Д. М. СИНЦОВ

О системах интегральных кривых Пфаффова уравнения

$Pdx+Qdy+Rdz=0$

§ 1. Определения. Частные случаи.

1. Пусть имеем уравнение в полных дифференциалах:

$$Pdx+Qdy+Rdz=0. \tag{1}$$

Мы можем, независимо от теории точечно-линейных коннексов, представить его себе полученным в связи с системою кривых (конгруэнции кривых), определенной дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}, \tag{2}$$

касательные которых определяются уравнением:

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}=\frac{Z-z}{R}, \tag{3}$$

если будем искать направления, ортогональные к кривым (2).

Тогда (1) и выражает условие ортогональности.

При этом направления, выходящие из точки (x, y, z), лежат в плоскости:

$$P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0, \tag{4}$$

а прямая (3) будет нормальна к этой плоскости.

Каждой точке таким образом подчиняется совершенно определенная плоскость — (1), — что и подало A. Voss'у мысль придать этим конфигурациям наименование Punkt-Ebenen Systeme (P.-E. Systeme) (*).

Исключение составляют те точки, координаты которых выполняют три уравнения:

$$P=0, \quad Q=0, \quad R=0.$$

(*) Mathematische Annalen B. 23.

При P, Q, R степени m, число таких точек равно m^3. Для этих точек соответствующая плоскость (4) становится неопределенною, за нее может быть взята всякая проходящая через (x, y, z).

Является теперь вопрос, будет ли соответствие и однозначно обратимым. На этот вопрос приходится ответить отрицательно.

Действительно, для того, чтобы найти все точки, которым принадлежит проходящая через них плоскость:

$$ux + vy + wz + \overline{\omega} = 0, \tag{a}$$

надо решить уравнения:

$$\frac{P}{u} = \frac{Q}{v} = \frac{R}{w} = \frac{Px + Qy + Rz}{-\overline{\omega}},$$

или уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} -\overline{\omega}P &= u\,(Px + Qy + Rz) \\ -\overline{\omega}Q &= v\,(Px + Qy + Rz) \\ -\overline{\omega}R &= w(Px + Qy + Rz) \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

Умножая на x, y, z и складывая, имеем:

$$(Px + Qy + Rz)\,(ux + vy + wz + \overline{\omega}) = 0.$$

Из уравнений (b) независимых, таким образом, оказывается всего два, третьим же должно быть присоединено (a). Подсчет числа корней пока отложим.

Если ищем точки, лежащие в плоскостях, параллельных данной, то имеем только:

$$\frac{P}{u} = \frac{Q}{v} = \frac{R}{w}$$

и, решая их совместно, имеем ∞ точек, образующих кривую.

Нам представляются при этом следующие особенные случаи.

2. 1°) Дифференциальное выражение (1) есть точный дифференциал; условия этого:

$$P_y' - Q_x' = 0, \quad Q_z' - R_y' = 0, \quad R_x' - P_z' = 0.$$

Тогда (1) интегрируется по известным правилам и дает:

$$U = \text{Const}\; U = F(xyz).$$

И если нам дана некоторая поверхность, например, эллипсоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

то мы можем, взяв дифференциал, рассматривать уравнение:

$$\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} + \frac{zdz}{c^2} = 0, \quad \frac{x(X - x)}{a^2} + \frac{y\,(Y - y)}{b^2} + \frac{z\,(Z - z)}{c^2} = 0,$$

которое каждой точке подчиняет определенную плоскость. Таким образом, и вообще, исходя из определенной поверхности:

$$F(x, y, z) = 0, \tag{a}$$

мы можем перейти к

$$F_x' dx + F_y' dy + F_z' dz = 0, \tag{b}$$

т. е. вместо данной поверхности рассматривать систему поверхностей:

$$F(x, y, z) = \mathrm{Const}$$

или

$$F(x, y, z) = F(x_1, y_1, z_1). \tag{c}$$

Можно сказать: рассматривая поверхность, мы рассматриваем наряду с ее уравнением:

$$F(x, y, z) = 0 \tag{a}$$

уравнение:

$$F_x'(X - x) + F_y'(Y - y) + F_z'(Z - z) = 0. \tag{d}$$

Мы обращаем обычно внимание, главным образом, на точки поверхности и их касательные плоскости. Но мы можем составить уравнение (d) для любой точки пространства. Таким образом устанавливается корреляция между точками и плоскостями, устанавливается для каждой точки проходящая через нее плоскость и эта плоскость, в случае, если точка находится на поверхности (a), будет ее касательной.

Вообще же это будет плоскость, касательная к поверхности (c), где x_1, y_1, z_1 координаты взятой точки.

Таким образом, рассматривая вместо (a) уравнение (b), мы рассматриваем не одну поверхность (a), но и все поверхности (c), проходящие через каждую точку пространства, точки которого таким образом распределяются на ∞' поверхностей пучка (c), проходящего через кривую пересечения поверхности (a) с ∞-но удаленною плоскостью.

В дальнейшем кривые, рассматриваемые в теории поверхностей, как начерченные на поверхности, мы можем мыслить связанными с таким пучком и проходящими через любую точку пространства.

3. 2°) (1) не есть точный дифференциал, но можно найти интегрирующий множитель. Условие этого, как известно (*):

$$P(Q_z' - R_y') + Q(R_x' - P_z') + R(P_y' - Q_x') = 0,$$

что в виде символического определителя может быть записано:

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0,$$

(*) См., например, мою заметку: „Условия интегрируемости полных дифференциалов $\Sigma X dx$“. Изв. Казанск. Ф.-М. О. (2) т.

где по раскрытии должно быть положено:

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot Q = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

и т. д.

В этом случае существует такая функция M, что

$$M(Pdx + Qdy + Rdz) = dU,$$

и снова имеем ∞' поверхностей $U = \mathrm{Const}$, которые проходят через каждую точку пространства.

4. 3°) Все плоскости (4) касаются одной поверхности (но не в точках, которым они принадлежат).

Рассмотрим, при каких условиях это имеет место.

Перепишем (4) под видом:

$$PX + QY + RZ - V = 0,$$

где

$$V = Px + Qy + Rz.$$

Если существует такая поверхность:

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0, \tag{5}$$

касательные в точках которой суть все плоскости (4), то должно быть:

$$\Phi_\xi' X + \Phi_\eta' Y + \Phi_\zeta' Z - (\xi \Phi_\xi' + \eta \Phi_\eta' + \zeta \Phi_\zeta') = 0$$

тожественно с (4):

$$\frac{P}{\Phi_\xi'} = \frac{Q}{\Phi_\eta'} = \frac{R}{\Phi_\zeta'} = \frac{Px + Qy + Rz}{\xi\Phi_\xi' + \eta\Phi_\eta' + \zeta\Phi_\zeta'}, \tag{6}$$

и так как плоскость (4) проходит через точку (ξ, η, ζ), то

$$P\xi + Q\eta + R\zeta - V = 0.$$

Таким образом, последнее из соотношений (6) есть следствие первых трех, или

$$P = \mu \Phi_\xi', \quad Q = \mu \Phi_\eta', \quad R = \mu \Phi_\zeta'. \tag{7}$$

Таким образом $\frac{P}{V}$, $\frac{Q}{V}$, $\frac{R}{V}$ являются тангенциальными неоднородными координатами плоскости, касательной к поверхности:

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0, \tag{5}$$

т. е. между этими тремя величинами $\frac{P}{V}$, $\frac{Q}{V}$, $\frac{R}{V}$ должна существовать функциональная зависимость, получаемая исключением ξ, η, ζ из (5) и (7), условием чего должно быть:

$$\frac{\partial\left(\frac{P}{V},\ \frac{Q}{V},\ \frac{R}{V}\right)}{\partial(x,\ y,\ z)}=0,$$

где

$$V=Px+Qy+Rz.$$

Раскрывая имеем:

$$1=\begin{vmatrix} \frac{1}{V}P_x'-\frac{P}{V^2}V_x' & \frac{1}{V}Q_x'-\frac{Q}{V^2}V_x' & \frac{1}{V}R_x'-\frac{R}{V^2}V_x' \\ \frac{1}{V}P_y'-\frac{P}{V^2}V_y' & \frac{1}{V}Q_y'-\frac{Q}{V^2}V_y' & \frac{1}{V}R_y'-\frac{R}{V^2}V_y' \\ \frac{1}{V}P_z'-\frac{P}{V^2}V_z' & \frac{1}{V}Q_z'-\frac{Q}{V^2}V_z' & \frac{1}{V}R_z'-\frac{R}{V^2}V_z' \end{vmatrix},$$

которое преобразуем в определитель 4-го порядка, добавляя 4-й столбец 0, 0, 0, 1 и 4-ую строку P, Q, R, 1, а в этом последнем последнюю строку, умноженную соответственно на $\frac{V_x'}{V^2}$, $\frac{V_y'}{V^2}$, $\frac{V_z'}{V^2}$, прибавляя к 1-й, 2-й и 3-й:

$$\equiv\frac{1}{V^4}\begin{vmatrix} P_x' & Q_x' & R_x' & V_x' \\ P_y' & Q_y' & R_y' & V_y' \\ P_z' & Q_z' & R_z' & V_z' \\ P & Q & R & V \end{vmatrix}\equiv\frac{1}{V^4}\begin{vmatrix} P_x' & Q_x' & R_x' & xP_x'+yQ_x'+zR_x'+P \\ P_y' & Q_y' & R_y' & xP_y'+yQ_y'+zR_y'+Q \\ P_z' & Q_z' & R_z' & xP_z'+yQ_z'+zR_z'+R \\ P & Q & R & xP+yQ+zR \end{vmatrix}\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{V^4}\begin{vmatrix} P_x' & Q_x' & R_x' & P \\ P_y' & Q_y' & R_y' & Q \\ P_z' & Q_z' & R_z' & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix}.$$

Определитель этот обозначим:

$$\Delta=\begin{vmatrix} P_x' & Q_x' & R_x' & P \\ P_y' & Q_y' & R_y' & Q \\ P_z' & Q_z' & R_z' & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix} \qquad (8')$$

Итак, если тожественно:

$$\Delta=0, \qquad (8)$$

все плоскости (4) касаются одной и той же поверхности (которую A. Voss называет Ordnungsfläche).

Эта поверхность определяется в неоднородных тангенциальных координатах уравнениями:

$$u=\frac{P}{V}, \quad v=\frac{Q}{V}, \quad w=\frac{R}{V}, \tag{9}$$

которые при выполнении условия (8) приводят к уравнению:

$$\Pi(u, v, w)=0.$$

Но исключение x, y, z из (9) или

$$P-uV=0, \quad Q-vV=0, \quad R-wV=0,$$

при условии (8) может привести или к одному уравнению, тогда получаем как Ordnungsfläche собственную поверхность, или к двум, и тогда получаем поверхность развертывающуюся, или к трем, тогда Ordnungsfläche приводится к одной или нескольким точкам. Такой случай, например, представится, если тождественно:

$$Px+Qy+Rz=0,$$

когда всем точкам пространства принадлежат плоскости, проходящие через начало координат. Наконец, Ordnungsfläche может вырождаться в кривую двоякой кривизны. В этом последнем случае Π должно выполнять дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка.

Условие этого, — чтобы миноры второго порядка определителя

$$\frac{\partial\left(\frac{P}{V}, \frac{Q}{V}, \frac{R}{V}\right)}{\partial(x, y, z)}$$

обращались в нуль:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P}{V}\right):\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{V}\right):\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{R}{V}\right)=\frac{\partial\left(\frac{P}{V}\right)}{\partial y}:\frac{\partial\left(\frac{Q}{V}\right)}{\partial y}:\frac{\partial\left(\frac{R}{V}\right)}{\partial y}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P}{V}\right):\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Q}{V}\right):\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{R}{V}\right).$$

Если определитель Δ не обращается тождественно в 0, то уравнение:

$$\Delta=0 \tag{8}$$

определяет некоторую ковариантную поверхность, которую A. Voss называет Wendefläche.

5. Общий случай, — когда ни одно из перечисленных условий не выполнено, — приводит нас к своеобразной системе кривых, которые являются кривыми главной коинциденции некоторого пространственного конвекса с элементом (точка, прямая), — который я для краткости на-

зываю Бонсдорфовым конвексом. A. Voss (*) изучал их, называя их Punkt-Ebenen-Systemes. Ими занимался R. Lilientahl (**). S. Lie называет уравнения типа (1) Пфаффовыми уравнениями (***).

Уравнениями подобного вида занимался еще Эйлер. Ср. Goursat Cours d'Analyse, t. II.

Тесно связанными с этим вопросом занимался также H. Liebmann. M. Ann. 52. 1899.

