants;

$$\mathrm{A} = \Sigma(\mathbf{U}_A).$$

Toutes les variétés élémentaires sont régulières.

La proposition suivante est réciproque aux théorèmes 2—3.

Théorème 4. Soit $\mathbf{U}$ une classe de variétés connexes et non nulles. Posons $A = \Sigma(\mathbf{U})$. Si l'on a $U \divideontimes A\overline{U}$ quelle que soit la variété U de la classe $\mathbf{U}$, la classe $\mathbf{U}$ est la classe de composants de A.

Dém. Si X est variété connexe, on déduit de $U \prec X \prec A$ que $X = U \dot{+} X\overline{U}$, et, puisque $U \divideontimes A\overline{U}$ entraîne $U \divideontimes X\overline{U}$, U étant non nulle, on conclut $X\overline{U} = 0$, donc, $X \prec U$, $X = U$. Cela veut dire que U est un composant de A.

Inversement, soit V un composant de A. Puisque $V \prec A = \Sigma(\mathbf{U})$, on a $V = \Sigma(V\mathbf{U})$. Toutes les variétés de la classe $V\mathbf{U}$ ne peuvent pas être

(*) En renonçant à l'axiome II, A transfini on aurait à prendre ce théorème pour l'axiome nouveau.

nulles (car $V \neq 0$), donc soit $VU^* \neq 0$. Alors $V = VU^* + V\overline{U^*}$, et de $U^* \divideontimes A\overline{U^*}$, $VU^* \prec U^*$, $V\overline{U^*} \prec A\overline{U^*}$ on déduit, V étant connexe, $VU^* = 0$ (puisque $VU^* \neq 0$). Donc, $V = VU^*$, $V \prec U^* \prec A$. U^* étant connexe et V composant de A, on en conclut $V = U^*$ c. q. f. d.

Corollaire. En particulier, si U est une classe **finie** de variétés U non nulles, connexes, et que $U_1 \divideontimes U_2$, quelles que soient U_1 et U_2 de U ($U_1 \neq U_2$), U est la classe de composants de $A = \Sigma$(U).

Il suffit de se rappeler l'axiome IV B.

Théorème 5. Si U est un composant de A, et $B \divideontimes A$, U est composant de $A + B$ aussi.

Dém. Admettons $U \prec X \prec A + B$, X étant connexe. En vertu du th. 1 N 4 on conclut $X \prec A$, parce que de $X \prec B$ on déduirait $U \prec B$, tandis que $UB = 0$. Alors de $U \prec X \prec A$ il suit que $X = U$, puisque U est composant de A.

Théorème 6. Si U est un composant de $A + B$, et $U \prec A$, U est un composant de A aussi.

Dém. X étant connexe, $U \prec X \prec A + B$ entraîne $X = U$. A fortiori $U \prec X \prec A$ l'entraîne.

Soit B une partie connexe et non nulle de A. On désignera le composant de A qui contient B par U_B^A.

Théorème 7. B_1 et B_2 étant deux parties connexes et non nulles de A, s'il existe une variété connexe C telle que

$$B_1,\ B_2 \prec C \prec A,$$

B_1 et B_2 font partie d'un même composant de A:

$$U_{B_1}^A = U_{B_2}^A.$$

Dém. $U_{B_1}^A + C$ étant connexe (th. 2 N 4), on a $U_{B_1}^A \prec U_{B_1}^A + C \prec A$, d'où il suit $U_{B_1}^A + C = U_{B_1}^A$, $C \prec U_{B_1}^A$. De même $C \prec U_{B_2}^A$. Donc, $U_{B_1}^A\, U_{B_2}^A \neq 0$ et, enfin $U_{B_1}^A = U_{B_2}^A$ (th. 2 N 5).

Corollaire. B^* étant connexe, si $0 \neq B^* \prec U_B^A$, on a $U_{B^*}^A = U_B^A$. (On prend: $C = U_B^A$).

Théorème 8. B étant connexe et non nulle, la relation $B \prec A \prec A^*$ entraîne $U_B^A \prec U_B^{A^*}$.

Dém. $U_B^A + U_B^{A^*}$ étant connexe, de $U_B^{A^*} \prec U_B^A + U_B^{A^*} \prec A^*$ on déduit $U_B^A + U_B^{A^*} = U_B^{A^*}$, d'où il vient $U_B^A \prec U_B^{A^*}$.

Théorème 9. Soit $0 \neq Q \prec A$, A et Q étant supposées connexes. Alors, si U est un composant de $A\overline{Q}$, $A\overline{U}$ est connexe.

(Cette proposition est d'importance particulière pour la théorie qui va suivre).

Dém. Supposons que $A\overline{U}$ ne soit pas connexe:

$$A\overline{U} = X + Y,\quad X \divideontimes Y,\quad X \neq 0,\quad Y \neq 0.$$

Q étant connexe et faisant partie de $A\overline{U}$ (car $U \prec A\overline{Q}$), on a ou bien $Q \prec X$ ou bien $Q \prec Y$ (th. 1 N 4). Soit $Q \prec X$; alors $Y \prec A\overline{Q}$.

Considérons la variété $U+Y$. Elle ne peut être connexe: en effet, $U+Y$ étant connexe, de $U \prec U+Y \prec A\bar{Q}$ on déduirait $U+Y=U$, ce qui est incompatible avec $Y \neq 0$. Par conséquent, on peut poser:

$$U+Y=X_1+Y_1,\quad X_1 \divideontimes Y_1,\quad X_1 \neq 0,\quad Y_1 \neq 0.$$

Puisque U est connexe, nons avons ou bien $U \prec X_1$, ou bien $U \prec Y_1$ (th. 1 N 4). Soit $U \prec X_1$. Donc, $Y_1 \prec Y$, et de $X \divideontimes Y$ il suit $X \divideontimes Y_1$.

On a, plus loin:

$$A=U+A\bar{U}=U+(X+Y)=X+(U+Y)=X+(X_1+Y_1)=(X+X_1)+Y_1.$$

En vertu de l'axiome IV B les relations $X \divideontimes Y_1$, $X_1 \divideontimes Y_1$ ont pour conséquence $X+X_1 \divideontimes Y_1$. Puisque $X+X_1 \neq 0$, $Y_1 \neq 0$, A n'est pas connexe, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc, $A\bar{U}$ est connexe.

Immédiatement, on obtient la généralisation suivante.

Théorème 10. Soient A et Q deux variétés connexes telles que $0 \neq Q \prec A$. Alors, si Σ est la somme d'une classe **finie** de composants de $A\bar{Q}$, $A\bar{\Sigma}$ est connexe.

