В. БРЖЕЧКА

Решение численных уравнений (*)

Существует довольно много приемов вычисления корней с численными коэффициентами; regula falsi, способ Newton'a, способ Lagrange'a, способ Graeffe.

Преимущество способа Graeffe перед всякими другими способами заключается в том, что он не требует отделения корней и пригоден в случае комплексных корней, хотя следует заметить, что в случае комплексных корней при способе Graeffe приходится производить слишком много вычислений; но практическое значение способа Graeffe вне всякого сомнения.

Предлагаемый ниже способ решения уравнений имеет те же преимущества, что и способ Graeffe, т. е. применим в случае комплексных корней и не требует отделения корней; правда, казалось бы, что при наличии теоремы Sturm'a, вполне разрешающей вопрос об отделении корней, не особенно важно указанное обстоятельство, что способ не требует отделения корней, но практика показывает, что применение теоремы Sturm'a затруднительно по длинноте и утомительности сопряженных с ним вычислений.

§ 1. Пусть имеем уравнение n-той степени, которое будем писать в виде

$$x^n - a_{1,1}x^{n-1} - a_{2,1}x^{n-2} - a_{3,1}x^{n-3} - \cdots - a_{n-1,1}x - a_{n,1} = 0; \qquad (1)$$

и допустим, что α_1 такой корень уравнения (1), что

$$|\alpha_1| > |\alpha_2|,\ |\alpha_3|,\ |\alpha_4| \ \ldots\ |\alpha_{n-1}|,\ |\alpha_n|,$$

т. е. модуль α_1 больше модуля каждого из остальных корней.

Умножим обе части уравнения (1) на x и получим:

$$x^{n+1} - a_{1,1}x^n - a_{2,1}x^{n-1} - a_{3,1}x^{n-2} - \cdots - a_{n-1,1}x^2 - a_{n,1}x = 0;$$

(*) Предлагаемый способ в одном направлении основан на мысли, которая восходит еще к Dan. Bernoulli.

См. 1) D. Bernoulli. Commentationes Petropolitanae 3.1728. p. 92.

2) Jacobi. Observatiunculae etc. Werke, Bd. 3, S. 280.

в последнем уравнении заменим x^n, пользуясь уравнением (1), имеем:

$$x^{n+1}-a_{1,1}(a_{1,1}x^{n-1}+a_{2,1}x^{n-2}+\cdots+a_{n-1,1}x+a_{n,1})-a_{2,1}x^{n-1}-a_{3,1}x^{n-2}-\cdots-a_{n,1}x=0;$$

или

$$x^{n+1}-(a_{1,1}^2+a_{2,1})\,x^{n-1}-(a_{1,1}a_{2,1}+a_{3,1})\,x^{n-2}-(a_{1,1}a_{3,1}+a_{4,1})x^{n-3}-\cdots-a_{1,1}a_{n,1}=0;$$

или

$$x^{n+1}-a_{1,2}x^{n-1}-a_{2,2}x^{n-2}-a_{3,2}x^{n-3}-\cdots-a_{n,2}=0,$$

где

$$a_{1,2}=a_{1,1}^2+a_{2,1};\ a_{2,2}=a_{1,1}a_{2,1}+a_{3,1};\ a_{3,2}=a_{1,1}a_{3,1}+a_{4,1};\ldots;a_{n,2}=a_{1,1}+a_{n,1};$$

обе части последнего уравнения опять умножаем на x и освободимся от x^n, пользуясь уравнением первым (1), получим:

$$x^{n+2}-a_{1,3}x^{n-1}-a_{2,3}x^{n-2}-a_{3,3}x^{n-3}-\cdots-a_{n,2}=0,$$

где

$$a_{1,3}=a_{1,1}a_{1,2}+a_{2,2};\ a_{2,3}=a_{2,1}a_{1,2}+a_{3,2};\ a_{3,3}=a_{3,1}a_{3,2}+a_{4,2};\ldots;a_{n,3}=a_{1,2}a_{n,1}.$$

Предположим, что эту операцию умножения на x и освобождения от x^n на основании уравнения (1) мы проделаем k раз, тогда прийдем к уравнению:

$$x^{n+k}-a_{1,k+1}x^{n-1}-a_{2,k+1}x^{n-1}-a_{3,k+1}x^{n-3}-\cdots-a_{n,k+1}=0, \tag{2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_{1,k+1}&=a_{1,1}a_{1,k}+a_{2,k}; & a_{2,k}&=a_{2,1}a_{1,k}+a_{3,k};\\ a_{3,k+1}&=a_{3,1}a_{1,k}+a_{4,k}; & a_{n,k+1}&=a_{n,1}a_{1,k}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Умножим обе части уравнения (2) на x и, заменяя x^n, получим

$$x^{n+k+1}-a_{1,k+2}x^{n-1}-a_{2,k+2}x^{n-2}-a_{3,k+2}x^{n-3}-\cdots-a_{n,k+2}=0;$$

составим отношения

$$\frac{a_{1,k+2}}{a_{1,k+1}},\ \frac{a_{2,k+2}}{a_{2,k+1}},\ \frac{a_{3,k+2}}{a_{3,k+1}},\ \ldots\ \frac{a_{n,k+2}}{a_{n,k+1}} \tag{4}$$

и покажем, что каждое из написанных отношений при $k\to\infty$ имеет предел и этот предел будет как раз α_1.