Обращая внимание на геометрическую сторону, мы сначала займемся изучением свойств этих систем кривых, распространяя на них те понятия и определения, которые вводятся в теории поверхностей. Многое из этого дано уже A. Voss'ом, я лишь систематизирую и несколько пополняю полученные им результаты. Моя задача изложить последовательно теорию кривых системы (1) в том порядке, как это делается в теории поверхностей (следуя, например, Vessiot) и показать наблюдаемое при этом своего рода расщепление свойств.

6. Можно сказать, что уравнение (10) каждой точке (x, y, z) пространства подчиняет определенную плоскость (кроме $P=Q=R=0$).

Спрашивается, обратно, каким точкам принадлежит данная плоскость. Для получения ответа на этот вопрос берем произвольную плоскость:

$$ux+vy+wz+\omega=0. \tag{a}$$

Она будет совпадать с плоскостью (4) при выполнении условий:

$$\frac{P}{u}=\frac{Q}{v}=\frac{R}{w}=-\frac{(Px+Qy+Rz)}{\omega},$$

которые определяют точки (x, y, z).

Кроме того, точка эта должна лежать в плоскости (a). Поэтому, имеем:

$$ux+vy+wz+\omega=0,$$

и, следовательно, к 4-м отношениям можно добавить, как их следствие—5-е:

$$\frac{Px+Qy+Rz-(Px+Qy+Rz)}{ux+vy+wz+\omega}=\frac{0}{ux+vy+wz+\omega}.$$

Чтобы это отношение могло равняться предыдущим, должно быть поэтому:

$$ux+vy+wz+\omega=0,$$

т. е. это уравнение заменяет собою одно из 4-х отношений, являясь их следствием. Таким образом, для определения точек плоскости (a),

(*) a) Geometrische Interpretation d. Differentialgleichung $Pdx+Qdy+Rdz=0$. M. Ann. 16 S. 556—559. b) Zur Theorie der algemeinen Punkt-Ebenen-Systeme. M. Ann. 23 S. 45—81. 3) Theorie d. rationalen algebraischen Punkt-Ebenen-Systeme M. Ann. 23 S. 395—411.

(**) Über die Krümmung d. Kurvenschaaren M. Ann. 32 S. 545—565. Его же—Grundlagen d. Krümmungslehre d. Kurvenschaaren. 1896. S. 114.

(***) Geometrie der Berührungstransformationen. B. I, 1896.

которым она принадлежит, имеем уравнения:

$$Pv - Qu = 0, \quad Q\omega - Rv = 0, \quad ux + vy + wz + \omega = 0.$$

Если P, Q, R — многочлены степени m, то число решений будет таким образом равно m^2.

Если P, Q, R — степени m, то число точек, которым принадлежит одна и та же проходящая через них плоскость (а), равно m^2.

7. Элементы дуги Р.-Е. системы. Первая дифференциальная форма в теории поверхностей — элемент дуги кривой, начерченной на поверхности:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

где

$$E = \Sigma x_u'^2, \quad F = \Sigma x_u' x_v', \quad G = \Sigma x_v'^2,$$

форма, принимающая при уравнении поверхности $z = f(x, y)$ вид:

$$ds^2 = (1 + p^2)\, dx^2 + 2pqdxdy + (1 + q^2)\, dy^2.$$

В Р.-Е. системе мы имеем систему кривых, дифференциалы координат точек которых связаны соотношением:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0. \qquad (1)$$

Следовательно:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

может быть представлено в одном из трех видов:

$$ds^2 = \frac{(P^2 + R^2)\, dx^2 + 2PQdxdy + (Q^2 + R^2)\, dy^2}{R^2},$$

$$ds^2 = \frac{(Q^2 + P^2)\, dx^2 + 2PRdxdz + (R^2 + Q^2)\, dz^2}{Q^2},$$

$$ds^2 = \frac{(P^2 + Q^2)\, dy^2 + 2QRdydz + (P^2 + R^2)\, dz^2}{P^2}.$$

Первое предполагает $R \neq 0$, 2-ое $Q \neq 0$, 3-ье $P \neq 0$, поскольку мы рассматриваем только обыкновенные точки (для которых P, Q, R неравны одновременно 0). То же самое неявно подразумевается и в обычной дифференциальной геометрии — теории поверхностей, где оставляются обычно в стороне особенные точки поверхностей. Три вида линейного элемента Р.-Е. системы, т. е. дифференциала дуги интегральной кривой (1) применим и к тому случаю, когда (1) есть точный дифференциал, когда мы имеем в обычной теории элемент дуги поверхности. Написав ее уравнение под видом:

$$dF(x, y, z) = 0.$$

Мы имеем возможность, не выделяя роли ни одной из координат, брать за элемент дуги кривой на поверхности любой из 3-х видов.

Если имеем обыкновенную точку, то хотя один из 3-х коэффициентов, P, Q или R отличны от 0, и, следовательно, хотя один из трех видов линейных элементов применим, и если мы в дальнейшем исключаем, например, dz, то с тем же правом мы могли бы исключать dx или dy.

Случай $P=Q=R=0$ должен быть рассмотрен особо.

§ 2. Асимптотические линии

8. Система кривых, определенная уравнением (1):

$$Pdx+Qdy+Rdz=0$$

обладает тем свойством, что кривые, проходящие через точку (x, y, z), имеют свои касательные в этой точке, лежащие в плоскости:

$$P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0. \tag{4}$$

Если мы от точки (x, y, z) перемещаемся вдоль одной из прямых:

$$\frac{X-x}{l}=\frac{Y-y}{m}=\frac{Z-z}{n} \quad (Pl+Qm+Rn=0)$$

в бесконечно близкую точку: $(x+dx, \quad y+dy, \quad z+dz)$, то

$$Pdx+Qdy+Rdz=0$$

в силу уравнения (1).

Не все эти кривые имеют одинаково тесное отношение к плоскости (4).

Определяем, при каких условиях эта плоскость будет иметь прикосновение 2-го порядка, т. е. будет соприкасающейся плоскостью для соответствующей кривой. Для этого результат подстановки:

$$\left(x+x'\Delta t+\frac{x^4}{\lambda v}\Delta t^2+\frac{x'''}{1.24}\Delta t^3, \ldots, y+y'\Delta t+\cdots, z+z'\Delta t_n\right)$$

в (4) должно быть бесконечно-малою 3-его порядка относительно Δt. Т.-е., кроме

$$Px'+Qy'+Rz'=0, \tag{1'}$$

уже выполненного в силу (1) и показывающего, что каждая из этих кривых касается плоскости (4), должна быть еще и

$$Px''+Qy''+Rz''=0. \tag{10}$$

Но в силу (1'):

$$(Px'+Qy'+Rz')\equiv P'x'+Q'y'+R'z'+Px''+Qy''+Rz''=0.$$

С помощью (10) это выражение сводится к

$$P'x'+Q'y'+R'z'=0 \tag{11}$$

или, по умножении на dt^2, к

$$dPdx+dQdy+dRdz=0. \tag{11'}$$

Уравнение (11') 2-ой степени относительно дифференциалов; вместе с (1) оно определяет два направления. Эти направления можно назвать направлениями главных касательных (или асимптотическими направлениями). Развертывая его, мы имеем:

$$\begin{aligned}P'_x dx^2+Q'_y dy^2+R'_z dz^2+(P'_y+Q'_x)\,dxdy+\\+(P'_z+R'_x)\,dxdz+(Q'_z+R'_y)\,dydz=0\end{aligned} \tag{11''}$$

или для производных, которые пропорциональны косинусам l, m, n соответственной прямой:

$$\begin{aligned}P'_x x'^2+Q'_y y'^2+R'_z z'^2+(P'_y+Q'_x)\,x'y'+\\+(P'_z+R'_x)\,x'z'+(Q'_z+R'_y)\,y'z'=0,\end{aligned}$$

что должно быть рассматриваемо совместно с (1) или (1').

Соответствующие (11) прямые образуют конус:

$$\begin{aligned}P'_x(X-x)^2+Q'_y(Y-y)^2+R'_z(Z-z)^2+(P'_y+Q'_x)(X-x)(Y-y)+\\+(P'_z+R'_x)(X-x)(Z-z)+(Q'_z+R'_y)(Y-y)(Z-z)=0.\end{aligned} \tag{12}$$

Главные касательные получаются в пересечении его плоскостью (4). Получаются или две вещественных и различных прямых, две совпадающих или две мнимых сопряженных. В случае, если две прямые совпадают, плоскость (4) касается конуса.

Для определения условия этого, переносим начало в точку (x, y, z), так что $X-x=\xi$, $Y-y=\eta$, $Z-z=\zeta$. Уравнение (12) примет вид:

$$\begin{aligned}P'_x\xi^2+Q'_y\eta^2+R'_z\zeta^2+(P'_y+Q'_x)\,\zeta\eta+(P'_z+R'_x)\,\xi\zeta+\\+(Q'_z+R'_y)\,\eta\zeta=0,\end{aligned} \tag{12'}$$

при условии (1)

$$P\xi+Q\eta+R\zeta=0. \tag{12''}$$

Для касания должно быть:

$$\left.\begin{aligned}2P'_x\xi+(P'_y+Q'_x)\eta+(P'_z+R'_x)\zeta=\mu P\\(P'_y+Q'_x)\xi+2Q'_y\eta+(Q'_z+R'_y)\zeta=\mu Q\\(P'_z+R'_x)\xi+(Q'_z+R'_y)\eta+2R'_z\zeta=\mu R\\P\xi+Qy+Rz=0\end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

Исключая μ, ξ, η, ζ, получаем, как условие совместности, равенство нулю определителя:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 2P'_x & Q'_x + P'_y & R'_x + P'_z & P \\ Q'_x + P'_y & 2Q'_y & Q'_z + R'_y & Q \\ R'_x + P'_z & R'_y + Q'_z & 2R'_z & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix} = 1. \qquad (14)$$

По аналогии со случаем кривых, образующих поверхность, можем сказать, что в этом последнем случае мы имеем параболическую точку, в случае двух вещественных прямых — гиперболическую и в случае мнимых — эллиптическую точку.

Различать эти случаи можно по знаку этого же определителя (который, заметим, при $Pdx + Qdy + Rdz \equiv dz - pdx - qdy$ обращается в 4 $(rt - s^2)$). Таким образом, мы должны считать, что $\Delta' < 0$ соответствует эллиптической точке и $\Delta' > 0$ — гиперболической.

Действительно, если (12′) умножим на R^2 и заменим $R\zeta$ через $-(P\xi + Q\eta)$, то получим однородное уравнение относительно ξ, η, которое, решенное в отношении $\frac{\eta}{\xi}$, даст дискриминант:

$$[R^2(P'_y + Q'_x) - 2PQR'_z - PR(Q'_z + R'_x) - QR(P'_z + R'_x)]^2 -$$
$$-4[R^2P'_x - PR(P'_z + R'_x) + P^2R'_z] \cdot [R^2Q'_y - QR(Q'_z + R'_y) + Q^2R'_z],$$

что, по приведении, обращается в $R^2\Delta'$.

10. Можно поставить вопрос: когда все направления будут главными, т. е., когда плоскость точек будет соприкасающейся для всех направлений?

Условия этого: (12′) уничтожается в силу (12″) независимо от ξ, η, ζ, — т. е.

$$\left.\begin{aligned} &R^2(P'_y + Q'_x) - R\{P(Q'_z + R'_x) + Q(P'_z + R'_x)\} + 2PQR'_z = 0 \\ &R^2P'_x - PR(P'_z + R'_x) + P^2R'_z = 0 \\ &R^2Q'_y - QR(Q'_z + R'_y) + Q^2R'_z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Если же уравнение самого конуса (12′) обращается тождественно в 0, то должно быть:

$$P'_x = 0, \quad Q'_y = 0, \quad R'_z = 0, \quad P'_y + Q'_x = 0, \quad P'_z + R'_x = 0, \quad Q'_z + R'_y = 0,$$

и приходим к

$$P = cy - bz, \quad Q = az - cx, \quad R = bx - ay,$$

и (1) обращается в

$$0 = a(zdy - ydz) + b(xdz - zdx) + c(ydx - xdy),$$

т. е. соответствует некоторому линейному комплексу.

11. Примем плоскость (4) за плоскость XOY, точку (x, y, z) за начало координат. Тогда $P=0$, $Q=0$ (и, следовательно, в силу делаемого предположения $R \neq 0$). При этом (1) дает $dz=0$.