Ce n'est pas le cas pour une classe infinie, comme l'exemple suivant va le montrer. Considérons le plan Euclidien. A soit formé: 1) du segment $Q(0 \leqslant x \leqslant 1,\ y=0)$, 2) des segments $U_n(x=a_n,\ 0<y \leqslant 1,\ 1 \geqslant a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots,\ \lim a_n=0,\ n=1, 2, 3\cdots)$, 3) du point $P(x=0, y=1)$. Ainsi l'on a $A=Q+\sum_{n=1}^{\infty} U_n+P$. Il est aisé de s'assurer que A est connexe. Les segments U_n sont composants de $A\bar{Q}$ (ainsi que le point P). Cependant $A\overline{\sum_{1}^{\infty} U_n}=Q+P$ n'est pas connexe.

N 6.

On dit que Q est situé entre P et R dans A, si les conditions suivantes sont satisfaites: 1°. $P, Q, R \neq 0$, 2°. P, Q, R sont connexes, 3°. $PQ=QR=RP=0$, 4°. $P, Q, R \prec A$, 5°. $U_P^A=U_R^A$, 6°. $U_P^{A\bar{Q}} \neq U_R^{A\bar{Q}}$.

On représentera ce fait par la notation:

$$P|Q|R(A).$$

Il est évident que les relations $P|Q|R(A)$ et $R|Q|P(A)$ sont équivalentes.

Théorème 1. La relation $P|Q|R(A)$ implique $U_P^A=U_Q^A=U_R^A$.

Dém. D'après 5° on a $U_P^A=U_R^A=U$. Soit $U_Q^A \neq U$. Alors $U_Q^A U=0$ (th. 2 N 5), donc $QU=0$, $U \prec A\bar{Q}$. Puisque $P, R \prec U$, on a $U_P^{A\bar{Q}}=U_R^{A\bar{Q}}$ (th. 7 N 5) ce qui est incompatible avec l'hypothèse $P|Q|R(A)$.

Théorème 2. P^* étant une variété connexe, telle que $0 \neq P^* \prec A$, $P^*Q=P^*R=0$, $P^* \asymp P$, la relation $P|Q|R(A)$ entraîne $P^*|Q|R(A)$.

Dém. D'abord, on a $U^A_{P^*} = U^A_R$. En effet, puisque $P \dotplus P^*$ est connexe, le th. 7 N 5 nous donne $U^A_{P^*} = U^A_P$, d'où il suit $U^A_{P^*} = U^A_R$, puisque $U^A_P = U^A_R$. De même $U^{A\bar{Q}}_{P^*} = U^{A\bar{Q}}_P$, et de $U^{A\bar{Q}}_P \neq U^{A\bar{Q}}_R$ on conclut $U^{A\bar{Q}}_{P^*} \neq$ $\neq U^{A\bar{Q}}_R$.

Théorème 3. Q^* étant connexe, telle que $Q \prec Q^* \prec A$, $Q^*P = Q^*R = 0$, la relation $P|Q|R(A)$ entraîne $P|Q^*|R(A)$.

Dém. Du théorème 8 N 5 il résulte: $U_P^{A\overline{Q^*}} \prec U_P^{A\bar{Q}}$, puisque $P \prec A\overline{Q^*} \prec$ $\prec A\bar{Q}$. De même, $U_R^{A\overline{Q^*}} \prec U_R^{A\bar{Q}}$. Donc, $U_P^{A\bar{Q}} \neq U_R^{A\bar{Q}}$ entraînant $U_P^{A\bar{Q}} \divideontimes U_R^{A\bar{Q}}$ (th. 2 N 5), on a $U_P^{A\overline{Q^*}} \divideontimes U_R^{A\overline{Q^*}}$, d'où $U_P^{A\overline{Q^*}} \neq U_R^{A\overline{Q^*}}$.

Théorème 4. B étant supposée connexe, telle que $B \prec A$, P, Q, $R \prec B$, la relation $P|Q|R(A)$ entraîne $P|Q|R(B)$.

Dém. De $U_P^{A\bar{Q}} \divideontimes U_R^{A\bar{Q}}$, $U_P^{B\bar{Q}} \prec U_P^{A\bar{Q}}$, $U_R^{B\bar{Q}} \prec U_R^{A\bar{Q}}$ on conclut $U_P^{B\bar{Q}} \divideontimes$ $\divideontimes U_R^{B\bar{Q}}$, d'où il suit $U_P^{B\bar{Q}} \neq U_R^{B\bar{Q}}$.

Théorème 5. Chacune des relations

$$P|Q|R(A), \quad Q|R|P(A), \quad R|P|Q(A)$$

est incompatible avec une autre.

Dém. On s'appuie sur le th. 9 N 5.

Soit $P|Q|R(A)$. Posons: $U^A_P = U^A_R = B$. Si $U^A_Q \neq B$, les relations $Q|R|P(A)$ et $R|P|Q(A)$ n'ont pas lieu, puisque $U^A_Q \neq U^A_P$, $U^A_Q \neq U^A_R$.

Supposons donc: $U^A_P = U^A_Q = U^A_R = B$. Alors on a $P|Q|R(B)$ (th. 4).

Soit, pour abréger, $U_P^{B\bar{Q}} = U$, $U_R^{B\bar{Q}} = U^*$.

En vertu du th. 9 N 5 $B\bar{U}$ est connexe.

Puisque $P \prec U$, on a $B\bar{U} \prec B\bar{P}$.

D'un autre côté $R \prec U^*$, et puisque $UU^* = 0$, on a $R \prec B\bar{U}$.

Enfin, de $U \prec B\bar{Q}$ résulte $Q \prec B\bar{U}$.

Donc, $U_Q^{B\bar{P}} = U_R^{B\bar{P}}$ (th. 7 N 5).

Cela veut dire que la relation $R|P|Q(B)$ n'a pas lieu.

Par conséquent, la relation $R|P|Q(A)$ n'a pas lieu aussi (th. 4).

De même, on démontre l'impossibilité de $Q|R|P(A)$.

Théorème 6. Etant donné $B \succ A$, de $P|Q|R(A)$ résulte $P|Q|R(B)$ ou bien il n'existe aucune des relations

$$P|Q|R(B), \quad Q|R|P(B), \quad R|P|Q(B).$$

Si, en outre, A est un composant de B, on a nécessairement $P|Q|R(B)$.

Dém. En effet, de $Q|R|P(B)$ on déduirait, par exemple, $Q|R|P(A)$ (th. 3) ce qui est incompatible avec $P|Q|R(A)$.