Пользуясь равенствами (3), можем написать:

$$\begin{aligned} a_{1,k+1}&=a_{1,1}a_{1,k}+a_{2,k}=a_{1,1}a_{1,k}+a_{2,1}a_{2,k-1}+a_{3,k-1}=\\ &=a_{1,1}a_{1,k}+a_{2,1}a_{1,k-1}+a_{3,1}a_{1,k-2}+a_{n,k-2}=\\ &=a_{1,1}a_{1,k}+a_{2,1}a_{1,k-1}+a_{3,1}a_{1,k-2}+a_{4,1}a_{1,k-3}+\cdots+a_{n,1}a_{k-n+1}.\end{aligned}$$

Итак мы пришли к равенству

$$a_{1,k+1}=a_{1,1}a_{1,k}+a_{2,1}a_{1,k-1}+a_{3,1}a_{1,k-2}+\cdots+a_{n,1}a_{1,k-n+1}; \tag{5}$$

ясно, конечно, что можно написать такое равенство

$$a_{1,k+2}=a_{1,1}a_{1,k+1}+a_{2,1}a_{1,k}+a_{3,1}a_{1,k-1}+\cdots+a_{n,1}a_{1,k-n+1};$$

и можно, конечно, написать такое равенство:

$$a_{1,k+n}=a_{1,1}a_{1,k+n-1}+a_{2,1}a_{1,k+n-2}+a_{3,1}a_{1,k+n-3}+\cdots+a_{n,1}a_{1,k}$$

или

$$a_{1,k+n}-a_{1,1}a_{1,k+n-1}-a_{2,1}a_{1,k+n-2}-a_{3,1}a_{1,k+n-3}-\cdots-a_{n,1}a_{1,k}=0. \quad (6)$$

Шестое можем считать уравнением в конечных разностях. Если мы имеем уравнение в конечных разностях, например:

$$y_x a_0+y_{x+1}a_1+\cdots+y_{x+n}a_n=0,$$

то решением этого уравнения будет:

$$y_x=c_1r_1^x+c_2r_2^x+\cdots+c_nr_n^x,$$

при чем r_1, r_2, $r_3\ldots r_n$ корни уравнения:

$$r^n a_n+r^{n-1}a_{n-1}+\cdots+ra_1+a_0=0,$$

и все эти корни различны; c_1, c_2, $c_3\ldots c_n$ можно всегда найти, как только нам известно y_x, например, хотя бы для $x=0, 1, 2\ldots n-1$.

Принимая во внимание все только что сказанное, займемся равенством (6), т. е. поставим себе задачу определения $a_{1,k}$? Напишем для шестого характеристическое уравнение:

$$r^n-a_{1,1}r^{n-1}-a_{2,1}r^{n-2}-a_{3,1}r^{n-3}-\cdots-a_{n,1}=0;$$

ясно, конечно, что корни последнего уравнения совпадают с корнями уравнения (1). Корень α_1 уравнения (1) согласно нашему предположению такой, что

$$|\alpha_1|>|\alpha_2|,\ |\alpha_3|\ldots|\alpha_n|.$$

Решение уравнения (6) напишется так:

$$a_{1,k}=c_1\alpha_1^k+c_2\alpha_2^k+c_3\alpha_3^k+\cdots+c_n\alpha_n^k; \quad (7)$$

из последнего имеем, очевидно:

$$a_{1,k+1}=c_1\alpha_1^{k+1}+c_2\alpha_2^{k+1}+c_3\alpha_3^{k+1}+\cdots+c_n\alpha_n^{k+1}, \quad (8)$$

составим отношение $a_{1,k+1}$ к $a_{1,k}$, находим:

$$\frac{a_{1,k+1}}{a_{1,k}}=\frac{c_1\alpha_1^{k+1}+c_2\alpha_2^{k+1}+c_3\alpha_3^{k+1}+\cdots+c_n\alpha_n^{k+1}}{c_1\alpha_1^{k}+c_2\alpha_2^{k}+c_3\alpha_3^{k}+\cdots+c_n\alpha_n^{k}};$$