Уравнение (6) принимает вид:

$$dx(P'_x dx + P'_y dy) + dy(Q'_x dx + Q'_y dy) = 0$$

или

$$P'_x dx^2 + (P'_y + Q'_x)\,dxdy + dy^2 . Q'_y = 0,$$

квадратное уравнение, которое имеет два корня вещественных и различных, если

$$(P'_y + Q'_x)^2 - 4P'_x Q'_y > 0;$$

эти корни будут вещественные равные, если $(P'_y + Q'_x)^2 - 4P'_x Q'_y = 0$, и мнимые сопряженные, если

$$(P'_y + Q'_x)^2 - 4P'_x Q'_y < 0;$$

но левая часть есть как раз то выражение, к которому сводится при этом Δ (вплоть до положительного множителя R^2):

$$(\Delta')_{P=Q=0} = -R^2[4P'_x Q'_y - (Q'_x + P'_y)^2];$$

таким образом, знак Δ' говорит нам, к которому из трех типов относится точка (x, y, z) пространства. С этими условиями мы встретимся и далее. Заметим еще, что два корня уравнения будут давать в произведении -1, а, следовательно, направления главных касательных будут взаимно-перпендикулярны, если $P'_x + Q'_y = 0$ (в нашей частной системе координат).

В общем случае расположения координатных осей то же условие выразится таким образом:

условие перпендикулярности направлений (dx, dy, dz), и $(d'x, d'y, d'z)$

$$dxd'x + dyd'y + dzd'z = 0.$$

Умножая на $R^2 \neq 0$ и заменяя Rdz и $Rd'z$ по (1), получим:

$$(R^2 + P^2)\,dxd'x + PQ\,(dxd'y + dyd'x) + (R^2 + Q^2)\,dyd'y = 0.$$

Здесь

$$\frac{dxd'x}{C} = \frac{dyd'x + dxd'y}{-B} = \frac{dyd'y}{A},$$

где C, B, A — коэффициенты уравнения, получаемого из (11″) такого же данного с помощью (1) — те же самые. Это те, которые приравнены нулю в (15). Вставляя эти значения, получаем по приведении и сокращении на R^2:

$$P^2(Q'_y + R'_z) - PQ(P'_y + Q'_x) + Q^2(P'_x + R'_z) -$$
$$-R\{P(P'_z + R'_x) + Q(Q'_z + R'_y)\} + R^2(P'_x + Q'_y) = 0.$$

При $P=Q=0$ все сводится к последнему члену.

12. К уравнению главных касательных можно притти и следующим образом. Уравнение асимптотических линий поверхности:

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0$$

может быть написано также

$$dxdp + dydq = 0.$$

Оно выражает, что перпендикуляр из точки бесконечно близкой к точке прикосновения на касательную плоскость — бесконечно-малая 3-го порядка.

В нашем случае (1)

$$dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy.$$

Следовательно, роль p и q играют $-\frac{P}{R}$ и $-\frac{Q}{R}$. Таким образом, должны иметь:

$$dx\,d\left(\frac{P}{R}\right) + dy\,d\left(\frac{Q}{R}\right) = 0$$

или

$$R\,(dxdP + dydQ) - (Pdx + Qdy)\,dR = 0.$$

Заменяя обратно: $-(Pdx + Qdy)$ через Rdz., получаем:

$$R\,(dxdP + dydQ + dzdR) = 0.$$

$R \neq 0$ и может быть отброшено. Вывод применим и в том случае, если условия интегрируемости выполнимы.

Вообще мы можем этому уравнению придать несколько иной смысл. Если точке (x, y, z) принадлежит плоскость (4), то точке бесконечно-близкой $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$

$$\begin{aligned}(P + dP)\,(X - x - dx) + (Q + dQ)\,(Y - y - dy) &+ \\ + (R + dR)\,(Z - z - dz) &= 0.\end{aligned} \tag{4'}$$

Предполагая, что эта точка лежит в плоскости (4), имеем, что (1) выполнено, и тогда условие:

$$dx\,dP + dy\,dQ + dz\,dR = 0$$

выражает, что плоскость (4') проходит через точку (x, y, z) (с точностью до бесконечно-малых 3-го порядка). Иными словами, если из точки (xyz) в плоскости (4) бесконечно-мало переместиться по направлению $(dx,\ dy,\ dz)$, то точке $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ будет принадлежать плоскость (4'). Перпендикуляр на нее из (x, y, z) будет

$$\frac{-dx\,(P + dP) - dy\,(Q + dQ) - dz\,(R + dR)}{\sqrt{(P + dP)^2 + (Q + dQ)^2 + (R + dR)^2}}.$$

С точностью до бесконечно-малых 3-го порядка (не выписаны члены $\frac{1}{2}d^2P$, $\frac{1}{2}d^2Q$, $\frac{1}{2}d^2R$ и т. д.).

Но так как (dx, dy, dz) по условию выполняют (1), то эта главная часть сводится к

$$\pm\frac{dx\,dP+dy\,dQ+dz\,dR}{\sqrt{\Sigma(P+dP)^2}}.$$

Этот перпендикуляр является величиною 2-го порядка. Он будет величиною 3-го порядка:

$$\frac{1}{2}\,\frac{dx\,d^2P+dy\,d^2Q+dz\,d^2R}{\sqrt{\Sigma(P+dP)^2}}$$

если dx, dy, dz выполняют сверх (1) еще и уравнение:

$$dx\,dP+dy\,dQ+dz\,dR=0.$$

13. Поверхность $\Delta'=0$ A. Voss называет фокальною поверхностью (Brennfläche), но она, повидимому, не связана с фокальною поверхностью конгруэнции, связанной с $P.$-$E.$ системою.

Поверхность $\Delta'=0$ отделяет ту область пространства, которая заполнена эллиптическими точками, от области, заполненной гиперболическими.

14. Между определителями Δ' и Δ существует следующее соотношение:

$$\Delta'=4\Delta+G^2,$$

где G — левая часть условия интегрируемости.

Доказательство этого довольно продолжительно: мы представляем Δ' под видом:

$$\Delta'=\begin{vmatrix} 2P'_x & 2P'_y+(Q'_x-P'_y) & 2P'_z+(R'_x-P'_z) & P \\ 2Q'_x+(P'_y-Q'_x) & 2Q'_y & 2Q'_z+(R'_y-Q'_z) & Q \\ 2R'_x+(P'_z-R'_x) & 2R'_y+(Q'_z-R'_y) & 2R'_z & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix}$$

и разлагаем на сумму 8 определителей:

$$1)\ \begin{vmatrix} 2P'_x & 2P'_y & 2P'_z & P \\ 2Q'_x & 2Q'_y & 2Q'_z & Q \\ 2R'_x & 2R'_y & 2R'_z & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix}=4\Delta,\quad 2)\ \begin{vmatrix} 2P'_x & Q'_x-P'_y & 2P'_z & P \\ 2Q'_x & 0 & 2Q'_z & Q \\ 2R'_x & Q'_z-R'_y & 2R'_z & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix},$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 0 & 2P'_y & 2P'_z & P \\ P'_y-Q'_x & 2Q'_y & 2Q'_z & Q \\ P'_z-R'_x & 2R'_y & 2R'_z & R \\ 0 & Q & R & 0 \end{vmatrix},\quad 4)\ \begin{vmatrix} 0 & Q'_x-P'_y & 2P'_z & P \\ P'_y-Q'_x & 0 & 2Q'_z & Q \\ P'_z-R'_x & Q'_z-R'_y & 2R'_z & R \\ 0 & 0 & R & 0 \end{vmatrix},$$

$$5)\ \begin{vmatrix} 2P'_x & 2P'_y & R'_x - P'_z & P \\ 2Q'_x & 2Q'_y & R'_y - Q'_z & Q \\ 2R'_x & 2R'_y & 0 & R \\ P & Q & 0 & 0 \end{vmatrix},\quad 6)\ \begin{vmatrix} 2P'_x & Q'_x - P'_y & R'_x - P'_z & P \\ 2Q'_x & 0 & R'_y - Q'_z & Q \\ 2R'_x & Q'_z - R'_y & 0 & R \\ P & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$7)\ \begin{vmatrix} 0 & 2P'_y & R'_x - P''_z & P \\ P'_y - Q'_x & 2Q'_y & R'_y - Q'_z & Q \\ P'_z - R'_x & 2R'_y & 0 & R \\ 0 & Q & 0 & 0 \end{vmatrix},\quad 8)\ \begin{vmatrix} 0 & Q'_x - P'_y & R'_x - P'_z & P \\ P'_y - Q'_x & 0 & R'_y - Q'_z & Q \\ P'_z - R'_x & Q'_z - R'_y & 0 & R \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

6) Равен $-P[(Q'_x - P'_y)R + Q(P'_z - R'_x) + P(-Q'_z + R'_y)](Q'_z - R'_y) =$
$= G\ P(R'_y - Q'_z)$,

4) $\equiv -RG(P'_y - Q'_x)$,

7) $\equiv -GQ(P'_z - R'_x)$.

Таким образом:

$$(4) + (6) + (7) = -G^2.$$

Точно так же найдем:

$$(2) + (3) + (5) = 2G^2.$$

Итак:

$$\Delta' = 4\Delta + G^2.$$

§ 3. Минимальные кривые (изотропные направления)

15. Если для линейных элементов, выполняющих уравнение:

$$(1)\quad Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

поставим условие:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

то, умножая на R^2 и заменяя dz по (1), получим уравнение:

$$R^2(dx^2 + dy^2) + (Pdx + Qdy)^2 = 0$$

или

$$(P^2 + R^2)^2 + 2PQdxdy + (R^2 + Q^2)^2 dy^2 = 0, \tag{16}$$

которое каждой точке подчиняет д в а направления (мнимые), вообще различные и совпадающие только при

$$P^2Q^2 - (P^2 + R^2)(R^2 + Q^2) = 0,$$

т. е. при

$$R^2(P^2 + Q^2 + R^2) = 0,$$

или, если отбросить $R=0$, — решение, введенное при умножении на R^2:

$$P^2+Q^2+R^2=0. \tag{17}$$

Если это последнее выражение обращается тождественно в 0, основные формулы неприменимы.

Плоскость (4):

$$P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0,$$

системы касается изотропного конуса

$$u^2+v^2+w^2=0; \qquad \overline{\omega}=0,$$

в силу (17), она есть изотропная плоскость: таким образом все плоскости такой Р.-Е. системы изотропны.

Возьмем кривую двойной кривизны минимальную, для которой $dx^2+dy^2+dz^2=0$ и, следовательно, $dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z=0$. По тожеству Эйлера:

$$0=(dx^2+dy^2+dz^2)(d^2x^2+d^2y^2+d^2z)^2-(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)^2,$$

т.-е. $0=(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dxd^2y-dyd^2x)^2$, или

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=0,$$

где λ, μ, ν—косинусы углов соприкосновения плоскости осями. Таким образом, если взять кривую минимальную, то ее соприкасающиеся плоскости изотропны и, следовательно, огибают изотропную развертывающуюся.

Для наших Р.-Е. систем отсюда вытекает: асимптотические направления. Р.-Е. системы, в которой $P^2+Q^2+R^2=0$ огибают такие изотропные кривые (кривые минимума), и их Р.-Е. плоскости огибают изотропные развертывающиеся.

§ 4. Сопряженные направления

16. Сопряженными поверхностями в теории поверхностей называют такие, которые связаны так, что одно есть направление касательной, к кривой, начерченной на поверхности в точке ее, а другое — хзрактеристика развертывающейся, касающейся поверхности вдоль этой кривой. Так как в нашей системе нет ни поверхности, ни кривой на ней, ни развертывающейся, то надо посмотреть, как строятся сопряженные направления по элементам.

Берем некоторую точку поверхности и некоторое направление в этой точке к ней касательное. Оно лежит в касательной плоскости, и, перейдя по нему в бесконечно-близкую точку, получим в ней вторую касательную плоскость, которая пересекается с первой по прямой, вообще отличной от исходного направления и являющеюся именно характеристикой развертывающейся, огибаемой касательными вдоль кривой плоскостями, — оно и будет направлением, сопряженным первому.

В бесконечно-малом, следовательно, можно и не говорить о кривой и развертывающейся, а только о двух направлениях: берем в некотором направлении в касательной плоскости бесконечно-близкую точку, и соответствующая касательная плоскость пересекается с первой по прямой, сопряженной первому направлению (при чем симметричность связи сама по себе еще не указывает взаимности). Такое определение вполне приложимо к Р.-Е. системам.

Берем в плоскости, принадлежащей точке (x, y, z), произвольную проходящую через (x, y, z) прямую и на ней бесконечно-близкую к (x, y, z) точку $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$. Очевидно, если плоскость определена уравнением (4), то выполнено (1) $Pdx+Qdy+Rdz=0$.