Soit A un composant de B. Supposons que la relation $P|Q|R(B)$ n'est pas satisfaite. Alors $U_P^{B\bar{Q}} = U_R^{B\bar{Q}} = U \prec A$, donc $U \prec A\bar{Q}$. Puisque P, $R \prec U \prec A\bar{Q}$, U étant connexe, on en conclut $U_P^{A\bar{Q}} = U_R^{A\bar{Q}}$ (th. 7 N 5) ce qui est incompatible avec $P|Q|R(A)$.

Remarque. Dans les théorèmes suivants, la variété A étant supposée toujours la même, on écrira tout simplement $P|Q|R$ au lieu de $P|Q|R(A)$.

Théorème 7. Sétant supposée connexe, telle que $0 \neq S \prec A$, $PS = QS = RS = 0$, $U_S^A = U_P^A$, la relation $P|Q|R$ entraîne l'une des relations $P|Q|S$ ou $R|Q|S$ (au moins).

Dém. D'abord, la condition 5° est remplie: $U_S^A = U_P^A = U_R^A$. En supposant les relations $P|Q|S$ et $R|Q|S$ non satisfaites, on aurait $U_P^{A\bar{Q}} = U_S^{A\bar{Q}}$ $U_R^{A\bar{Q}} = U_S^{A\bar{Q}}$; donc, on en déduirait $U_P^{A\bar{Q}} = U_R^{A\bar{Q}}$, c'est-à-dire $P|Q|R$ ne serait pas satisfaite.

Théorème 8. Si $P|Q|R$ et $Q|R|S$, on a $P|R|S$ et $P|Q|S$.

Dém. On a $PS = 0$. Autrement $P + S$ serait connexe, et l'on conclurait $P + S|Q|R$ et $Q|R|P + S$ (th. 2) ce qui est impossible en vertu du th. 5.

On déduit du th. 1: $U_P^A = U_Q^A = U_R^A = U_S^A$.

Puisque $P|Q|R$ est satisfaite, $P|R|Q$ ne l'est pas (th. 5). Donc, $U_P^{A\bar{R}} = U_Q^{A\bar{R}}$. D'un autre côté, $Q|R|S$ entraîne $U_Q^{A\bar{R}} \neq U_S^{A\bar{R}}$. Il en résulte $U_P^{A\bar{R}} \neq U_S^{A\bar{R}}$, d'oú il suit $P|R|S$.

On obtient $P|Q|S$ par le même raisonnement après qu'on change de place les relations $P|Q|R$ et $Q|R|S$.

Théorème 9. Si $P|Q|R$ et $Q|S|R$, on a $P|S|R$ et $P|Q|S$.

Dém. On démontre comme dans le théorème précédent: $PS = 0$, $U_P^A = U_Q^A = U_R^A = U_S^A$.

Posons $U_Q^{A\bar{S}} = U$, $U_R^{A\bar{S}} = U^*$. On a $UU^* = 0$, d'où il résulte $QU^* = 0$, $U^* \prec A\bar{Q}$.

Admettons que $P|S|R$ n'a pas lieu. Alors $U_P^{A\bar{S}} = U_R^{A\bar{S}} = U^*$. Donc, $P \prec U^*$, $R \prec U^*$.

En vertu du th. 7 N 5 on obtient $U_P^{A\bar{Q}} = U_R^{A\bar{Q}}$, c'est-à-dire la relation $P|Q|R$ n'est pas satisfaite, contrairement à l' hypothèse. Donc, on a $P|S|R$.

D' autre part, de $P|Q|R$ on déduit ou bien $P|Q|S$ ou bien $R|Q|S$ (th. 7) Mais $R|Q|S$ est incompatible avec $Q|S|R$ (th. 5); donc, on a $P|Q|S$.

Théorème 10. Soit $QS = 0$. Si $P|Q|R$ et $P|S|R$, on a ou bien $P|S|Q$ et $S|Q|R$ ou bien $P|Q|S$ et $Q|S|R$.

Dém. On a d'abord: $U_P^A = U_Q^A = U_R^A = U_S^A$.

De $P|Q|R$ on déduit, en vertu du th. 7: ou bien $P|Q|S$ ou bien $R|Q|S$. De même, en partant de la relation $P|S|R$, on obtient ou bien $P|S|Q$ ou bien $R|S|Q$. Les relations $P|Q|S$ et $P|S|Q$ étant incompatibles (th. 5), ainsi que $R|Q|S$ et $R|S|Q$, il reste à prendre ou bien $P|Q|S$ et $R|S|Q$ ou bien $R|Q|S$ et $P|S|Q$.

Théorème 11. Si les relations $P|Q|R$, $S|Q|R$ sont remplies, la relation $P|R|S$ ne l'est pas.

Dém. En effet, de $P|R|S$ et $R|Q|S$ il résulte $P|R|Q$ (th. 9), ce qui est incompatible avec $P|Q|R$ (th. 5).

N 7.

Nous dirons que les variétés de la classe **P** sont alignées dans A, si, quelles que soint P_1, P_2, P_3 de **P** (non égales entre elles), l'une des relations.

$$P_1 | P_2 | P_3 (A), \quad P_2 | P_3 | P_1 (A), \quad P_3 | P_1 | P_2 (A)$$

est toujours satisfaite. On sait d'ailleurs que deux de ces relations ne peuvent subsister simultanément.

La classe **P** est dite ordonnée, si une définition de l'ordre est donnée au moyen de la relation $P_1 \subset P_2$ („P_1 précéde P_2"), telle que: 1° quelles que soient P_1 et P_2 ($P_1 \neq P_2$) de **P**, on a ou bien $P_1 \subset P_2$ ou bien $P_2 \subset P_1$, et non simultanément, 2° $P_1 \subset P_2$ et $P_2 \subset P_3$ entraînent $P_1 \subset P_3$ (transitivité).

La relation $P_2 \supset P_1$ („P_2 suit P_1") est définie comme équivalente à $P_1 \subset P_2$.

Théorème. Si les variétés de la classe **P** sont alignées dans A, on peut définir les relations d'ordre dans la classe **P** d'une telle manière que $P_1 \subset P_2 \subset P_3$ entraîne $P_1 | P_2 | P_3 (A)$, quelles que soient P_1, P_2, P_3 de **P** (non égales entre elles). (Par conséquent, $P_1 | P_2 | P_3 (A)$ entraînera ou bien $P_1 \subset P_2 \subset P_3$ ou bien $P_3 \subset P_2 \subset P_1$).