далее пишем:

$$\frac{a_{1,k+1}}{a_{1,k}}=\frac{\alpha_1^{k+1}}{\alpha_1^k}\cdot\frac{c_1+c_2\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{k+1}+c_3\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^{k+1}+\cdots+c_n\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^{k+1}}{c_1+c_2\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{k}+c_3\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^{k}+\cdots+c_n\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^{k}};$$

перейдя к пределу при $k\to\infty$, имеем:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{1,k+1}}{a_{1,k}}=\alpha_1\cdot\frac{c_1}{c_1}=\alpha_1,$$

так как $\lim\left(\frac{\alpha_p}{\alpha_1}\right)^k = 0$, для $P = 2, 3, 4 \ldots n$, ибо $k \to \infty$, а для $p = 2, 3, 4 \ldots n$ $|\alpha_p| < |\alpha_1|$ и $c_1 \neq 0$.

Покажем, что $c_1 \neq 0$; с целью сокращения письма поведем рассуждения на таком уравнении:

$$x^4 - a_{1,1}x^3 - a_{2,1}x^2 - a_{3,1}x - a_{4,1} = 0;$$

имеем:

$$(1_1) \qquad a_{1,1} = \sum_1^4 \alpha_i;$$

$$(1_2) \qquad a_{1,2} = a_{1,1}a_{1,1} + a_{2,1} = a_{1,1}\sum_1^4 \alpha_i - \sum_1^4 \alpha_i\,\alpha_e;$$

$$(1_3) \qquad a_{1,3} = a_{1,2}a_{1,1} + a_{2,2} = a_{1,2}a_{1,1} + a_{1,1}a_{2,1} + a_{3,1} =$$

$$= a_{1,2}\sum_1^4 \alpha_i - a_{1,1}\sum \alpha_i\,\alpha_e + a_{3,1};$$

$$(1_4) \qquad a_{1,4} = a_{1,3}a_{1,1} + a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,1}a_{3,1} + a_{4,1} =$$

$$= a_{1,3}\sum \alpha_i - a_{1,2}\sum \alpha_i\,\alpha_e + a_{1,1}\sum \alpha_i\,.\,\alpha_e\alpha_p - \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4.$$

С другой стороны, если $c_1 = 0$, то $a_{1,4} = c_2\alpha_2^4 + c_3\alpha_3^4 + c_4\alpha_4^4$, и в таком случае имеет место:

$$(1_4{'}) \qquad a_{1,4} = a_{1,3}\sum_2^4 \alpha_i - a_{1,2}\sum_2^4 \alpha_i\,\alpha_e + a_{1,1}\sum_2^4 \alpha_i\,\alpha_e\alpha_p.$$

Вычитая $(1_4{'})$ из (1_4), получим:

$$a_{1,3}\alpha_1 - a_{1,2}\alpha_1\sum_2^4 \alpha_i + a_{1,1}\alpha_1\sum \alpha_i\,\alpha_e - \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 0;$$

сокращая на $\alpha_1 \neq 0$, получим:

$$(1_3{'}) \qquad a_{1,3} = a_{1,2}\sum_2^4 \alpha_i - a_{1,1}\sum_2^4 \alpha_i\,\alpha_e + \alpha_2\alpha_3\alpha_4.$$

Вычитая $(1_3{'})$ из (1_3), после преобразований получим:

$$(1_2{'}) \qquad a_{1,2} = a_{1,1}\sum_2^4 \alpha_i - \sum_2^4 \alpha_i\,\alpha_e.$$

Вычитая $(1_2{'})$ из (1_2), найдем:

$$a_{1,1}\alpha_1 - \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 0,$$

и так как $\alpha_1 \neq 0$, то $a_{1,1} = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, а это невозможно, следовательно $c_1 \neq 0$.

Теперь необходимо доказать, что и остальные отношения (4) стремятся при $k\to\infty$ к пределу, равному α_1; начнем с последнего отношения и при доказательстве будем пользоваться равенствами (3):

$$\frac{a_{n,k+1}}{a_{n,k}}=\frac{a_{n,1}a_{1,k}}{a_{n,1}a_{1,k-1}}=\frac{a_{1,k}}{a_{1,k-1}},$$

откуда ясно, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{n,k+1}}{a_{n,k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{1,k}}{a_{1,k-1}}=\alpha_1.$$

Далее ищем (пользуемся равенствами 3):

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{n-1,k+1}}{a_{n-1,k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{n-1,1}a_{1,k}+a_{n,k}}{a_{n-1,1}a_{1,k-1}+a_{n,k-1}}=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{n-1,1}a_{1,k}+a_{n,1}a_{1,k-1}}{a_{n-1,1}a_{1,k-1}+a_{n,1}a_{1,k-2}}=$$

$$=\lim\left[\frac{a_{1,k-1}}{a_{1,k-2}}\cdot\frac{a_{n-1,1}\dfrac{a_{1,k}}{a_{1,k-1}}+a_{n,1}}{a_{n-1,1}\dfrac{a_{1,k-1}}{a_{1,k-2}}+a_{n,1}}\right]=\alpha_1\cdot\frac{a_{n-1,1}\alpha_1+a_{n,1}}{a_{n-1,1}\alpha_1+a_{n,1}}=\alpha_1\ (*),$$

что и требовалось доказать.