Второй точке соответствует плоскость:

$$(P+dP)(X-x-dx)+(Q+dQ)(Y-y-dy)+\\+(R+dR)(Z-z-dz)=0,$$

которая пересекается с первой по прямой, которой мы хотим найти направление. Прямая:

$$X-x-dx=\delta\,.\,l,\quad Y-y-dy=\delta\,.\,m,\quad Z-z-dz=\delta\,.\,n$$

лежит в первой плоскости, а потому:

$$Pdx+Qdy+Rdz+\delta\,(Pl+Qm+Rn)=0,$$

и так как по (1) $Pdx+Qdy+Rdz=0$ и $\delta \neq 0$, должно быть:

$$Pl+Qm+Rn=0,$$

и сверх того прямая лежит и во второй:

$$\delta\,(Pl+Qm+Rn)+ldP+mdQ+ndR=0$$

Таким образом, имеем еще:

$$ldP+mdQ+ndR=0,$$

т. е.

$$\frac{l}{QdR-RdQ}=\frac{m}{RdP-PdR}=\frac{n}{PdQ-QdP},$$

и так как перемещения вдоль этой прямой $d'x$, $d'y$, $d'z$ пропорциональны l, m, n, то

$$\frac{d'x}{QdR-RdQ}=\frac{d'y}{RdP-PdR}=\frac{d'z}{PdQ-QdP}; \tag{18}$$

вводя множителя пропорциональности S, имеем:

$$Sd'x=QdR-RdQ,\ Sd'y=RdP-PdR,\ Sd'z=PdQ-QdP. \tag{18'}$$

Умножая на P, Q, R соответственно и складывая, имеем:

$$S(Pd'x+Qd'y+Rd'z)=0,$$

или

$$Pd'x+Qd'y+Rd'z=0, \tag{19}$$

т. е. направление $(d'x, d'y, d'z)$ лежит также в плоскости (4).

Кроме того, эти уравнения, умноженные на dP, dQ, dR, дают:

$$dP\,d'x+dQd'y+dRd'z=0, \tag{20}$$

т. е. это направление лежит в плоскости:

$$dP(X-x-dx)+dQ\,(Y-y-dy)+dR\,(Z-z-dz)=0.$$

Между двумя направлениями установлена проективность, но в отличие от случая поверхностей взаимности между ними не существует — проективность не инволюционная.

Если бы хотели избежать безконечно малых, то имели бы:

$$\frac{l}{(QR'_x-RQ'_x)L+(QR_y-RQ'_y)M+(QR'_z-RQ'_z)N}=$$
$$=\frac{m}{(RP'_x-PR'_x)L+(RP'_y-PR'_y)M+(RP'_z-PR'_z)N}= \tag{21}$$
$$=\frac{n}{(PQ'_x-QP'_x)L+(PQ'_y-QP'_y)M+(PQ'_z-QP'_z)N},$$

где L, M, N означают косинусы углов направления dx, dy, dz с осями.

18. Двойные элементы этой проективности определяются условиями:

$$S.L=(QR'_x-RQ'_x)\,L+(QR'_y-RQ'_y)\,M+(QR'_z-RQ'_z)\,N$$

и т. д., где S общее значение 3-х отношений при $l=L$ и т. д.

Совместность этих уравнений требует уничтожения определителя.

$$0=\begin{vmatrix} (QR'_x-RQ'_x)-S & QR'_y-RQ'_y & QR'_z-RQ'_z \\ RP'_x-PR'_x & (RP'_y-PR'_y)-S & RP'_z-PR'_z \\ PQ'_x-QP'_x & PQ'_y-QP'_y & (PQ'_z-QP'_z)-S \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Здесь свободный член:

$$K=\begin{vmatrix} QR'_x-RQ'_x, & QR'_y-RQ'_y, & QR'_z-RQ'_z \\ RP'_x-PR'_x & RP'_y-PR'_y, & RP'_z-PR'_z \\ PQ'_x-QP'_x, & PQ'_y-QP'_y, & PQ'_z-QP'_z \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} P'_x & Q'_x & R'_x \\ P'_y & Q'_y & R'_y \\ P'_z & Q'_z & R'_z \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} 0, & -P, & Q \\ R, & 0, & -P \\ -Q, & P, & 0 \end{vmatrix}=0,$$

ибо второй множитель равен нулю.

Таким образом, уравнение, определяющее S для двойных элементов, сводится к

$$-S^3+S^2G-\Delta.S=0,$$

или по сокращении на $-S$:

$$S^2-G.S+\Delta=0, \tag{26}$$

где

$$G=(QR'_x-RQ'_x)+(RP'_y-PR'_y)+(PQ'_z-QP'_z)=P(Q'_z-R'_y)+$$

$$+Q(R'_x-P'_z)+R(P'_y-Q'_x)\equiv\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Наконец,

$$\Delta=(QR'_x-RQ'_x)(RP'_y-PR'_y)+(QR'_x-RQ'_x)(PQ'_z-QP'_z)+$$

$$+(RP'_z-PR'_z)(PQ'_z-QP'_z)-(QR'_z-RQ'_z)(PQ'_x-QP'_x)-$$

$$-(RP'_z-PR'_z)(PQ'_y-QP'_y)-(QR'_y-RQ'_y)(RP'_x-PR'_x)=$$

$$=P^2(Q'_yR'_z-R'_yQ'_z)+Q^2(P'_xR'_z-R'_xP'_z)+R^2(P'_xQ'_y-Q'_xP'_y)+$$

$$+PQ\{R'_yP'_z-R'_zP'_y)+(Q'_zR_x-R'_zQ'_x)\}+$$

$$+PR\{(P'_yQ'_z-Q'_yP'_z)+(Q'_yP'_x-P'_yQ'_x)\}+$$

$$+QR\{(Q'_xP'_z-P'_xQ'_z)+(P'_xR'_y-P'_yR'_x)\},$$

что равносильно:

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix} P'_x & P'_y & P'_z & P \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z & Q \\ R'_x & Q'_y & R'_z & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix}.$$

Итак, уравнение для S:

$$S^2-G.S'-\Delta=0.$$

Оно имеет вещественные корни при $G^2+4\Delta>0$,
„ „ мнимые сопряженные при $G^2+4\Delta<0$,
„ „ равные „ при $G^2+4\Delta=0$.

В первом случае проективность г и п е р б о л и ч е с к а я, во втором — э л л и п т и ч е с к а я и в третьем — п а р а б о л и ч е с к а я.

Так как

$$G^2+4\Delta=\Delta',$$

то данная на основании понятия о сопряженных линиях классификация точек пространства совпадает с тою, которую мы получили выше, исходя из понятия об а с и м п т о т и ч е с к и х л и н и я х.

19. И в том и в другом случае мы приходим к результату, совершенно не связывая с понятием об индикатриссе Дюпена, которая, разумеется, в данном случае отпадает так, как она обычно вводится.

И потому, этот картинный прием в теории поверхностей может быть обойден. Надо признать, что он в обычном виде вносит некоторую нестройность в изложение теории кривизны (связывать или не связывать ее с соприкасающимся параболоидом), — в ней внимание обращается не на распределение точек в отношении нормали, а распределение точек поверхности в отношении касательной плоскости, когда мы берем параллельные сечения касательной плоскости и получаем в случае эллиптической точки, что точки поверхности вблизи ее лежат по одну сторону касательной плоскости, — в случае гиперболической — по обе, располагаясь в дополнительных углах асимптотических направлений. В дальнейшем (§ 6) мы к этому вернемся в другом аспекте.

20. Возвращаемся к уравнениям (18′):

$$Sd'x = QdR - RdQ, \quad Sd'y = RdP - PdR, \quad Sd'z = PdQ - QdP \qquad (18')$$

и выведенным из них соотношениям (19) и (20).

Обменим в них места dx, dy, dz и $d'x$, $d'y$, $d'z$. Первое из этих двух заменится на (1) (основное), а второе перепишем:

$$\begin{aligned} d'x(P'_x dx + Q'_x\, dy + R'_x dz) + d'y(P'_y dx + Q'_y dy +\\ + R'_y dz) + d'z(P'_z dx + Q'_z dy + R'_x dz) = 0. \end{aligned} \qquad (20')$$

Выражение это совпадет с предыдущим (20), если

$$P'_y = Q'_x, \quad R'_x = P'_z, \quad Q'_z = R'_y.$$

Это выражает, что левая часть (1) точный дифференциал. Но, учитывая, что это выражение и (18) должно быть равно нулю, заметим, что не должно происходить изменения при таком обмене dx, dy, dz и $d'x$, $d'y$, $d'z$ в выражении:

$$dPd'x + dQd'y + dRd'z + (Pd'x + Qd'y + Rd'z)(\lambda dx + \mu dy + \nu dz),$$

при произвольных λ, μ, ν, т. е. должно быть:

$$P'_y + P\mu = Q'_x + Q\lambda, \quad P'_z + P\,.\,\nu = R'_x + R\,.\,\lambda, \quad Q'_y + Q\nu = R'_x + R\mu,$$

что можно переписать:

$$\begin{aligned} P'_y - Q'_x &= Q\lambda - P\mu,\\ R'_x - P'_z &= P\,.\,\nu - R\lambda,\\ Q'_z - R'_y &= R\mu - Q\nu. \end{aligned}$$

Эти уравнения в отношении λ, μ, ν неразрешимы, вообще говоря.

Множим первое на R, второе на Q, третье на P и складываем; при этом λ, μ, ν исключаются, и имеем:

$$R(P'_y - Q'_x) + Q(R'_x - P'_z) + P(Q'_z - R'_y) \equiv G = 0.$$

Таким образом, проективное соответствие будет инволюционным при условии $G = 0$.

Иными словами, сопряженные направления будут взаимно-сопряженными лишь в случае выполнения условия интегрируемости.

21. Направления совпадающих сопряженных линий (или двойных линий проективного соответствия), таким образом, приводятся к виду (полагая в (20) или (21)) $dx = d'x$, $dy = d'y$, $dz = d'z$:

$$dx\,dP + dy\,dQ + dz\,dR = 0,$$

т. е. это найденные выше направления главных касательных (асимптотические линии). Понятно, что основанные на тех и других соображениях классификации точек пространства совпадают.

22. Много нагляднее получаем представление о нашем проективном соответствии, приняв снова M за (0, 0, 0) и соответствующую плоскость (4) за плоскость XOY. Тогда $P = 0$, $Q = 0$, и по (1) $dz = 0$ (ибо $R \neq 0$ — иначе точка особенная).

Уравнения соответствия принимают вид:

$$\begin{aligned} S\,.\,d'x &= -R(Q'_x dx + Q'_y dy), \\ S\,.\,d'y &= R(P'_x dx + P'_y dy). \end{aligned} \tag{24}$$

Исключая S, имеем:

$$d'(x)\,(P'_x dx + P'_y dy) + d'y\,(Q'_x dx + Q'_y dy) = 0$$

или

$$P'_x dx d'x + dx d'y\,.\,Q'_x + d'x dy\,.\,P'_y + Q'_y dy d'y = 0.$$

Двойные элементы этого соответствия определяются квадратным уравнением:

$$\begin{vmatrix} Q'_x + \dfrac{S}{R} & Q'_y \\ P'_x & P'_y - \dfrac{S}{R} \end{vmatrix} = 0 \equiv \frac{S^2}{R^2} - \frac{S}{R}(Q'_x - P'_y) + Q'_x P'_y - P'_x Q'_y = 0.$$

Или уравнением для $\dfrac{dy}{dx}$:

$$Q'_y dy^2 + (P'_y - Q'_x)dx dy + P'_x dx^2 = 0.$$

Легко видеть, что соответствие (24) инволюционно, если $(P'_y - Q'_x) = 0$ к чему теперь сводится условие интегрируемости.