Autrement dit, si les variétés de **P** sont alignées dans A, la relation à trois termes „être situé entre dans A" peut être réduite à une relation á deux termes „précéder".

On démontre le théorème en s'appuyant sur les théorèmes 8—10 du N 6.

En choisissant d'abord arbitrairement $\underset{\cdot}{P}$ et $\dot{P}$ de **P**, on pose arbitrairement aussi:

$$\underset{\cdot}{P} \subset \dot{P}.$$

On sépare toutes les variétés P de **P** autres que $\underset{\cdot}{P}$ et $\dot{P}$ en trois classes **P**$'$, **P**$''$, **P**$'''$ suivant que la relation $P | \underset{\cdot}{P} | \dot{P}$ ou $\underset{\cdot}{P} | P | \dot{P}$ ou $\underset{\cdot}{P} | \dot{P} | P$ est satisfaite (*). Chaque variété appartient á une seule des trois classes (th. 5 N 6). Admettons que P appartienne à **P**$'$. Alors, de $P | \underset{\cdot}{P} | \dot{P}$ il doit suivre ou bien $P \subset \underset{\cdot}{P} \subset \dot{P}$ ou bien $\dot{P} \subset \underset{\cdot}{P} \subset P$. Or, la dernière relation ne subsiste pas, puisque $\underset{\cdot}{P} \subset \dot{P}$; donc, on a à poser $P \subset \underset{\cdot}{P}$, $P \subset \dot{P}$.

De même, on pose, P appartenant à **P**$''$: $P \supset \underset{\cdot}{P}$, $P \subset \dot{P}$, et, P appartenant à **P**$'''$: $P \supset \underset{\cdot}{P}$, $P \supset \dot{P}$.

(*) Il n'est pas exclu que certaines des classes **P**$'$, **P**$''$, **P**$'''$ soient vides.

Soient P_1 et P_2 ($P_1 \neq P_2$) deux variétés de **P** autres que $\underset{\cdot}{P}$ et $\dot{P}$. On a à distinguer six cas suivant que P_1 et P_2 appartiennent à l' une ou l'autre des classes **P**$'$, **P**$''$, **P**$'''$, comme le tableau suivant le montre:

	P$'$	**P**$''$	**P**$'''$
1	● ●		
2		● ●	
3			● ●
4	●	●	
5		●	●
6	●		●

Considérons d'abord le cas 4: soit P_1 la variété appartenant à **P**$'$, P_2 — celle appartenant à **P**$''$. On a $P_1 \subset \underset{\cdot}{P}$, $\underset{\cdot}{P} \subset P_2$; donc, pour satisfaire à la transitivité, on posera $P_1 \subset P_2$.

En général, P_1 et P_2 appartenant à des classes différentes (cas 4, 5, 6) on a à poser $P_1 \subset P_2$ ou $P_2 \subset P_1$ suivant que l'indice de la classe à laquelle appartient P_1 est supérieur ou inférieur à celui de la classe à laquelle appartient P_2.

Dans le cas 1 on a $P_1 | \underset{\cdot}{P} | \dot{P}$ et $P_2 | \underset{\cdot}{P} | \dot{P}$; donc, $P_1 | \dot{P} | P_2$ n'est pas satisfaite (th. 11 N 6). Par conséquent, on a ou bien $P_1 | P_2 | \dot{P}$ ou bien $P_2 | P_1 | \dot{P}$. Soit, pour fixer les idées, $P_1 | P_2 | \dot{P}$ ce qui entraîne $P_1 | P_2 | \underset{\cdot}{P}$ (th. 9). Il doit en suivre ou bien $P_1 \subset P_2 \subset \dot{P}$ ou bien $P_1 \supset P_2 \supset \dot{P}$; le dernier étant impossible, puisque P_1 et P_2 appartiennent à **P**$'$, on pose nécessairement $P_1 \subset P_2$.

De même, dans le cas 3 on a ou bien $\underset{\cdot}{P} | P_1 | P_2$ ou bien $\underset{\cdot}{P} | P_2 | P_1$. On pose (respectivement) $P_1 \subset P_2$ ou $P_2 \subset P_1$.

Enfin, dans le cas 2 de $\underset{\cdot}{P} | P_1 | \dot{P}$ et $\underset{\cdot}{P} | P_2 | \dot{P}$ on déduit ou bien $\underset{\cdot}{P} | P_1 | P_2$, $P_1 | P_2 | \dot{P}$ ou bien $\underset{\cdot}{P} | P_2 | P_1$, $P_2 | P_1 | \dot{P}$; on a à poser (resp.) $P_1 \subset P_2$ ou $P_2 \subset P_1$.

On a défini ainsi une relation $P_1 \subset P_2$ ou $P_2 \subset P_1$ entre P_1 et P_2, P_1 et P_2 étant soumis à une seule condition $P_1 \neq P_2$. Nous avons à vérifier maintenant que 1) cette relation est transitive, 2) de $P_1 \subset P_2 \subset P_3$ il suit $P_1 | P_2 | P_3$.

Evidemmeut, il suffit de supposer que P_1, P_2, P_3 sont autres que P et $\dot{P}$. Dix cas sont possibles, indiqués par le tableau suivant:

	P′	P″	P‴
1	●●●		
2		●●●	
3			●●●
4	●●	●	
5	●●		●
6	●	●●	
7		●●	●
8	●		●●
9		●	●●
10	●	●	●

Dans les cas 1, 2, 4, 6, soit $P_1 \subset P_2$, $P_2 \subset P_3$, c'est-à-dire $P_1 | P_2 | \dot{P}$, $P_2 | P_3 | \dot{P}$. Donc, $P_1 | P_2 | P_3$ et $P_1 | P_3 | \dot{P}$ (th. 9), la dernière relation ayant pour conséquence $P_1 \subset P_3$.

Les cas 3, 2, 9, 7 se laissent traiter d' une manière semblable.

Dans les cas 5, 10 soit $P_1 \subset P_2 \subset \dot{P}$; P_1, $P_2 \subset \dot{P} \subset P_3$. De là on déduit $P_1 | P_2 | \dot{P}$, $P_1 | \dot{P} | P_3$, $P_2 | \dot{P} | P_3$. En vertu des th. 8 ou 9 on en obtient $P_1 | P_2 | P_3$ et $P_1 | \dot{P} | P_3$, ou $P_1 \subset P_3$.

De même, dans les cas 8, 10.