Очевидно, что, продолжая наши рассуждения таким же образом, мы докажем существование предела каждого из отношений (4), при чем будет для всех отношений один и тот же предел, а именно α_1.

После того как нами доказано существование предела, то ясно, что любое из отношений (4) можно принять за приближенное значение корня α_1; и перед нами сейчас другая задача, а именно чрезвычайно важно для практики оценить ту погрешность, которую мы делаем, останавливаясь на каком-нибудь приближении; с целью нахождения ошибки выпишем два уравнения, а именно:

$$\left.\begin{array}{l} x^{n+k}-a_{1,k+1}x^{n-1}-a_{2,k+1}x^{n-2}-a_{3,k+1}x^{n-3}-\cdots-a_{n,k+1}=0\\ x^{n+k+1}-a_{1,k+2}x^{n-1}-a_{2,k+2}x^{n-2}-a_{3,k+2}x^{n-3}-\cdots-a_{n,k+2}=0\end{array}\right|\begin{array}{l}a_{1,k+2}\\ a_{1,k+1}\end{array}\Bigg|.$$

Исключаем из двух последних уравнений x^{n-1}, умножая для этого первое на $a_{1,k+2}$, второе на $a_{1,k+1}$, и вычитаем из второго первое, находим:

$$a_{1,k+1}x^{n+k+1}-a_{1,k+2}x^{n+k}+(a_{2,k+1}a_{1,k+2}-a_{2,k+2}a_{1,k+1})\,x^{n-2}+(a_{3,k+1}a_{1,k+2}-$$
$$-a_{3,k+2}a_{1,k+1})\,x^{n-3}+\cdots+(a_{n,k+1}a_{1,k+2}-a_{n,k+2}a_{1,k+1})=0;$$

деля обе части последнего на $x^{n+k}a_{1,k+1}$, находим:

$$x-\frac{a_{1,k+2}}{a_{1,k+1}}+\frac{(a_{2,k+1}a_{1,k+2}-a_{2,k+2}a_{1,k+1})\,x^{n-2}+(a_{3,k+1}a_{1,k+2}-a_{3,k+2}a_{1,k+1})\,x^{n-3}}{a_{1,k+1}\,(a_{1,k+1}x^{n-1}+a_{2,k+2}x^{n-2}+\cdots+a_{n,k+1})}+$$
$$+\cdots+\frac{(a_{n,k+2}-a_{n,k+2}a_{1,k+1})}{a_{1,k+1}\,(a_{1,k+1}x^{n-1}+a_{2,k+2}x^{n-2}+\cdots+a_{n,k+1})}=0,$$

где в последнем члене x^{n+k} заменено на основании (2), так как по

(*) $a_{n-1,1}\alpha_1+a_{n,1}\neq 0$.

доказанному $\lim \frac{a_{1,k+1}}{a_{1,k}} = a_1$, то, приняв за корень $\frac{a_{1,k+1}}{a_{1,k}}$, допускаем ошибку, равную:

$$\frac{(a_{2,k+1}a_{1,k+2} - a_{2,k+2}a_{1,k+1})\,x^{n-2} + (a_{3,k+1}a_{1,k+2} - a_{3,k+2}a_{1,k+1})x^{n-3} + \cdots}{a_{1,k+1}\,(a_{1,k+1}x^{n-1} + a_{2,k+1}x^{n-2} + \cdots + a_{n,k+1})}$$

$$\frac{\cdots + (a_{n,k+1}a_{1,k+2} - a_{n,k+2}a_{1,k+1})}{a_{1,k+1}\,(a_{1,k+1}x^{n-1} + a_{2,k+1}x^{n-2} + \cdots + a_{n,k+1})}.$$

Предположим теперь, что мы желаем по предлагаемому способу найти корень, абсолютная величина которого больше абсолютной величины каждого из остальных корней, то интересно знать, когда же остановиться в преобразованиях? И во время этого процесса преобразования видно ли, что корень, обладающий указанными свойствами, имеется?

Очевидно, что утвердительным ответом на первый и второй вопрос является наличие обстоятельства:

$$\frac{a_{1,k+1}}{a_{1,k}} = \frac{a_{2,k+1}}{a_{2,k}} = \frac{a_{3,k+1}}{a_{3,k}} = \ldots = \frac{a_{n,k+1}}{a_{n,k}},$$

т. е. пропорциональность (приближенная) коэффициентов.