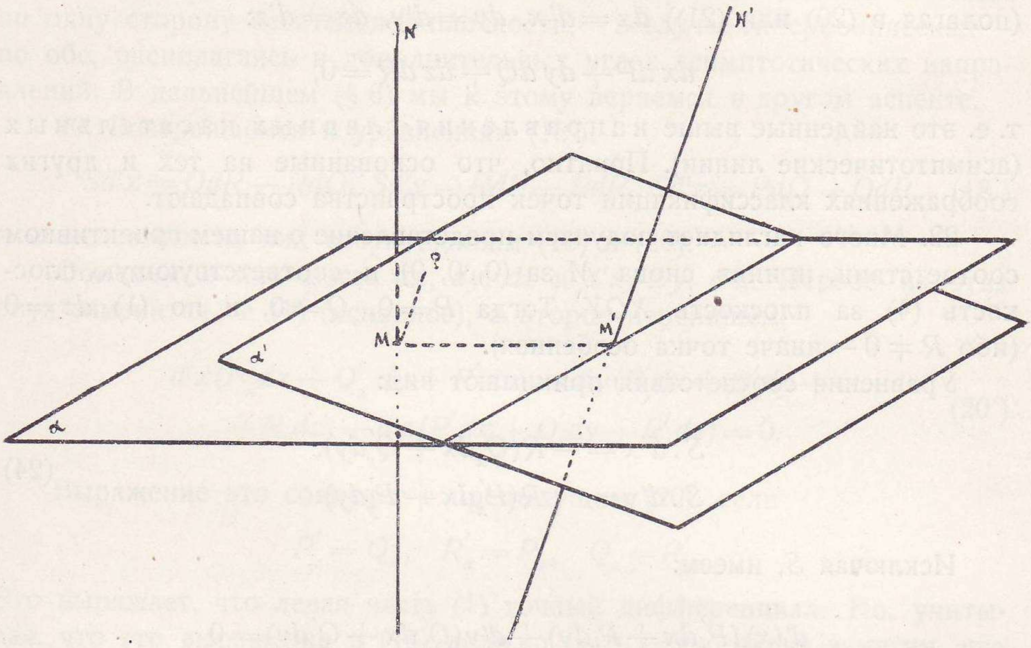
Снова получили:

$$G = 0.$$

Только при условии интегрируемости сопряженность взаимна.

§ 5. Кривизна. Главные сечения. Полная и средняя кривизна

23. Если бы при перемещении в плоскости α принадлежащие этим точкам плоскости системы сохранялись, мы имели бы случай, анало-



Черт. 1

гичный плоским системам. Пусть при перемещении по некоторому направлению в плоскости (4) мы получаем новую плоскость:

$$0 = (P + dP)(X - x - dx) + (Q + dQ)(Y - y - dy) + \\ + (R + dR)(Z - z - dz) = 0. \quad (4')$$

Косинусы углов нормали NM и первой плоскости пропорциональны P, Q, R, для новой — $N'M'$ пропорциональны $P + dP$, $Q + dQ$, $R + dR$.

За меру кривизны примем предел отношения:

$$\frac{\text{угол } (NM, N'M')}{MM'}.$$

Можно искать угол прямой MM' с $N'M'$. Косинус этого угла равен синусу угла между плоскостями.

Имеем:

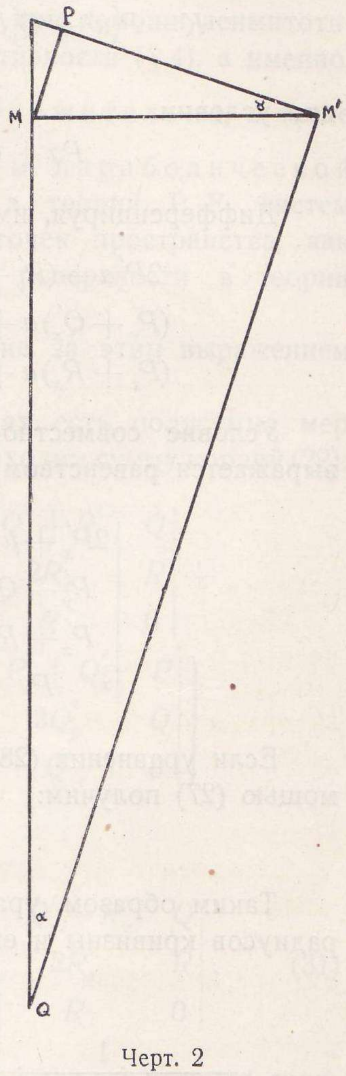
$$\frac{\cos(N'M', MM')}{ds} = \frac{dx(P+dP)+dy(Q+dQ)+dz(R+dR)}{ds\sqrt{(P+dP)^2+(Q+dQ)^2+(R+dR)^2}},$$

и так как (dx, dy, dz) взято в (4), то $Pdx+Qdy+Rdz=0$, и искомое выражение принимает в пределе вид $\left(\text{мы полагаем это отношение} = \frac{1}{\varrho}\right)$:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{dxdP+dydQ+dzdR}{ds^2\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}.$$

Оно, отметим, неприменимо к минимальным линиям.

Эта кривизна системы в определенном направлении есть не что иное, как первая кривизна кривой системы, касающейся плоскости (4) в направлении (dx, dy, dz), лежащем в этой плоскости.



Черт. 2

Легко можно было бы получить это выражение, применяя тот же прием, каким выводится в дифференциальной геометрии выражение радиуса кривизны кривой на поверхности.

Из точки M опустим перпендикуляр MP на плоскость (4'), $M'Q \perp MP$ и в плоскости, проходящей через MP и $M'Q$, проводим прямую $MQ \perp MM'$. Тогда из подобия треугольников MPM' и $MM'Q$ имеем:

$$\frac{MM'}{M'Q} = \frac{MP}{MM'}.$$

Отсюда:

$$\frac{1}{M'Q} = \frac{MP}{MM'^2}.$$

Угол $\alpha = \angle PM'M = M'QM$ есть угол между двумя касательными MM' и MP', т. е. угол смежности, а потому $M'Q = \frac{MM'}{\sin\alpha}$ является радиусом кривизны в пределе $\alpha = 0$. Принимая M' за элемент дуги кривой, таким образом, получим:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{(P+dP)\,dx+(Q+dQ)dy+(R+dR)\,dz}{ds^2\sqrt{(P+dP)^2+(Q+dQ)^2+(R+dR)^2}}.$$

Или с помощью (1')

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{dx\,dP+dy\,dQ+dz\,dR}{ds^2\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}.$$

Два выражения, как видим, совпадают. Если расписать более подробно, будем иметь:

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{P'_x dx^2+Q'_y dy^2+R'_z dz^2+dxdy(P'_y+Q'_x)+dxdz(P'_z+R'_x)+dydz(Q'_z+R'_y)}{ds^2\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}. \quad (25)$$

24. Как и в случае поверхностей, вращая прямую MM', будем менять ϱ Наибольшее и наименьшее его значение назовем главными радиусами.

Направление радиусов кривизны главных сечений ищем обычным путем.

Ищем максимум-минимум выражения (25), при условии (1), — иначе говоря, ищем максимум-минимум выражения:

$$\begin{aligned} K = P'_x a^2 + Q'_y b^2 + R'_z c^2 + (P'_y + Q'_x)ab + (P'_z + R'_x)ac + \\ + (Q'_z + R'_y)bc \end{aligned} \quad (26)$$

при условии

$$Pa + Qb + Rc = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1. \quad (27)$$

Дифференцируя, имеем:

$$\left.\begin{aligned} 2P'_x a + (P'_y + Q'_x)b + (P'_z + R'_x)c + \lambda P + \mu a = 0 \\ (P'_y + Q'_x)a + 2Q'_y b + (Q'_z + R'_y)c + \lambda Q + \mu b = 0 \\ (P'_z + R'_x)a + (Q'_z) + R'_y)b + 2R'_z c + \lambda R + \mu c = 0 \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Условие совместности этих уравнений в отношении a, b, c, λ выражается равенством нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} 2P'_x + \mu & P'_y + Q'_x & P'_z + R'_x & P \\ P'_y + Q'_x & 2Q'_y + \mu & Q'_z + R'_y & Q \\ P'_z + R'_x & Q + R'_y & 2R'_z + \mu & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (29)$$

Если уравнения (28) помножим соответственно на a, b, c, то с помощью (27) получим:

$$2K + \mu = 0.$$

Таким образом, уравнение (29) дает нам выражение для главных радиусов кривизны и его свободный член:

$$-\frac{1}{P^2+Q^2+R^2}\begin{vmatrix} 2P'_x & P'_y + Q'_x & P'_z + R'_x & P \\ P'_y + Q'_x & 2Q'_y & Q'_z + R'_y & Q \\ P'_z + R'_x & Q'_z + R'_y & 2R'_z & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix} = 4K_1K_2 \quad (30)$$

и так как $K=\frac{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{\varrho}$, то произведение главных радиусов кривизны (выражение соответствующее Гауссовой кривизне) получает вид:

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}=-\frac{\Delta'}{4(P^2+Q^2+R^2)^2}. \tag{30'}$$

Таким образом, если $\Delta'>0$, выражение $\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}<0$, если $\Delta'<0$, напротив $\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}>0$ и если $\Delta'=0$, $\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}=0$.

Таким образом, рассматривая выражение $\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}$, мы приходим к такой же классификации точек пространства, как и при помощи асимптотических линий (§ 2, n° 9) и при помощи проективности (§ 4), а именно, величина $\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}$ в точке *эллиптической положительна*, в точке *гиперболической отрицательна* и в *параболической равна нулю*. Оно играет, таким образом, в теории Р.-Е. систем такую же роль в отношении классификации точек пространства, как полная кривизна для классификации точек поверхности в теории поверхностей.

Это оправдывает в то же время сохранение за этим выражением наименования полной кривизны Р.-Е. системы.

25. *Средняя кривизна* в поверхностях есть полусумма мер кривизны главных нормальных сечений. Здесь находим сумму корней (29):

$$2(K_1+K_2)=\frac{1}{P^2+Q^2+R^2}\left\{\begin{vmatrix}2Q'_y & Q'_z+R'_y & Q\\ Q'_z+R'_y & 2R'_z & R\\ Q & R & 0\end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix}2P'_x & P'_z+R'_x & P\\ P'_z+R'_x & 2R'_y & R\\ P & R & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2P'_x & P'_y+Q'_x & P\\ P'_y+Q'_x & 2Q'_y & Q\\ P & Q & 0\end{vmatrix}\right\},$$

и так как $K=\frac{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{2\varrho}$, то

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\frac{1}{(P^2+Q^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\sum\begin{vmatrix}2Q'_y & Q'_z+R'_y & Q\\ Q'_z+R'_y & 2R'_z & R\\ Q & R & 0\end{vmatrix}. \tag{31}$$

Формула эта дает довольно удобный способ для вычисления средней кривизны поверхности, заданной уравнением в нерешенном виде:

$$P(x,\ y,\ z)=0.$$

Пример. Эллипсоид.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Здесь

$$P=\frac{2x}{a^2},\quad Q=\frac{2y}{b^2},\quad R=\frac{2z}{c^2}.$$

26. Можно показать, что два экстремальных направления взаимно-перпендикулярны. Для доказательства примем снова точку $(x, y, z,)$ за начало координат, а принадлежащую ей плоскость за плоскость XOY-ов. Тогда для этой точки $P=0$, $Q=0$ (1) сводится к $Rdz=0$, и так как можно принять, что $R\neq 0$ (оставляем в стороне случай $P=Q=R=0$), то $dz=0$ (так и должно быть, ибо прямая лежит в плоскости XOY).

Тогда уравнения, определяющие экстремальные направления, сводятся к

$$\begin{vmatrix} 2P'_x dx+(Q'_x+P'_y)dy & 0 & dx \\ (P'_y+Q'_x)dx+2Q'_y dy & 0 & dy \\ (P'_z+R'_x)dx+(Q'_z+R'_y)dy & R & 0 \end{vmatrix}=0$$

или

$$0=-R\begin{vmatrix} 2P'_x dx+(Q'_x+R'_y)dy & dx \\ (P'_y+Q'_x)dx+2Q'_y dy & dy \end{vmatrix}\equiv R\{(P'_y+Q'_x)(dy^2-dx^2)+ +2(P'_x-Q'_y)\}dxdy=0; \tag{33}$$

ясно, что

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1\times\left(\frac{dy}{dx}\right)_2=-1,$$

что и требовалось доказать.

В этом снова можно видеть аналогию со случаем поверхности. Теперь нетрудно показать, что эти экстремальные направления делят пополам угол между асимптотическими.

Действительно, уравнение последних для нашего выбора координатных осей примет вид:

$$dx\,dP+dy\,dQ=0,$$

или

$$P'_x dx^2+(P'_y+Q'_x)dx\,dy+Q'_y dy^2=0.$$

Примем теперь „главные направления" за оси координат OX. OY.

Уравнение (33) должно иметь корни 0 и ∞, а потому должно быть

$$P'_y+Q'_x=0.$$

Но тогда уравнение асимптотических линий сводится к

$$P'_x dx^2+Q'_y dy^2=0,$$

т. е. дает:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=\pm\sqrt{-\frac{P'_x}{P'_y}},$$

т. е. два направления симметричны относительно осей, которые, таким образом, делят углы между ними пополам.