R e m a r q u e. En revoyant la démonstration précédente, on s'aperçoit que, P et $\dot{P}$ étant choisis arbitrairement et la relation $P \subset \dot{P}$ étant imposée, toutes les autres relations en sont conséquences nécessaires. Il est évident qu'en changeant le sens de la relation initiale, c'est-à-dire en posant $P \supset \dot{P}$, on aurait à changer le sens de toutes les autres relations. On s'assure que, quel que soit le choix de deux variétés initiales P et $\dot{P}$, on vient toujours à l'une de ces deux systèmes de relations. Donc: c' e s t d e d e u x m a n i è r e s d i f f é r e n t e s q u' i l e s t p o s s i b l e d'o r d o n n e r (o u o r i e n t e r) l a c l a s s e P. T o u t e s l e s r e l a t i o n s d' o r d r e c h a n g e n t d e s e n s e n p a s s a n t d e l' u n e o r i e n t a t i o n à l' a u t r e.

N 8.

Une variété L s'appelle variété linéaire (ou ligne) simple si: 1°. chaque variété connexe P (qui n'est pas élément) telle que $0 \neq P \prec L$ contient une partie connexe Q telle que $Q \neq 0$, $Q \neq P$, 2°. P et Q étant parties connexes de L, $Q\overline{P}$ est une variété régulière (N 5), 3°. L est connexe, 4°. quelle que soit la classe **P**, satisfaisant aux conditions énumerées au début du N 7 (en remplaçant A par L), les variétés de cette classe sont alignées dans L. D' ailleurs, en vertu du théorème du N 7, il est suffisant à supposer (condition 4°) que les variétés des classes formées par trois variétés soient alignées dans L.

Théorème 1. Une partie connexe de la variété linéaire est aussi linéaire.

Pour la démonstration il suffit de se rappeler le th. 4 N 6.

Théorème 2. L étant linéaire et une variété connexe Q^* satisfaisant á la condition $0 \neq Q^* \prec Q$, de $P|Q|R(L)$ il suit $P|Q^*|R(L)$.

Dém. Puisque P, Q^*, R sont alignées dans L, l'une des relations

$$P|Q^*|R(L), \quad Q^*|R|P(L), \quad R|P|Q^*(L)$$

est satisfaite. Cependant $Q^*|R|P(L)$ (resp. $R|P|Q^*(L)$) entraînerait $Q|R|P(L)$ (resp. $R|P|Q(L)$ (th. 2 N 6) ce qui est incompatible avec $P|Q|R(L)$ (th. 5 N 6). Donc, on a $P|Q^*|R(L)$.

Théorème 3. P étant une partie connexe et non nulle de la variété linéaire L, $L\overline{P}$ est connexe ou bien consiste de deux components.

Dém. D'apres 2°, $L\overline{P}$ est régulière. Soient U_1, U_2, U_3 — trois components de $L\overline{P}$. Alors on a

$$U_1|P|U_2(L), \quad U_2|P|U_3(L), \quad U_3|P|U_1(L).$$

D'autre part, U_1, U_2, U_3 étant alignées dans L, on a l'une des relations

$$U_1|U_2|U_3(L), \; U_2|U_3|U_1(L), \quad U_3|U_1|U_2(L),$$

soit la première. Alors (en vertu du th. 9 N 6) on a:

$$P|U_2|U_3(L),$$

ce qui est incompatible avec $U_2|P|U_3(L)$.

Une partie S non nulle et connexe de L soit appelée segment de L, si $L\overline{S}$ est connexe et non nulle. Pour que S soit un segment de L, il est nécessaire et suffisant que les conditions suivantes soient satisfaites: 1°. $S \neq 0$, $S \neq L$, 2°. S est connexe, 3°. $S \prec L$, 4°. S n'est pas entre deux variétés dans L. Il est évident que, S étant un segment de L, $L\overline{S}$ l'est aussi.

S'il existe deux components de $L\overline{P}$, P étant supposée une partie connexe et non nulle de L, on les désignera par P' et P''.

Théorème 4. Si la variété linéaire L n'est pas un élément (ce qui n'est pas exclu par la définition), elle contient des segments. En particulier, P étant une partie connexe (non segment de L) et non nulle de L, P' et P'', ainsi que $P+P'$ et $P+P''$ sont des segments de L.

Dém. D' après 1°, L contient une partie connexe P telle que $P \neq 0$, $P \neq L$. Supposons que P n' est pas un segment de L. Pour s' assurer que $P+P'$ et $P+P''$ sont connexes, il suffit de se rapporter au th. 9 N 5.

Si S_1, S_2, S_3 sont des segments de L, il est impossible que les relations $S_1S_2 = S_2S_3 = S_3S_1 = 0$ soient satisfaites (on obtiendrait alors l'une des relations $S_1|S_2|S_3(L)$, $S_2|S_3|S_1(L)$, $S_3|S_1|S_2(L)$. De plus, on démontre la proposition suivante.

Théorème 5. S_1, S_2, S_3 étant des segments de L, l' une (au moins) des relations de l'inclusion

$$\begin{array}{ccc} S_2 \prec S_3 & S_3 \prec S_1 & S_1 \prec S_2 \\ S_3 \prec S_2 & S_1 \prec S_3 & S_2 \prec S_1 \end{array}$$

est satisfaite.

Dém. Remarquons d'abord que, si un segment S contient une partie connexe P (non segment) de L, on a ou bien $S \succ P'$ ou bien $S \succ P''$. En effet, $S \succ P$ entraîne $A\overline{S} \prec A\overline{P} = P' + P''$. Puisque $P' \not\asymp P''$, on a ou bien $A\overline{S} \prec P'$ ou bien $A\overline{S} \prec P''$ (th. 1 N 4). Soit $A\overline{S} \prec P'$. Alors $S \succ P + P'' \succ P''$.

Admettons maintenant qu'aucune des six relations ci-dessus n'est satisfaite, c'est-á-dire soit

$$S_i \not\prec S_j \quad (i, j = 1, 2, 3 \ ; \ i \neq j).$$

Alors $S_i\overline{S}_j \neq 0$. En vertu de la condition 2°, $S_i\overline{S}_j$ est régulière. Donc $S_i\overline{S}_j$, contient une variété P_{ij} connexe et non nulle. On a, par conséquent:

$$P_{ij} \prec S_i \qquad (1)$$
$$P_{ij}S_j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3; \ i \neq j) \qquad (2)$$

Conformément au th. 3:

$$L = P_{ij} + P'_{ij} + P''_{ij}$$

(où l' on convient de poser $P''_{ij} = 0$ si P_{ij} est segment de L). D'après la remarque faite plus haut on peut supposer:

$$S_i \succ P''_{ij}. \qquad (3)$$

La relation (2) fournit $S_j \prec P''_{ij} + P'_{ij}$, d'où il suit o u bien $S_j \prec P'_{ij}$ ou bien $S_j \prec P''_{ij}$ (th. 1 N 4). Si $S_j \prec P''_{ij}$, on a, à cause de (3): $S_j \prec S_i$, et le théorème est démontré.