Теперь остается доказать еще одно обстоятельство, которое будет играть при применении предлагаемого способа важную роль, а именно, что, приравняв нулю все, что остается после отбрасывания члена x^{n+k} в уравнении (2), т. е.

$$a_{1,k+1}\,x^{n-1} + a_{2,k+1}x^{n-2} + \cdots + a_{n,k+1} = 0,$$

получим уравнение, которое приближенное дает корни $a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$. Покажем, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{2,k+1}}{a_{1,k+1}} = -\sum_{2}^{n}{}_i\, a_i = a_1 - a_{1,1}.$$

Пользуясь равенствами (3), имеем:

$$a_{1,k+1} = a_{1,1}a_{1,k} + a_{2,k};$$

следовательно:

$$a_{1,k+2} = a_{1,1}a_{1,k+1} + a_{2,k+1},$$

отсюда:

$$a_{2,k+1} = a_{1,k+2} - a_{1,1}a_{1,k+1},$$

а потому:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{2,k+1}}{a_{1,k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{1,k+2} - a_{1,1}a_{1,k+1}}{a_{1,k+1}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{a_{1,k+2}}{a_{1,k+1}} - a_{1,1}\right) = a_1 - a_{1,1}$$

что и требовалось доказать.

Точно так же найдем, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{3,k+1}}{a_{1,k+1}} = \sum_{2}^{n}{}_{i,}\; k a_i a_k.$$

Действительно:

$$\sum_{2}^{n}{}_{i,}\; ka_i a_k = \sum_{1}^{n}{}_{i,}\; ka_i a_k + \alpha_1 \sum_{2}^{n}{}_{i,}\; ka_i = \sum_{2}^{n}{}_{i,}\; ka_i a_k + \alpha_1 (a_{1,1} - \alpha_1).$$

Отсюда имеем:

$$\sum_{2}^{n}{}_{i,}\; ka_i a_k = \sum_{1}^{n}{}_{i,}\; ka_i a_k - \alpha_1 (a_{1,1} - \alpha_1) = -a_{2,1} - \alpha_1 (a_{1,1} - \alpha_1).$$

Пишем:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{3,k+1}}{a_{1,k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{2,k+2} - a_{2,1}a_{1,k+1}}{a_{1,k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{1,k+3} - a_1,\; a_{1,k+2} - a_{2,1}a_{1,k+1}}{a_{1,k+1}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{a_{1,k+3}}{a_{1,k+2}} \cdot \frac{a_{1,k+2}}{a_{1,k+1}} - a_{1,1} \frac{a_{1,k+2}}{a_{1,k+1}} - a_{2,1} \right) = \alpha_1^2 - a_{1,1}\alpha_1 - a_{2,1},$$

что и требовалось доказать.

Применяя те же рассуждения, мы легко сможем показать, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{4,k}}{a_{1,k}} = -\sum_{2}^{n} \alpha_i \alpha_k \alpha_2; \quad \lim_{k\to\infty} \frac{a_{5,k}}{a_{1,k}} = \sum_{2}^{n} \alpha_i \alpha_k \alpha_e \alpha_s; \ldots$$

$$\ldots \lim_{k\to\infty} \frac{a_{n,k}}{a_{1,k}} = (-1)^n \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \cdots \alpha_n.$$

Итак, можно теперь утверждать, что указанное нами уравнение действительно будет давать приближенно корни $\alpha_2\ \alpha_3 \ldots \alpha_n$.

§ 2. Предположим, что корни нашего уравнения (1):

$$\alpha_1 \text{ и } \alpha_2$$

такие, что

$$|\alpha_1|, |\alpha_2| > |\alpha_3|, |\alpha_4|, \ldots, |\alpha_n|$$

и

$$\alpha_1 \neq \alpha_2.$$

Напишем уравнение (2) и еще два уравнения, получающиеся из него путем умножения на x:

$$(1')\; x^{n+k} - a_{1,k+1}x^{n-1} - a_{2,k+1}x^{n-2} - a_{3,k+1}x^{n-3} - \ldots - a_{n,k+1} = 0;$$

$$(1'')\; x^{n+k+1} - a_{1,k+2}x^{n-1} - a_{2,k+2}x^{n-2} - a_{3,k+2}x^{n-3} - \ldots - a_{n,k+2} = 0;$$

$$(1''')\; x^{n+k+2} - a_{1,k+3}x^{n-1} - a_{2,k+3}x^{n-2} - a_{3,k+3}x^{n-3} - \ldots - a_{n,k+3} = 0.$$