27. *Теорема Эйлера.* Примем данную точку за начало, плоскость, принадлежащую этой точке по (1), т. е. (4), — за плоскость XOY, условное уравнение:

$$a^2+b^2=1 \text{ (при } P=0,\ Q=0,\ c=0)$$

дает

$$a=\cos\alpha,\ b=\sin\alpha$$

и, следовательно:

$$K=P'_x\cos^2\alpha+(P'_y+Q'_x)\cos\alpha\sin\alpha+Q'_y\sin^2\alpha.$$

Примем главные направления за оси; тогда $P'_y+Q_x=0$. Предыдущая формула (26) дает:

$$\frac{R^2}{\varrho}=P'_x\cos^2\alpha+Q'_y\sin^2\alpha.$$

Полагая здесь $\alpha=0$, получаем $\frac{R}{\varrho_1}=P'_x$, полагая $\alpha=\frac{\pi}{2}$: $\frac{R}{\varrho_2}=Q'_y$.

Таким образом,

$$\frac{1}{\varrho_\alpha}=\frac{1}{\varrho_1}\cos^2\alpha+\frac{1}{\varrho_2}\sin^2\alpha.$$

Для перпендикулярного направления $\alpha'=\alpha+\frac{\pi}{2}$; отсюда найдем:

$$\frac{1}{\varrho_{\alpha+\frac{\pi}{2}}}=\frac{1}{\varrho_1}\sin^2\alpha+\frac{1}{\varrho_2}\cos^2\alpha.$$

Откуда:

$$\frac{1}{\varrho_\alpha}+\frac{1}{\varrho_{\alpha+\frac{\pi}{2}}}=\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\text{Const}.$$

Теорема Эйлера имеет место в Р.-Е. системе.

§ 6. Индикатриса

28. Если формулу (25) применим к тому случаю, когда берем точку за начало, а соответствующую ей плоскость системы за плоскость XOY, то выражение радиуса кривизны упрощается:

$$\frac{1}{\varrho}=P'_x\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+(P'_y+Q'_x)\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{dy}{ds}\right)+Q'_y\left(\frac{dy}{ds}\right)^2.$$

Отложим на направлении $(dx,\ dy,\ 0)$ в плоскости XOY длину, равную $\sqrt{|\varrho|}$. Тогда $\xi=\frac{dx}{ds}\sqrt{|\varrho|}$, $\eta=\frac{dy}{ds}\sqrt{|\varrho|}$ будут координатами точки кривой:

$$P'_x\xi^2+(P'_y+Q'_x)\xi\eta+Q'_y\eta^2=\pm 1 \tag{A}$$

в плоскости XOY. Эта кривая дает возможность следить за изменением радиуса кривизны при изменении направления прямой, выходящей из начала. Тип кривой зависит от знака:

$$(P'_y+Q'_x)^2-4P'_xQ'_y.$$

Если

$$(P'_y+Q'_x)^2-4P'_xQ'_y<0,$$

кривая имеет асимптоты мнимые, т. е. будет эллипсом (точку в этом случае мы назвали эллиптической).

Если $(P'_y+Q'_x)^2-4P'_xQ>0$, асимптоты вещественны, кривая является гиперболой, точке в этом случае мы придали название гиперболической. Наконец, если $(P'_y+Q'_x)^2-4P'_xQ'_y=0$, имеет тип параболы, — кривая представляет пару параллельных прямых, — точке мы придали название параболической. Итак, тип точки и тип построенной кривой совпадает, и кривая по справедливости является индикатрисой.

Примечание. Идею такого получения индикатрисы для системы интегральных кривых (1) мне дало соответственное получение индикатрисы у Vessiot'a — Leçons de géomètrie supèrieure, 2-e éd. 1919, p. 37.

§ 7. Умбилики

29. Радиус кривизны будет по всем направлениям одинаков, если коэффициенты при dx^2, $dxdy$ и dy^2 в числителе и знаменателе выражения для $\frac{1}{\varrho}$ будет одинаков. Для такой точки кривизна одинакова по всем направлениям в плоскости системы, но может быть различна для различных точек пространства, обладающих этим свойством. Такие точки можно назвать умбиликами системы, и мы убеждаемся, что они образуют в пространстве линию, называемую умбиликальной линией. Ее уравнения мы получаем, подставляя в

$$dx\,dP+dy\,dQ+dz\,dR$$

по (1)

$$Pdx+Qdy+Qdz=0$$

$$dz=-\frac{Pdx+Qdy}{R}$$

и выражая, что коэффициенты при dx^2, $dxdy$ и dy^2 пропорциональны соответствующим коэффициентам в ds^2, которые при такой же подстановке принимают вид:

$$ds=\frac{(P^2+R^2)\,dx^2+2PQdxdy+(Q^2+R^2)dy^2}{R^2}.$$

Таким образом, имеем:

$$\frac{R(RP'_x-PP'_z)+P(PR'_z-RR'_x)}{R^2+P^2}=$$

$$=\frac{R\{(RP'_y-PR'_y)+(RQ'_x-QR'_x)\}+Q(PR'_z-RP'_z)+P(QR'_z-RQ'_z)}{2PQ}=$$

$$=\frac{R(RQ'_y-QR'_z)+Q(QR'_z-RR'_y)}{R^2+Q^2}.$$

Если подставим $R=1$, $P=-p$, $Q=-q$ (p, q зависят только от x и y), то получим отсюда обычные уравнения для умбилик:

$$\frac{-r}{1+p^2}=\frac{s}{2pq}=\frac{-t}{1+q^2}.$$

Пример. В качестве иллюстрации можно приложить этот метод к вычислению шаровых точек эллипсоида.

§ 8. Кривизна поверхностей

30. C. Neumann в статье Ueber correspondierende Flächenelemente (Math. Ann. XI. S. 306—8) дает интересные формулы.

Пусть соответствие между x, y, z и ξ, η, ζ устанавливается уравнениями (1):

$$\xi=\varphi(x, y, z),$$
$$\eta=\psi(x, y, z),$$
$$\zeta=\chi(x, y, z),$$

где φ, ψ, χ — данные функции их аргументов.

Тогда между соответственными элементами объемов существует соотношение:

$$\frac{d\tau}{dt}=\frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)}.$$

Аналогичное соотношение существует между поверхностными элементами:

$$\frac{d\sigma}{ds}=(-1)\begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y & \xi'_z & \alpha \\ \eta'_x & \eta'_y & \eta_z & \beta \\ \zeta'_x & \zeta'_y & \zeta_z & \gamma \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix},$$

где a, b, c и α, β, γ суть косинусы углов с осями нормалей к ds и $d\sigma$.

Доказательства этой формулы C. Neumann не приводит (*).

31. К. Нейманн указывает на применение этой формулы к вычислению Гауссовой кривизны (согласно Гауссовой theorema egregium), — при сферическом изображении, когда следовательно:

$$\xi=\frac{1}{X}f'_x,\quad \eta=\frac{1}{X}f'_y,\quad \zeta=\frac{1}{X}f'_z,$$

где

$$X=\sqrt{f'^2_x+f'^2_y+f'^2_z},$$

a, b, c и α, β, γ при этом равны те и другие соответственно ξ, η, ζ так что

$$K=\frac{d\sigma}{ds}=(-1)\begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y & \xi'_z & \xi \\ \eta'_x & \eta'_y & \eta'_z & \eta \\ \zeta'_x & \zeta'_y & \zeta'_z & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix}.$$

(*) Оно было дано в семинаре по геометрии участником его ст. Я. П. Бланком. Вот оно: рассмотрим на поверхности 1-ой точку с координатами x, y, z и бесконечно-близкие к ней на координатных линиях $v=\text{const}$ и $u=\text{const}$, точки:

$$(x+x'_u du,\ y+y'_u du,\ z+z'_u du)$$

и

$$(x+x'_v dv,\ y+y'_v dv,\ z+z'_v dv).$$

Удвоенная площадь $\triangle$-ка, ими образуемого (или площадь параллелограмма, на них построенного, имеет своими проекциями на плоскости координат:

$$\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} dudv,\quad \begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv,\quad \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv,$$

т. е.

$$\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}dudv,\quad \frac{D(x,\ z)}{D(u,\ v)}dudv,\quad \frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)}dudv,$$

а площадь самого параллелограмма

$$H_{dudv}=\sqrt{\left(\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right)^2+\left(\frac{D(x,\ z)}{D(u,\ v)}\right)^2+\left(\frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)}\right)^2}.dudv.$$

Таким образом, $ds=Hdudv$.

Если a, b, c косинусы углов нормали с осями OX, OY, OZ, то

$$aH=\frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)},\quad bH=\frac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)},\quad cH=\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}.$$

Так как для 2-ой поверхности $d\sigma=Hdudv$ и $\alpha H=\dfrac{D(\eta,\ \zeta)}{D(u,\ v)}$, $\beta H=\dfrac{D(\zeta,\ \xi)}{D(u,\ v)}$, $\gamma H=\dfrac{D(\xi,\ \eta)}{D(u,\ v)}$

Замечая, что в силу соотношения:

$$\begin{aligned}\xi&=f(u,v)=\varphi(x,\ y,\ z)\\ \eta&=g(u,v)=\psi(x,\ y,\ z)\\ \zeta&=h(u,v)=\chi(x,\ y,\ z),\end{aligned}$$

Если ввести предыдущие выражения, получим:

$$K=\frac{(-1)}{T^2}\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} & f'_x \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f''_{yz} & f'_y \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{z^2} & f'_z \\ f'_x & f'_y & f'_z & 0 \end{vmatrix},$$

если $T=P^2+Q^2+R^2$.

Если мы рассматриваем систему поверхностей (или одну), заданную уравнением (1)

$$Pdx+Qdy+Rdz=0,$$

то получаем:

$$K=\frac{(-1)}{(P^2+Q^2+R^2)^2}\begin{vmatrix} P'_x & P'_y & P'_z & P \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z & Q \\ R'_x & R'_y & R'_z & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix}.$$

где

$$x=F(u, v), \quad y=G(u, v), \quad z=H(u, v),$$

по свойству определителей Якоби, имеем:

$$\alpha H=\frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)}=\frac{D(\eta, \zeta)}{D(x, y)}\cdot\frac{D(x, y)}{D(u, v)}+\frac{D(\eta, \zeta)}{D(z, x)}\cdot\frac{D(z, x)}{D(u, v)}+\frac{D(\eta, \zeta)}{D(y, z)}\cdot\frac{D(y, z)}{D(u, v)}.$$

Точно также

$$\beta H=\frac{D(\zeta, \xi)}{D(u, v)}=\frac{D(\zeta. \xi)}{D(x, y)}\cdot\frac{D(x. y)}{D(u, v)}+\frac{D(\zeta, \xi)}{D(z, x)}\cdot\frac{D(z, x)}{D(u, v)}+\frac{D(\zeta, \xi)}{D(y, z)}\cdot\frac{D(y, z)}{D(u, v)},$$

$$\gamma H=\frac{D(\zeta, \eta)}{D(u, v)}=\frac{D(\zeta, \eta)}{D(x, y)}\cdot\frac{D(x, y)}{D(u, v)}+\frac{D(\zeta, \eta)}{D(z, x)}\cdot\frac{D(z, x)}{D(u, v)}+\frac{D(\zeta, \eta)}{D(y, z)}\cdot\frac{D(y, z)}{D(u, v)}$$

Вводя значения aH, bH, cH, имеем:

$$\alpha H=\frac{D(\eta. \zeta)}{D(x, y)}cH+\frac{D(\eta. \zeta)}{D(z, x)}bH+\frac{D(\eta, \zeta)}{D(y, z)}aH,$$

$$\beta H=\frac{D(\zeta. \xi)}{D(x, y)}cH+\frac{D(\zeta. \xi)}{D(z, x)}bH+\frac{D(\zeta, \xi)}{D(y, z)}aH,$$

$$\gamma H=\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}cH+\frac{D(\xi, \eta)}{D(z, x)}bH+\frac{D(\xi, \eta)}{D(y, z)}aH.$$

Умножая соответственно на α, β, γ и складывая, получим:

$$\frac{H}{H}=\alpha c\frac{D(\eta. \zeta)}{D(x, y)}+\alpha b\frac{D(\eta, \zeta)}{D(z, x)}+\alpha a\frac{D(\eta, \zeta)}{D(y, z)}+$$

$$+\beta c\frac{D(\zeta, \xi)}{D(x, y)}+\beta b\frac{D(\zeta, \xi)}{D(z, x)}+\beta a\frac{D(\zeta, \xi)}{D(y, z)}+$$

$$+\gamma c\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}+\gamma b\frac{D(\xi, \eta)}{D(z, x)}+\gamma a\frac{D(\xi. \eta)}{D(y, z)}\equiv$$

$$\equiv-\begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y & \xi'_z & \alpha \\ \eta'_x & \eta'_y & \eta'_z & \beta \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z & \gamma \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Насколько эта формула удобна для вычисления полной кривизны поверхности заданной уравнением в нерешенном виде, легко заметить на примере эллипсоида. Взяв от уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ (a) дифференциал, имеем: $\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}+\frac{zdz}{c^2}=0$ и для K получаем:

$$\frac{(-1)}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & \frac{x}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & \frac{y}{b^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & \frac{z}{c^2} \\ \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} & 0 \end{vmatrix}.$$

Умножая первый столбец на x, второй на y, третий на z и вычитая из четвертого, получаем с помощью (a):

$$\frac{(-1)}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & 0 \\ \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2 b^2 c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}.$$

32. Та формула, которую мы вывели выше, совпадает с только что приведенной, только в случае $P'_y=Q'_x$, $P'_z=R'_x$, $Q'_z=R'_y$, — в случае если левая часть (1) есть точный дифференциал.