Il reste à supposer:

$$S_j \prec P'_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3; \ i \neq j) \qquad (4)$$

(1) et (4) donnent en particulier:

$$P_{12} \prec S_1 \prec P'_{31}$$
$$P_{23} \prec S_2 \prec P'_{12}, \qquad (5)$$
$$P_{31} \prec S_3 \prec P'_{23},$$

d'où il suit que $P_{12}P_{31} = P_{23}P_{12} = P_{31}P_{23} = 0$. On en conclut que P_{12}, P_{23}, P_{31} sont alignées dans L, ce qui entraîne l'une des relations $P_{12} | P_{23} | P_{31} (L)$, $P_{23} | P_{31} | P_{12} (L)$, $P_{31} | P_{12} | P_{23} (L)$. Supposons, par exemple, que c'est la première qui a lieu: $P_{12} | P_{23} | P_{31} (L)$. Cela veut dire que P_{12} et P_{31} font partie de deux components différents de $L\overline{P}_{23}$. Puisque $P_{31} \prec P'_{23}$ (à cause de (5)), on a $P_{12} \prec P''_{23}$. On en conclut, à l'aide de $P''_{23} \prec S_2$ (3), que $P_{12} \prec S_2$. La relation dernière est en contradiction avec $P_{12}S_2 = 0$ (2). Donc, la supposition (4) est à rejeter.

Théorème 6. Si S_1 et S_2 sont deux segments de L tels que $S_1 \not\prec S_2$, $S_2 \not\prec S_1$, l'une (au moins) des relations

$$S_1S_2 = 0, \quad S_1 \dotplus S_2 = L$$

est satisfaite.

Dém. Considérons trois segments S_1, S_2 et $L\overline{S}_1$. Puisque les relations

$$S_1 \prec S_2, \quad S_1 \prec L\overline{S}_1$$
$$S_2 \prec S_1, \quad L\overline{S}_1 \prec S_1$$

ne sont pas satisfaites, ou a, en vertu du théorème précédent, ou bien $S_2 \prec L\overline{S}_1$, ou bien $L\overline{S}_1 \prec S_2$, ce qui revient (resp.) à $S_1S_2 = 0$ ou $S_1 \dotplus S_2 = L$.

Théorème 7. S'il existe une relation de l'inclusion entre les segments S_1 et S_2, ainsi que entre les segments S_2 et S_3, il en existe une entre S_1 et S_3 aussi.

Dém. Quatre cas sont possibles: 1) $S_1 \prec S_2$, $S_2 \prec S_3$, 2) $S_1 \prec S_2$, $S_2 \prec S_3$ 3) $S_1 \prec S_2$, $S_2 \prec S_3$, 4) $S_1 \succ S_2$, $S_2 \prec S_3$. Il suffit de considérer les cas 3 — 4.

Dans le cas 3 supposons que $S_1 \not\prec S_3$, $S_3 \not\prec S_1$. Alors on a ou bien $S_1S_3 = 0$ ou bien $S_1 \dotplus S_3 = L$ (th. 6). Si $S_1S_3 = 0$, il n'existe pas de relations de l'inclusion entre les segments S_1, S_3, $L\overline{S}_2$ ce qui est en contradiction avec le th. 5. Si $S_1 \dotplus S_3 = L$, on conclut $S_2 \succ S_1 \dotplus S_3 = L$, $S_2 = L$, donc S_2 n'est pas un segment.

Le cas 4 se ramene au cas 3, car $S_1 \succ S_2$ est équivalent à $L\overline{S}_2 \succ L\overline{S}_1$, $S_2 \prec S_3$ à $L\overline{S}_3 \prec L\overline{S}_2$.

Théorème 8. Soit S la classe de tous les segments de L. La classe S peut être séparée en deux classes S′ et S″ telles qu'il existe ou non une relation de l'inclusion entre deux segments suivant qu'ils appartiennent à une même classe ou bien à des classes différentes.

C'est le corollaire des théorèmes 5 et 7.

Théorème 9. Les segments S' et S'' appartenant respectivement aux classes $\mathbf{S}'$ et $\mathbf{S}''$, $S'S''$ est connexe.

Dém. De la relation $S'S'' = S'\overline{LS''}$ ou conclut que $S'S''$ est régulière (2°). Soient U_1 et U_2 deux composants non égaux de $S'S''$, ainsi que $U_1 \divideontimes U_2$.

Si S'' appartient à la classe $\mathbf{S}''$, le segment $\overline{LS''}$ appartient à la classe $\mathbf{S}'$. Donc, on a ou bien $S' \prec \overline{LS''}$ ou bien $S' \succ \overline{LS''}$. Puisque $S'S'' \neq 0$, $S' \prec \overline{LS''}$ n'est pas possible, et, par conséquent, $S' \succ \overline{LS''}$. En se rappelant que $S'S'' = S'\overline{LS''}$, on obtient: $U_1 | \overline{LS''} | U_2 (S')$. Il en suit $U_1 | \overline{LS''} | U_2 (L)$, puisque de $U_1 | U_2 | \overline{LS''} (L)$, par exemple, on conclurait $U_1 | U_2 | \overline{LS''} (S')$. Or $U_1 | \overline{LS''} | U_2 (L)$ n'est pas possible, car $\overline{LS''}$ est un segment de L.

Donc, $S'S''$, étant régulière et ne contenant plus d'un composant, est connexe.

Théorème 10. S_1 et S_2 étant deux segments de L, tels que $S_1 \prec S_2$, S_1 est un segment de S_2.

Dém. En effet, en vertu du théorème précédent, $S_2\overline{S_1} = S_2 . \overline{LS_1}$ est connexe.

Théorème 11. Si $P | Q | R (L)$, S est connexe, $S < L$, $SP \neq 0$, $SR \neq 0$, on a $S \succ Q$.

Dém. Soit, au contraire, $Q\overline{S} \neq 0$. Puisque $Q\overline{S}$, $(= Q.\overline{LS})$, $SP (= P.\overline{LS})$ $SR (= R.\overline{LS})$ sont régulières (2°), on peut en extraire (resp.) des componeents U, V, W. $P | Q | R (L)$ a pour conséquence $V | U | W (L)$ (th. 2 N 6 et th. 2 N 8). La dernière relation, d'autre part, n'est pas possible, puisque, S étant connexe, de V_1 $W \prec S$ on conclut $U_V^{L\overline{U}} = U_W^{L\overline{U}}$ (th. 7 N 5).