Исключим x^{n-1} из $(1')$ и $(1'')$ и из $(1'')$ и $(1''')$, получим:

$$x^{n+k+1}a_{1,k+1} - a_{1,k+2}x^{n+k} - (a_{2,k+2}a_{1,k+1} - a_{2,k+1}a_{1,k+2})\, x^{n-2} -$$

$$-(a_{3,k+2}a_{1,k+1} - a_{3,k+1}a_{1,k+2})\, x^{n-3} - \ldots - (a_{n,k+2}a_{1,k+1} - a_{n,k+1}a_{1,k+2}) = 0; \quad (1'''')$$

$$x^{n+k+2}a_{1,k+2} - x^{n+k+1}a_{1,k+3} - (a_{2,k+3}a_{1,k+2} - a_{2,k+2}a_{1,k+1})\, x^{n-2} -$$

$$-(a_{3,k+3}a_{1,k+2} - a_{3,k+2}a_{1,k+3})x^{n-3} - \ldots - (a_{n,k+3}a_{1,k+2} - a_{1,k+3}a_{n,k+2}) = 0, \quad (1''''')$$

и покажем теперь, что корни уравнения:

$$(a_{2,k+2}a_{1,k+1}-a_{2,k+1}a_{1,k+2})\,x^{n-2}+(a_{3,k+2}a_{1,k+1}-a_{3,k+1}a_{1,k+2})\,x^{n-3}+\dots$$
$$\dots+(a_{n,k+2}a_{1,k+1}-a_{n,k+1}a_{1,k+2})=0$$

дадут нам приближенно:

$$a_3,\ a_4,\dots,\ a_n,$$

а уравнения:

$$\frac{a_{1,k+2}x^2-a_{1,k+3}x}{a_{1,k+1}x-a_{1,k+2}}=\frac{a_{2,k+3}a_{1,k+2}-a_{2,k+2}a_{1,k+3}}{a_{2,k+2}a_{1,k+1}-a_{2,k+1}a_{1,k+2}},$$
$$\frac{a_{1,k+2}-x^2-a_{1,k-3}x}{a_{1,k+1}x-a_{1,k+2}}=\gamma_{n-3},\ \gamma_{n-4},\ \gamma_{n-5},\dots,\ \gamma_0,$$

где $\gamma_{n-3}, \gamma_{n-4}, \gamma_{n-5},\dots, \gamma_0$ означают отношение коэффициентов при x^{n-3}, x^{n-4}, $x^{n-5},\dots$, x^0 уравнений $(1''''')$ и $(1''')$ даст приближенно корни a_1 и a_2; найдем:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2,k+3}a_{1,k+2}-a_{2,k+2}a_{1,k+3}}{a_{2,k+2}a_{1,k+1}-a_{2,k+1}a_{1,k+2}}?$$

мы знаем, что

$$a_{1,k+4}=a_{1,1}a_{1,k+3}+a_{2,k+3},$$

отсюда:

$$a_{2,k+3}=a_{1,k+4}-a_{1,1}a_{1,k+3};$$

далее найдем точно так же:

$$a_{2,k+2}=a_{1,k+3}-a_{1,1}a_{1,k+2};$$
$$a_{2,k+1}=a_{1,k+2}-a_{1,1}a_{1,k+1};$$

подставляя в то выражение, lim которого нас интересует, имеем:

$$\frac{(a_{1,k+4}-a_{1,1}a_{1,k+3})\,a_{1,k+2}-(a_{1,k+3}-a_{1,1}a_{1,k+2})\,a_{1,k+3}}{(a_{1,k+3}-a_{1,1}a_{1,k+2})\,a_{1,k+1}-(a_{1,k+2}-a_{1,1}a_{1,k+1})\,a_{1,k+2}}=$$
$$=\frac{a_{1,k+4}a_{1,k+2}-a_{1,k+3}^2}{a_{1,k+3}a_{1,k+1}-a_{1,k+2}^2}.$$

Далее мы знаем, что

$$a_{1,k}=c_1a_1^k+c_2a_2^k+c_3a_3^k+\dots+c_na_n^k$$
$$a_{1,k+1}=c_1a_1^{k+1}+c_2a_2^{k+1}+c_3a_3^{k+1}+\dots+c_na_n^{k+1}$$

и т. д.; подставляя, имеем:

$$\frac{(c_1a_1^{k+4}+c_2a_2^{k+4}+c_3a_3^{k+4}+\dots+c_na_n^{k+4})(c_1a_1^{k+2}+c_2a_2^{k+2}+c_3a_3^{k+2}+\dots+c_na_n^{k+2})}{(c_1a_1^{k+3}+c_2a_2^{k+3}+c_3a_3^{k+3}+\dots+c_na_n^{k+3})(c_1a_1^{k+1}+c_2a_2^{k+1}+c_3a_3^{k+1}+\dots+c_na_n^{k+1})}-$$
$$-\frac{(c_1a_1^{k+3}+c_2a_2^{k+3}+c_3a_3^{k+3}+\dots+c_na_n^{k+3})^2}{(c_1a_1^{k+2}+c_2a_2^{k+2}+c_3a_3^{k+2}+c_na_n^{k+2})^2}=$$
$$=\frac{c_1c_2a_1^{k+4}a_2^{k+2}+c_1c_2a_1^{k+2}a_2^{k+4}-2c_1c_2a_1^{k+3}a_2^{k+3}+L}{c_1c_2a_1^{k+3}a_2^{k+1}+c_1c_2a_1^{k+1}a_2^{k+3}-2c_1c_2a_1^{k+2}a_2^{k+2}+M},$$