Разумеется, непосредственное пользование формулой К. Неймана выведенной для отношения двух поверхностных элементов поверхностей данной и преобразованной, может возбудить сомнение. Можно, однако, убедиться в правильности ее применения.

Действительно, если в плоскости (4), принадлежащей точке (x, y, z), вообразим бесконечно-малый параллелограм, со сторонами ds, $d's$, то площадь его $ds=d's \sin(ds, d's)$.

Точке (x, y, z) соответствует точка $\xi=\frac{P}{\sqrt{T}}$, $\eta=\frac{Q}{\sqrt{T}}$, $\zeta=\frac{R}{\sqrt{T}}$, где

$$T=P^2+Q^2+R^2. \tag{a}$$

Формула Неймана говорит только о связи между бесконечно-малым поверхностным элементом принадлежащим точке x и соответствующим бесконечно малым элементом, принадлежащим точке преобразованной. Так как формула (а) именно такое соответствие устанавливает, то применить формулу мы имеем право.

Но у нас получается интересный результат. Произведение мер кривизны главных направлений и отношение элементов бесконечно-малых систем и ее сферического изображения не совпадают. Если за последним сохранить название Гауссовой кривизны, а за первым полной, то можно сказать в точке пространства полная и Гауссова кривизна. Р.-Е. системы вообще не совпадают и становятся равными только в случае, если (1) есть полный дифференциал:

$$1\text{-я} = -\frac{\Delta'}{4(P^2+Q^2+R^2)^2}, \quad (30')$$

$$2\text{-я} = \frac{(-1)\Delta}{(P^2+Q^2+R^2)^2}.$$

Соотношение

$$\Delta' = 4\Delta + G^2$$

показывает, что в случае интегрируемости эти выражения совпадают, ибо тогда $\Delta' = 4\Delta$.

§ 9. Линии кривизны

33. Линии кривизны в теории поверхностей получаются, исходя из двух определений, приводящих к одним и тем же результатам:

1) Кривые, лежащие на поверхности и имеющие своими касательными направления осей индикатрисы, или все равно, — направления касательных главных нормальных сечений.

2) Линии, в бесконечно-близких точках которых нормали к поверхности пересекаются.

Если перенесем эти определения на рассматриваемые системы интегральных кривых (1), то оказывается, что результаты не совпадают.

1) Линии кривизны как кривые, огибаемые направлениями экстремальных радиусов кривизны.

Уравнения предыдущего параграфа, по умножении на ds и замене $a = \frac{dx}{ds}$, $b = \frac{dy}{ds}$, $c = \frac{dz}{ds}$, принимают вид:

$$2P'_x dx + (P'_y + Q'_x) dx + (P'_z + R'_x) dz + \lambda P ds + \mu dx = 0,$$
$$(P'_y + Q'_x) dx + 2Q'_y dy + (Q'_z + R'_y) dz + \lambda Q ds + \mu dy = 0,$$
$$(P'_z + R'_x) dx + (Q'_z + R'_y) dy + 2R'_z dz + \lambda R ds + \mu dz = 0.$$

Эти уравнения совместны в отношении λds и μ, исключая которые, мы придем к соотношению между dx, dy, dz, которое вместе с (1) и определяет искомые линии:

$$\begin{vmatrix} 2P'_x dx + (Q'_x + P'_y) dy + (P'_z + R'_x) dz, & P & dx \\ (P'_y + Q'_x) dx + 2Q'_y dy + (Q'_z + R'_y) dz, & Q & dy \\ (P'_z + R'_x) dx + (Q'_z + R'_y) dy + 2R'_z dz, & R & dz \end{vmatrix} = 0. \quad (35)$$

Получили квадратное уравнение, которое, таким образом, определяет д в е системы кривых, — через каждую точку пространства проходят две таких кривых, которые соответствуют касательным в точке (x, y, z) к линиям, имеющим наибольший и наименьший радиус кривизны.

Как мы убедились выше, эти линии образуют о р т о г о н а л ь н у ю систему и являются биссектрисами углов между асимптотическими линиями. Эти свойства отвечают вполне соответствующим свойствам линий кривизны поверхности.

Заметим, что уравнение (35) может быть переписано:

$$\begin{vmatrix} 2dP+(Q'_x-P'_y)\,dy+(R'_y-P'_z)\,dz, & P, & dx \\ (Q'_x-P'_y)\,dx+2dQ+(R'_y-Q'_z)\,dz, & Q, & dy \\ (P'_z-R'_x)\,dx+(Q'_z-R'_y)\,dy+2dR, & R, & dz \end{vmatrix}=0. \qquad (36)$$

Разумеется, совместно с этим мы должны рассматривать (1).

Пример. Для эллипсоида имеем:

$$\begin{vmatrix} dx & \dfrac{x}{a^2} & 2\dfrac{dx}{a^2} \\ dy & \dfrac{y}{b^2} & 2\dfrac{dy}{b^2} \\ dz & \dfrac{z}{c^2} & 2\dfrac{dz}{c^2} \end{vmatrix}=0,$$

или по умножении на $\frac{1}{2}ab^2c^2$:

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ a^2dx & b^2dy & c^2dz \end{vmatrix}\equiv 0 \equiv xdydz\,(b^2-c^2)+ydzdx\,(xdydz\,(b^2-c^2)+ +ydzdx\,(c^2-a^2)+zdxdy\,(a^2-b^2)=0,$$

и совместно с $\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}+\frac{zdz}{c^2}=0.$

34. 2) Л и н и и, в д о л ь к о т о р ы х н о р м а л и к п л о с к о с т я м с и с т е м ы п е р е с е к а ю т с я.

Согласно этому определению должны пересекаться прямые;

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}=\frac{Z-z}{R},$$

$$\frac{X-x-dx}{P+dP}=\frac{Y-y-dy}{Q+dQ}=\frac{Z-z-dz}{R+dR},$$

Это условие по известной формуле заменяется:

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ P & Q & R \\ dP & dQ & dR \end{vmatrix}=0. \qquad (37)$$

Как видим, это уравнение отлично от предыдущего, которое с ним совпадает при условии:

$$Q'_x - P'_y = 0, \quad R'_x - P'_z = 0, \quad R'_y - Q'_z = 0,$$

т. е., когда (1) есть точный дифференциал. Но не только в этом случае должны кривые совпадать, но и тогда, когда выполнено только условие интегрируемости $G = 0$. В этом не трудно убедиться.

Действительно, разделив (36) на 2, разлагаем его на два определителя:

$$\begin{vmatrix} dP & P & dx \\ dQ & Q & dy \\ dR & R & dz \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (Q'_x - P'_y)\,dy + (R'_x - P'_z)\,dz, & P & dx \\ (P'_y - Q'_x)\,dx + (R'_y - Q'_z)\,dz, & Q & dy \\ (P'_z - R'_x)\,dx + (Q'_z - R'_y)\,dy, & R & dz \end{vmatrix} = 0.$$

Займемся последним определителем. Разлагая его по элементам второго столбца, получим:

$$P\{(R'_y - Q'_z)(dz^2 + dy^2) + dx\,[(P'_y - Q'_x)\,dz + (R'_x - P'_z)\,dy]\} +$$
$$+ Q\{(P'_z - R'_x)(dx^2 + dz^2) + dy\,[(Q'_z - R'_y)\,dx + (P'_y - Q'_x)\,dz]\} +$$
$$+ R\{(Q'_x - P'_y)(dy^2 + dx^2) + dz\,[(Q'_z - R'_y)\,dx + (R'_x - P'_z)\,dy]\} \equiv$$
$$\equiv Gds^2 + (Pdx + Qdy + Rdz)\,[(Q'_z - R'_y)\,dx + (R'_x - P'_z)\,dy +$$
$$(P'_y - Q'_x)\,dz] = 0,$$

(если в первых слагаемых каждой строки добавим и вычтем по члену $(R'_y - Q'_z)\,dx^2$, $(P'_z - R'_x)dx^2$ и $(Q'_x - P'_y)\,dz$ соответственно).

В силу (1), таким образом, разность двух определителей равна Gds^2 и уничтожается при $G = 0$.

Таким образом, доказано, что **две системы линий, отвечающие двум определениям линий кривизны, совпадают при $G = 0$, т. е. при выполнении условия интегрируемости.**

35. Можно убедиться, что **линии кривизны второго определения не будут ортогональны.**

Примем снова точку $M(x, y, z)$ за начало координат и соответствующую ей плоскость системы за плоскость XOY. Тогда уравнение (37) приводится для этой точки к виду:

$$\begin{vmatrix} dP & 0 & dx \\ dQ & 0 & dy \\ dR & R & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$R\,[Q'_x dx^2 + (Q'_y - P'_x)\,dxdy - P'_y dy^2] = 0,$$

корни уравнения имеют произведение, равное -1 только при $R\,(Q'_x - P'_y) = 0$ (и, следовательно, вообще не перпендикулярны). Так как при этом G сводится именно к $R(Q'_x - P'_y)$, то можно предвидеть, что линии будут взаимно перпендикулярны только при выполнении условия интегрируемости.

Но при общем положении M это требует несколько длинного счета. Для этого надо, расположив в (37) по степеням dx, dy, dz, исключить dz с помощью (1). Получим:

$$\frac{dx^2}{R^2} PQ\,[RP'_x - PP'_z] + \frac{dxdy}{R^2}[(R'_y Q^2)(RP'_x - PP'_z) + PQ\,(RP'_y - QP'_z)] + $$
$$+ \frac{dy^2}{R^2}[RP'_y - QP'_z](Q^2 + R^2) = 0.$$

Косинус угла двух направлений пропорционален:

$$dxd'x + dyd'y + dzd'z \equiv \frac{P^2 + R^2}{R^2} dxd'x + (dxd'y + dyd'x)\frac{PQ}{R^2} +$$
$$+ \frac{R^2 + Q^2}{R^2} dyd'y.$$

Если вместо $dxd'x$, $dyd'x$, $dxd'y$, $dyd'y$ ввести коэффициенты предыдущего уравнения, получим после довольно длинных переделок для равенства косинусов нулю:

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d'x}{d's}[P^2 + Q^2 + R^2]\, G = 0.$$

Исключая особенные точки ($P = Q = R = 0$), имеем, что для перпендикулярности двух линий кривизны второго определения должно быть $G = 0$, — но тогда эта система совпадает с первой.

Такой же точно счет для первой системы линий приводит к выражению:

$$P\left(\frac{1}{2}(Q'_z + R'_y)\right) - \frac{1}{2}(Q'_z + R'_z) + Q\left(\frac{1}{2}(P'_z + R'_x) - \frac{1}{2}(P'_z + R'_x)\right) +$$
$$+ R\left(\frac{1}{2}(P'_y + Q'_x) - \frac{1}{2}(Q'_x + P'_y)\right),$$

которое естественно равно нулю, — т. е. линии первой системы взаимно ортогональны, как мы убедились выше.

36. Совокупность прямых:

$$\frac{X - x}{P} = \frac{Y - y}{Q} = \frac{Z - z}{R}, \tag{3}$$

перпендикулярных в точке (x, y, z) к соответствующей плоскости (4), образуют конгруэнцию прямых. Из предыдущего видно, что линии кривизны второго определения дают начало фокальным поверхностям конгруэнций прямых (3), ибо нормали (3) в соседних точках этих кривых пересекаются.

Отсюда: совокупность прямых (3) можно рассматривать, как конгруэнцию нормалей некоторой поверхности, только при выполнении условия интегрируемости $G=0$. И обратно: если (3) представляют конгруэнцию нормалей, то соответствующие линии кривизны второго определения взаимно ортогональны и, следовательно, условие интегрируемости выполнено.