Théorème 12. P_1 et P_2 étant parties connexes de L, P_1P_2 est connexe.

Dém. Soit $P_1P_2 \neq 0$.

1) Le théorème est démontré dans le cas où P_1 et P_2 sont des segments de L.

2) Soit $P_1 (= S)$, un segment de L, et $L = P_2 + P_2' + P_2''$, $P_2' \neq 0$, $P_2'' \neq 0$. Puisque $P_2 + P_2'$ et $P_2 + P_2''$ sont des segments de L (th. 4), $S(P_2 + P_2')$ et $S(P_2 + P_2'')$ sont connexes. Donc, si $SP_2' = 0$ ou $SP_2'' = 0$, le théorème est démontré. Supposons $SP_2' \neq 0$, $SP_2'' \neq 0$. Alors, se rappelant que $P_2' | P_2 | P_2'' (L)$, on conclut à l' aide du th. 11: $P_2 \prec S$. Par conséquent, $P_2S = P_2$ est connexe.

3) Passons au cas général. Soit $L = P_1 + P_1' + P_1''$. Puisque $P_1 + P_1'$ et $P_1 + P_1''$ sont des segments de L, $(P_1 + P_1') P_2$ et $(P_1 + P_1'') P_2$ sont connexes. Si $P_1'P_2 = 0$ ou $P_1''P_2 = 0$, le théorème est démontré. Soit $P_1'P_2 \neq 0$, $P_1''P_2 \neq 0$. Alors le th. 11 donne, puisque $P_1' | P_1 | P_1'' (L)$: $P_1 \prec P_2$, d'où il suit que $P_1P_2 (= P_1)$ est connexe.

Théorème 13. Soit $\mathbf{S}_*'$ une classe de segments de L qui appartiennent à la classe $\mathbf{S}'$. Alors $\Sigma = \Sigma (\mathbf{S}_*')$ est un segment de la classe $\mathbf{S}'$ ou bien égale à L.

Dém. Σ est connexe en vertu du th. 5 N 4. Si l'on avait $\Sigma' | \Sigma | \Sigma'' (L)$, on aurait de même $\Sigma' | S_* | \Sigma'' (L)$, où S_* est un segment quelconque de la classe $\mathbf{S}'_*$, ce qui est en contradiction avec la définition du segment.

Théorème 14. Soit $\mathbf{S}'_*$ une classe de segments de L qui appartiennent à la classe $\mathbf{S}'$. Alors $\Pi = \Pi(\mathbf{S}'_*)$ est un segment de la classe $\mathbf{S}'$ ou bien est nulle.

Dém. Il suffit de remarquer que $L\overline{\Pi}$ est égale à la somme des segments de la classe $\overline{L\mathbf{S}'_*}$.

Théorème 15. $\mathbf{P}$ étant une classe de variétés connexes, faisant partie de L, $\Pi = \Pi(\mathbf{P})$ est connexe.

Dém. Soit $L = P + P' + P''$ ($P'' \neq 0$ ou $P'' = 0$), P étant une variété quelconque de $\mathbf{P}$, P' et P'' des segments des classes $\mathbf{S}'$ et $\mathbf{S}''$ respectivement. Soit $\mathbf{P}'$ la classe des segments P', $\mathbf{P}''$ celle de P''.

Il suffit de remarquer que $\Pi = L\overline{\Sigma(\mathbf{P}')}\,.\,L\overline{\Sigma(\mathbf{P}'')}$.

N 9.

Une variété A est dite irréductible entre M et N, si elle satisfait aux conditions 1°—3° du N 8 et, en outre, 4°. $A \mathrel{>\!\!<} M$, $A \mathrel{>\!\!<} N$, 5°. il n'existe aucune partie connexe B de A qui vérifie les relations $B \mathrel{>\!\!<} M$, $B \mathrel{>\!\!<} N$, $B \neq A$.

Théorème 1. Soit L une variété linéaire, jouissant de la propriété suivante: quels que soient des segments S' et S'' (appartenants aux classes $\mathbf{S}'$ et $\mathbf{S}''$ respectivement), on a:

$$S' \mathrel{>\!\!<} M \quad S'' \mathrel{>\!\!<} N$$
$$S' \divideontimes N \quad S'' \divideontimes M.$$

Alors L est irréductible entre M et N.

Dém. On a $L \mathrel{>\!\!<} M$ (resp. $L \mathrel{>\!\!<} N$), puisque $S' \mathrel{>\!\!<} M$ (resp. $S'' \mathrel{>\!\!<} N$). D'autre part, soit P une partie connexe de L. Si P est un segment de la classe $\mathbf{S}'$ (resp. $\mathbf{S}''$), on a $P \divideontimes N$ (resp. $P \divideontimes M$). Si P n'est pas un segment de L, posons $L = P + P' + P''$, $P' \neq 0$, $P'' \neq 0$. $P + P'$ (resp. $P + P''$) étant un segment de L de la classe $\mathbf{S}'$ (resp. $\mathbf{S}''$), on a $P + P' \divideontimes N$ $P + P'' \divideontimes M$. Donc, $P \divideontimes M$, $P \divideontimes N$.

Théorème 2. Soit A une variété irréductible entre M et N. Alors A est linéaire. Des segments de A satisfont au relations du théorème précédent.

Dém. Soient P_1, P_2, P_3 trois parties de A, connexes et non nulles, telles que $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_1 = 0$. Supposons qu'aucune des relations $P_1 | P_2 | P_3 (L)$, $P_2 | P_3 | P_1 (L)$, $P_3 | P_1 | P_2 (L)$ n'est satisfaite. Alors, posons:

$$U_{P_2}^{A\overline{P_1}} = U_{P_3}^{A\overline{P_1}} = U_1$$
$$U_{P_3}^{A\overline{P_2}} = U_{P_1}^{A\overline{P_2}} = U_2$$
$$U_{P_1}^{A\overline{P_3}} = U_{P_2}^{A\overline{P_3}} = U_3,$$

ce qui entraîne $P_i \prec U_j (i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$. On en conclut $A\overline{U}_j \prec A\overline{P}_i$, et puisque $P_j \prec A\overline{U}_j$, $A\overline{U}_j$ étant connexe (th. 9 N 5), on a $U^{A\overline{P}_i}_{A\overline{U}_j} = U^{A\overline{P}_i}_{P_j} = U_i$, d'où il suit $A\overline{U}_j \prec U_i$ $(i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$.