где выписаны сначала члены, содержащие α_1 и α_2, т. е. члены типа $\alpha_1^p\alpha_2^q$, так как члены этого типа при нахождении предела будут играть главную роль; буквами L и M обозначены суммы членов типа:

$$\alpha_k^p\alpha_e^q,$$

при чем, если $k=1{,}2$, то $l\neq 1{,}2$; числителя и знаменателя последнего выражения делим на α_1^{k+1}, α_2^{k+1} и получим:

$$\frac{c_1c_2\alpha_1^3\alpha_2+c_1c_2\alpha_1\alpha_2^3-2c_1c_2\alpha_1^2\alpha_2^2+\dfrac{L}{\alpha_1^{k+1}\alpha_2^{k+1}}}{c_1c_2\alpha_1^2+c_1c_2\alpha_2^2-2c_1c_2\alpha_1\alpha_2+\dfrac{M}{\alpha_1^{k+1}\alpha_2^{k+1}}},$$

предел последнего выражения при $k\to\infty$ в силу того, что

$$|\alpha_1|,\ |\alpha_2|>|\alpha_3|,\ |\alpha_4|,\ldots,\ |\alpha_n|$$

и в силу того, что L и M не содержат членов типа $\alpha_1^p\alpha_2^q$, будет:

$$\frac{c_1c_2\alpha_1^3\alpha_2+c_1c_2\alpha_1\alpha_2^3-2c_1c_2\alpha_1^2\alpha_2^2}{c_1c_2\alpha_1^2+c_1c_2\alpha_2^2-2c_1c_2\alpha_1\alpha_2}=\frac{c_1c_2(^*)\,\alpha_1\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2)^2}{c_1c_2(\alpha_1-\alpha_2)^2}=\alpha_1\alpha_2;$$

итак:

$$\lim\frac{a_{2,k+3}a_{1,k+2}-a_{2,k+2}a_{1,k+3}}{a_{2,k+2}a_{1,k+1}-a_{2,k+1}a_{1,k+2}}=\alpha_1\alpha_2.$$

Применяя те же рассуждения, можно доказать, что

$$\lim_{k\to}\left[\frac{a_{1,k+3}}{a_{1,k+2}}-\frac{a_{1,k+1}}{a_{1,k+2}}\cdot\frac{a_{2,k+3}a_{1,k+2}-a_{2,k+2}a_{1,k+3}}{a_{2,k+2}a_{1,k+1}-a_{2,k+1}a_{1,k+2}}\right]=\alpha_1+\alpha_2.$$

Наконец, пользуясь равенствами (3), мы легко докажем, что при $k\to\infty$ корни уравнения (9) стремятся к корням $\alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5\ldots\alpha_n$.

Дальше можно было бы пойти таким путем и предположить, что, например, корни $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ такие, что $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3>\alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6\ldots\alpha_n$ и т. д., и путем исключения из предложенных уравнений $1'$, $1''$, $1'''$ мы сможем найти все корни.

Пример 1.

Решить уравнение (**):

$$x^3-2x-2=0; \tag{1}$$

имеем:

$$x^4-2x^2-2x=0; \tag{1'}$$

(*) $c_2\neq 0$ и $c_1\neq 0$.

(**) Это уравнение решено у Weber'a. Lehrbuch der Algebra. Bd. I, стр. 393; оно решено как трехчленное уравнение по методу Гаусса и найдено:

$$x_1=1{,}769292;\quad x_{2,3}=0{,}884646\pm 0{,}589740\,i.$$

возводя (1) в четвертую степень и заменяя x^4 и x^3 на основании (1) и (1′), получим:

$$x^{12} - 2^4(8x^2 + 14x + 9) = 0; \qquad (1'')$$

возводя в квадрат (1″) и заменяя x^4 и x^3 на основании (1′) и (1), имеем:

$$x^{24} - 2^8(468x^2 + 828x + 529) = 0; \qquad (1''')$$

умножая на x (1‴) и заменяя x^3 и т. д., получим:

$$x^{25} - 2^8(828x^2 + 1465x + 936) = 0. \qquad (1'''')$$

Отношение коэффициентов при x^2, x, x^0 уравнений (1‴) и (1⁗) дает:

$$\frac{828}{468} = 1{,}76923\ldots; \quad \frac{1465}{828} = 1{,}76932\ldots;$$
$$\frac{936}{529} = 1{,}76937\ldots$$

Пропорциональность коэффициентов указывает на то, что уравнение (1) имеет один корень, больше, чем два другие, приближенное значение этого корня будет:

$$x = 1{,}769\ldots$$

два других корня найдем из уравнения:

$$468x^2 + 828x + 529 = 0;$$
$$x_{1,2} = -0{,}88461 \pm 0{,}589743\,i$$

тоже с четвертым верным знаком.