§ 10. Распространение понятия о геодезических линиях на неинтегрируемые системы кривых

37. Геодезические линии являются в дифференциальной геометрии как кривые поверхности, точки которых имеют выпрямляющую плоскость, совпадающую с касательной плоскостью поверхности. Это определение может быть сохранено и здесь: будем искать кривые, в каждой точке которых выпрямляющая плоскость совпадает с принадлежащею этой точке плоскостью системы.

Это значит, что в плоскости

$$P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0 \tag{4}$$

лежит не только касательная к кривой, определяемой направлением dx, dy, dz, — что и выражается уравнением (1):

$$Pdx+Qdy+Rdz=0,$$

но и бинормаль, косинусы углов которой с осями пропорциональны

$$y'z''-z'y'',\ z'x''-x'z'',\ x'y''-y'x'',$$

т. е. имеем:

$$P(y'z''-z'y'')+Q(z'x''-x'z'')+R(x'y''-y'x'')=0,$$

или

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0, \tag{40}$$

или, если (предполагая $R \neq 0$) умножить последний столбец на R и придать первый, умноженный на P, и второй, умноженный на Q:

$$\frac{1}{R}\begin{vmatrix} P & Q & P^2+Q^2+R^2 \\ dx & dy & 0 \\ d^2x & d^2y & Pd^2x+Qd^2y+Rd^2z \end{vmatrix}=0,$$

второй член в третьем столбце 0 вместо $Pdx+Qdy+Rdz$ — в силу (1).

Теперь

$$0=d(Pdx+Qdy+Rdz)\equiv Pd^2x+Qd^2y+Rd^2z+dxdP+$$
$$+dydQ+dzdR,$$

и таким образом имеем как уравнение „геодезических линий“ системы интегральных кривых (1):

$$\begin{vmatrix} P & Q & P^2+Q^2+R^2 \\ dx & dy & 0 \\ d^2x & d^2y & -(dxdP+dydQ+dzdR) \end{vmatrix} = 0.$$

Это выражение можно переписать (если разложить по элементам последнего столбца):

$$(dxdP+dydQ+dzdR)\,(Pdy-Qdx)=(P^2+Q^2+R^2)\,(dxd^2y-dyd^2x).$$

Раз выпрямляющая плоскость совпадает с плоскостью Р.-Е. системы, то можно сказать, что геодезическая кривизна этих линий равна нулю, если дать соответствующее определение геодезической кривизны. Эти линии можно, таким образом, считать прямейшими.

38. A. Voss в своих мемуарах Ueber Differentialgleichungen der Mechanik, Math. Ann. 25, 258—286 рассматривает движение в Р.-Е. системе, когда движение точки ограничено условием $\Sigma Pdx=0$, которое, по его мнению, имеет величайшее сходство с типическими примерами связанного движения в теоретической механике.

Если предположим движение при отсутствии внешних сил, то уравнение движения точки, двигающейся с произвольной начальной скоростью c, в системе имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\lambda P,\ \frac{d^2y}{dt^2}=\lambda Q,\ \frac{d^2z}{dt^2}=\lambda R.$$

Траектория описывается с постоянною скоростью c, нормаль Р.-Е. системы лежит постоянно в плоскости кривизны траекторий, которые представляют в то же время форму натянутой в системе, совершенно гибкой нерастяжимой нити. „Они, однако, не будут геодезическими линиями системы, ибо это положение не может быть, очевидно, достигнуто действительным натяжением нити, как на поверхности“ (l. c. 280). Выражение для радиуса кривизны, которое мы вывели раньше, принимает теперь, когда $ds=cdt$, такой вид:

$$\varrho=\frac{c^2\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{\frac{dP}{dt}x'+\frac{dQ}{dt}y'+\frac{dR}{dt}z'}=\frac{c^2}{\lambda\sqrt{P^2+Q^2+R^2}},$$

если вслед за A. Voss'ом положить:

$$\lambda=\frac{\frac{dP}{dt}x'+\frac{dQ}{dt}y'+\frac{dR}{dt}z'}{P^2+Q^2+R^2}.$$

В линейном комплексе $\Sigma x'\dfrac{dP}{dt}=0$, и, следовательно, $\lambda=0$, вообще же, если направление скорости совпадает с направлением асимптотической линии системы, когда $dxdP+dydQ+dzdR$ обращается в нуль, ϱ обращается в ∞, и мы имеем точку перегиба на траектории.

Далее, можно вычислить и кручение траектории, ибо числитель этого выражения

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \text{ теперь } = \lambda \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ P & Q & R \\ (\lambda P)' & (\lambda Q)' & (\lambda R)' \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ P & Q & R \\ P' & Q' & R' \end{vmatrix}$$

т. е.

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ P & Q & R \\ \frac{dP}{dt} & \frac{dQ}{dt} & \frac{dR}{dt} \end{vmatrix},$$

и потому радиус кручения определяется формулой

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\lambda}{c^2(P^2+Q^2+R^2)} \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ P & Q & R \\ \frac{dP}{dt} & \frac{dQ}{dt} & \frac{dR}{dt} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель, приравненный нулю, дает линии кривизны (второго определения) системы.

Это значит, что, если линия системы есть геодезическая линия (в первом смысле) и в то же время линия кривизны во втором смысле, то радиус кручения $=\infty$, т. е. это кривая плоская.

39. Второе определение: геодезические линии $\equiv$ $\equiv$ кратчайшие линии.

Уравнения геодезических линий, как задачу вариационного исчисления A. Voss дает под видом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = P\frac{d\lambda}{dt} + \lambda\,[z'(R'_x - P'_z) - y'(P'_y - Q'_x)]$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -Q\frac{d\lambda}{dt} + \lambda\,[-z'(Q'_z - R'_y) + x'(P'_y - Q'_x)]$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -R\frac{d\lambda}{dt} + \lambda\,[x'(P'_z - R'_x) + y'(Q'_z - R'_y)]$$

(l. c., стр. 282).

Не трудно воспроизвести этот вывод. Надо найти экстремум интеграла

$$\delta\int[1+p(x'^2+y'^2+z'^2)+\lambda(Px'+Qy'+Rz')]ds=0.$$

Эйлеровы уравнения будут:

$$\lambda(x'P'_x + y'Q'_y + z'R'_z) - \lambda' P - \lambda(P)' - 2\mu' x' - 2\mu x'' = 0$$

и еще два для y и z

$$\lambda(x'P'_y + y'Q'_y + z'R'_y) - \lambda' Q - \lambda(Q)' - 2\mu' y' - 2\mu y'' = 0$$

$$\lambda(x'P'_z + y'Q'_z + z'R'_z) - \lambda' R - \lambda(R) - 2\mu' z' - 2\mu z'' = 0.$$

умножая на x', y, z соответственно и суммируя, получим $-2\mu' = 0$, $2\mu = \text{const}$.

Итак, уравнения приняли вид при выборе $2\mu = +1$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda' P + \lambda[y'(Q'_x - P'_y) + z'(R'_x - P'_z)]$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\lambda' Q + \lambda[x'(P'_y - Q'_x) + z'(R'_y - Q'_z)]$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\lambda' R + \lambda[x'(P'_z - R'_x) + y'(Q'_z - R'_y)]$$

Если эти значения вторых производных подставим в уравнение (40), то мы получим (член с λ' уничтожается сразу, а λ выносим из под знака определителя):

$$\lambda \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x' & y' & z' \\ y'(Q'_x - P'_y) + z'(R'_x - P'_z), & x'(P'_y - Q'_x) + z'(R'_y - Q'_z, & x'(P'_z - R'_x) + y'(Q'_z - R'_y) \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2)G - \lambda(P'_x + Q'_y + R'_z)[x'(Q'_z - R'_y) + y'(R'_x - P'_z) +$$

$$+ z'(P'_y - Q'_x)] \equiv \lambda(x'^2 + y^2 + z'^2)]\, G,$$

[в силу (1)].

Мы приходим, таким образом, к заключению, что две системы геодезических кривых совпадают только при $G = 0$, т. е. в случае интегрируемости (оставляем в стороне минимальные линии).

В остальных случаях — это две различные системы.

(I) Это линии, которых геодезическая кривизна равна 0.

Это прямейшие линии.

(II) определяет наименьшее расстояние — это кратчайшие линии.

Мы приходим к тому различению двух этих систем линий для неголономных систем, на которое указывал Hertz в своей Механике (Werke B. III, 1894 (с. 100—106) и что довольно сложно обнаруживает R. Lilienthal в своем мемуаре Ueber kürzesten Integralkurven einer Pfaff'schen Gleichung. M. Ann. 52) и обнаружению различия которых для частного случая Möbius'овой Nullsystem делает H. Liebmann в своей статье Kürzeste u. geradeste Linien im Möbius'schen Nullsystem. Ib. S. 120—126 (весь том помечен 1899 г.).

Примечание. У. R. Lilienthal'я (L. c.) вместо P, Q, R стоят ξ, η, ζ, так что $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ $\left(\text{т. е. } \xi = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}} \text{ и т. д.}\right)$ Либман (l. c.)

пишет: Jedenfalls aus unserer Untersuchung geht hervor dass bei nicht integrablen Pfaff'schen Gleichungen sehr viel compliciertere Verhältnisse walten, als auf Flächen und dass es sich wohl der Mühe lohnen wird, in diesem Sinne weiter zu arbeiten and namentlich weitere einfache Beispiele zu discutieren.

Даваемый мною вывод, мне кажется, своею простотою заслуживает некоторого внимания, — в особенности обнаружение той и другой системы геодезических линий, а также расщепление свойств линий кривизны и самого понятия полной и Гауссовой кривизны.

P. S. Когда первоначально писалась эта статья, я еще не имел в руках статьи Rogers'a Some „Differential properties of the orthogonal trajectories of a congruence of curves Proceedings Irish Academy. Vol. XXIX. Sect. A. № 6", G. Darboux посвятил этой работе специальную статью „Sur différentes propriétés des trajectoires orthogonales d'une congruence des courbes. Bull. Sc. math. (2)36. 1912 p. 217-232, воспроизведенную потом в примечании в 20-м издании II-го тома его Théorie des surfaces. Мне кажется, однако, что несмотря на это, настоящая статья имеет значение, ближе подчеркивая аналогию и различие с теорией поверхностей. Кроме того, мною подчеркивается значение работ A. Voss'a, недостаточно, может быть, оцененных, и получены некоторые новые результаты. В этом отношении позволю себе указать на две заметки в печатающемся т. I в. 1. „Сообщений Харьковского Математического Общества", сер. 4, где дается новое доказательство теоремы Гаусса независимо от формул К. Неймана, и обобщается соотношение Enneper'a-Beltrami.

RESUMÉ

En reprenant les recherches de A. Voss sur les Punot-Ebenen système (M. Ann. 23) l'auteur les envisage comme l'étude de la coïncidence principale d'un connexe de l'espace ayant pour élément la combinaison (point, droite) de l'ordre m et de la classe 1. Dans l'article qui suit ce sont les propriétés des lignes intégrales de l'équation de Pfaff

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \tag{1}$$

qui sont envisagées particulièrement. L'auteur montre une analogie étroite qui existe avec la théorie des lignes tracées sur une surface. Pour plus d'analogie l'auteur au lieu d'une surface isolée $F(x, y, z) = 0$ prend une famille $F(x, y, z) = \text{Const}$ ou bien $0 = dF = F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz$.

Pour le système des courbes intégrales du (1) sont établies les courbes ou lignes asymptotiques et la classification des points de l'espace en points elliptiques, hyperboliques et paraboliques, courbes minimales (ou isotropes), directions conjuguées et la projectivité correspondante, dont le caractère conduit à la classification des points de l'espace, identique à celle mentionnée plus haut. Ce sont des directions principales ($\equiv$ des rayons de courbure extremale R_1, R_2) qui sont établies. Notion de courbure totale $\left(= \frac{1}{R_1 R_2}\right)$ et moyenne $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ du système, extension du théorème d'Euler. Introduction de la notion d'i n d i c a t r i c e, — analogue de celle de Dupin, ce qui ramène à la classification des points de l'espace. Les ombilics du système. A l'aide des formules de C. Neumann sur la transformation des surfaces et la courbure de Gauss (M. Ann. XI), dont la démonstration due à M-r Blank est donnée dans une note, l'auteur établit une nouvelle expression analogue à la courbure totale, mais qui en est identique seulement dans le cas d'intégrabilité.

Ici se rencontre pour la première fois certaine bifurcation des propriétés (Spaltung) qui coïncident dans le cas d'intégrabilité. Aussi on peut déterminer de deux manières les lignes de courbure de la surface, les lignes géodésiques. Les deux définitions nous mènent dans le cas considéré aux divers systèmes de courbes qui ne coïncident que dans le cas d'intégrabilité, et entre lesquels se distribuent les propriétés des systèmes de courbes d'une surface correspondantes.