S'il était $U_1 \ast M$, $U_1 \ast N$, on obtiendrait $A\overline{U}_1 \times M$ (axiome IV B), de même $A\overline{U}_1 \times N$ ce qui, $A\overline{U}_1$ étant connexe, signifierait que A n'est pas irréductible. Donc, supposons, par exemple, $U_1 \times M$. Alors $U_1 \ast N$ à cause de l'irréducibilité de A. Par conséquent, $A\overline{U}_1 \times N$ (axiome IV); puisque $A\overline{U}_1 \prec U_2$, on a, plus loin: $U_2 \times N$. On continue de la manière semblable: $U_2 \ast M$, $A\overline{U}_2 \times M$, $U_3 \times M$, $U_3 \ast N$, $A\overline{U}_3 \times N$, $U_1 \times N$. La dernière relation, jointe à $U_1 \times M$, est en contradiction avec l'irréducibilité de A.

Donc, il reste à supposer que P_1, P_2, P_3 sont alignées dans A, c'est-à-dire A est linéaire.

Soient $\mathbf{S}'$ et $\mathbf{S}''$ deux classes de segments de A.

Un segment S'_* de la classe $\mathbf{S}'$ est conjoint à l'une des variétés M, N. En effet, de $S'_* \ast M$, $S'_* \ast N$ on déduirait que $L\overline{S}'_* \times M$, $L\overline{S}'_* \times N$ ce qui est impossible; de même, il faut rejeter $S'_* \times M$, $S'_* \times N$.

Soit $S'_* \times M$, $S'_* \ast N$. Alors $L\overline{S}'_*$ (de la classe $\mathbf{S}''$) satisfait aux relations: $L\overline{S}'_* \ast M$, $L\overline{S}'_* \times N$.

On s'assure sans peine qu'on a $S' \times M$, $S' \ast N$; $S'' \ast M$, $S'' \times N$, quels que soient les segments S' et S'' des classes $\mathbf{S}'$ et $\mathbf{S}''$ resp. (th. 8 N 8).

Il serait possible de prendre l'irréducibilité entre M et N pour la propriété définissant les variétés linéaires. Cependant l'irréducibilité entre M et N n'est pas une propriété intrinsèque de la variété considérée (voir le N 1). C'est pourquoi j'ai procédé autrement.

Il n'est pas nécessaire à insister sur le fait que l'irréducibilité ici définie n'est pas équivalente à l'irréducibilité de M. Zoretti, même pour le cas de l'espace Euclidien, ainsi que la notion de la ligne elle-même.

N 10.

Dans le cas où L est une variété connexe élémentaire, la condition nécessaire et suffisante pour que L soit linéaire consiste en ce que tous ses éléments soient alignées dans L.

Les démonstrations des théorèmes du N 8 sont simplifiées beaucoup dans ce cas. Le théorème du N 7 peut être appliqué à la classe $\mathbf{E}_L$ de tous les éléments de L. Un segment S de L peut être défini par ce qu'on appelle „Section de Dedekind".

Considérons le cas particulier de l'espace Euclidien E_n. On appelle ordinairement ligne simple de Jordan l'ensemble J de points de l'espace E_n homéomorphe (*) à l'un des intervalles $\mathbf{|}(0 \leqslant t \leqslant 1)$, $\dot{\mathbf{|}}(0 \leqslant t < 1)$, $\ddot{\mathbf{|}}(0 < t < 1)$.

(*) Deux ensembles sont dits homéomorphes, s'il existe une correspondance biunivoque et bicontinue entre eux.

On s'assure aisément que la ligne de Jordan est une variété linéaire dans le sens précisé dans le N 8. Il est suffisant de le vérifier pour les intervalles $\mathbf{I}$, $\dot{\mathbf{I}}$, $\ddot{\mathbf{I}}$. Trois éléments $t=t_1$, $t=t_2$, $t=t_3$ étant donnés, soit, par exemple, $t_1<t_2<t_3$. Alors, en posant $U=(t<t_2)$, $V=(t>t_2)$, on a $t_1 \prec U$, $t_3 \prec V$, $U \divideontimes V$, puisque $UV' \dotplus U'V \dotplus UV=0$. Donc, $t_1|t_2|t_3$ (1).

La notion de la variété linéaire est, cependant, plus large que celle de la ligne de Jordan. L'ensemble de points consistant de la courbe $y=\sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ et du point $x=y=0$ en donne la preuve.

Il est intéressant d'indiquer une classe des variétés linéaires qui, dans le cas de l'espace Euclidien, soit confondue avec la classe des lignes de Jordan.

Définition. Soit L une variété linéaire, P une partie connexe et non nulle quelconque de L. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux classes quelconques de variétés connexes et non nulles, faisant partie de L. Supposons, de plus, que, A étant une variété de $\mathbf{A}$, il existe toujours une variété B de $\mathbf{B}$, satisfaisant à la relation:

$$A|B|P(L).$$

Si, chaque fois que les conditions énumerées sont remplies, la relation $P \succ\!\!\prec \Sigma(\mathbf{A})$ entraîne $P \succ\!\!\prec \Sigma(\mathbf{B})$, la variété L est appelée ligne simple de Jordan.

Dans le cas où L est élémentaire il suffit de prendre pour $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux classes d'éléments.

Il est facile à vérifier que la ligne de Jordan au sens habituel satisfait à la définition ci-dessus. Il suffit de considérer les intervalles $\mathbf{I}$, $\dot{\mathbf{I}}$, $\ddot{\mathbf{I}}$. Soit $P=(t=p)$, $\mathbf{A}$ soit la classe de points $\{t=a\}$, $\mathbf{B}$ la classe de points $\{t=b\}$, telles que la relation $p<a$ (resp. $p>a$) entraîne l'existence d'un point b tel que $p<b<a$ (resp. $p>b>a$). Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=p$. Alors, en choisissant des points b_n d'une telle manière qu'il soit $p<b_n<a_n$ ou $p>b_n>a_n$ suivant que $p<a_n$ ou $p>a_n$, on en conclut: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=p$. Donc, les intervales $\mathbf{I}$, $\dot{\mathbf{I}}$, $\ddot{\mathbf{I}}$ et, par conséquent, toutes les lignes de Jordan (dans le sens habituel) satisfont à notre définition.

La proposition inverse, affirmant que chaque variété linéaire, satisfaisant à la définition précédente, est homéomorphe à l'un des intervalles $\mathbf{I}$, $\dot{\mathbf{I}}$, $\ddot{\mathbf{I}}$, est demontrée dans un autre ouvrage.