Если бы пожелали найти более точные значения корней, то можно было бы пойти двумя путями:

1. Еще повысить степень уравнения (1⁗).
2. Найти поправку h для корня по формуле:

$$h = -\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}\ (*),$$

которая применима как в случае действительных корней, так и мнимых.

Пример 2 (**):

$$x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = 0. \qquad (1)$$

(*) См. 1) А. Н. Крылов. Лекции о приближенных вычислениях, изд. 1907 года 2) C. Runge und H. König. Numerisches Rechnen. Стр. 152, 155, изд. 1924. 3) Praktische Analysis von H. von Sanden. Стр. 152—156, изд. 1923 г.

(**) Пример взят из Lehrbuch der Algebra H. Weber'a, стр. 389; пример там решен по способу Греффе, и найдено для $x_1 = 1{,}73471\ldots$; там же показано, что уравнение имеет один действительный корень и 4 комплексных; см. стр. 350.

Пишем, как и раньше:

$$x^6 - x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x = 0; \quad x^7 - 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 2x - 1 = 0;$$
$$x^8 - 3x^4 - 5x^3 - 6x^2 - 5x - 2 = 0;$$

возводя (1) в квадрат, заменяя x^6 и т. д.;

Потом еще раз в квадрат и наконец последнее умножаем на x, получаем:

$$x^{20} - 2229x^4 - 3867x^3 - 4479x^2 - 3311x - 1285 = 0; \qquad (1')$$
$$x^{21} - 3867x^4 - 6708x^3 - 7769x^2 - 5743x - 2229 = 0. \qquad (1'')$$

Взяв отношение коэффициентов (1″) и (1′), имеем:

$$\frac{3867}{2229} = 1{,}734858\ldots; \quad \frac{6708}{3867} = 1{,}7347\ldots; \quad \frac{7769}{4479} = 1{,}7345\ldots;$$
$$\frac{5743}{3311} = 1{,}7345\ldots; \quad \frac{2229}{1285} = 1{,}73463\ldots; \qquad \boldsymbol{x_1 = 1{,}735.}$$

Найдем теперь комплексные корни; с этой целью выпишем уравнения:

$$\begin{array}{ll|r|}
(1') & x^{20} - 2229x^4 - 3867x^3 - 4479x^2 - 3311x - 1285 = 0; & -\ 852 \\
(1'') & x^{21} - 3867x^4 - 6708x^3 - 7769x^2 - 5743x - 2229 = 0: & 3192 \\
(1''') & x^{22} - 6708x^4 - 11636x^3 - 13477x^2 - 9963x - 3867 = 0; & -1557
\end{array}$$

и умножим обе части каждого из выписанных уравнений на:

$$\begin{array}{ll}
(1') & 3867 . 11636 - 6708 . \ 6708 = -852; \\
(1'') & 6708 . \ 3867 - 2229 . 11636 = 3192; \\
(1''') & 2229 . \ 6708 - 3867 . \ 3867 = -1557;
\end{array}$$

сложив (1′) (1″) (1‴), получим:

$$-1557x^{22} + 3192x^{21} - 852x^{20} - 1149x^2 - 1707x - 771 = 0;$$

отбрасывая в последнем члены, содержащие x^{20}, x^{21} и x^{22}, получим уравнение:

$$1149x^2 + 1707x + 771 = 0,$$

решая которое, найдем пару комплексных корней, а именно пару комплексных корней по модулю меньших,
находим:

$$\boldsymbol{x_{2,3} = 0{,}743 \pm 0{,}345\, i.}$$

Отбросив, например, в (1″) уравнении член, содержащий x^{21}, получим уравнение:

$$3867x^4 + 6708x^3 + 7769x^2 + 5743x + 2229 = 0,$$

которое приближенно даст 4 комплексных корня и в том числе $x_{2,3}$; следовательно, называя 4 и 5 корень:

$$u \pm vi,$$

имеем:

$$2u - \frac{1707}{1149} = -\frac{6708}{3867}; \quad (u^2 + v^2) \cdot \frac{771}{1149} = \frac{2229}{3867};$$

из первого находим:

$$u = -0{,}125;$$

второе дает:

$$v = +0{,}893.$$

Следовательно:

$$\boldsymbol{x_{4,5} = -0{,}125 \pm 0{,}893\,i}.$$

Проверка: Должно быть:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0;$$

имеем:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0{,}002.$$
