И. ЧЕРНУШЕНКО

О взаимной непротиворечивости геометрических аксиом Гильберта

§ 1

В § 9 своей работы „Grundlagen der Geometrie" (*) Гильберт свел вопрос о взаимной непротиворечивости аксиом своей системы к вопросу об отсутствии противоречий в арифметике области всех вещественных чисел. При этом Гильберт указал собственно только план, не входя в подробности, и ограничился плоскостными аксиомами. Некоторые добавочные указания можно найти у Гильберта в §§ 12 и 29. Вельштейн в своей книге „Основания геометрии" (**) в § 12 дал построение пространственной геометрии в численном многообразии трех измерений, но его построение не совпадает с построением Гильберта.

В настоящей статье я имею в виду дать подробное построение пространственной геометрии по плану Гильберта, хотя, конечно, не мне судить, насколько это мне удалось.

Возьмем область всех вещественных чисел Ω. Назовем точкой тройку чисел (x, y, z) области Ω. Пусть четверка пропорциональных чисел $(u:v:w:r)$ той же области при условии, что u, v, w одновременно не нули, представляет плоскость. Пусть точка (x, y, z) лежит в плоскости $(u:v:w:r)$, если удовлетворяется условие $ux+vy+$ $+wz+r=0$.

Назовем прямою совокупность всех точек, лежащих в двух плоскостях $(A:B:C:D)$ и $(A':B':C':D')$, при условии, что не существуют одновременно равенства $A:A'=B:B'=C:C'$. Следовательно точка (x, y, z) лежит на прямой $(A:B:C:D,\ A':B':C':D')$, если одновременно выполняются условия: $Ax+By+Cz+D=0$ и $A'x+B'y+C'z+D'=0$.

Обозначим $Ax+By+Cz+D$ через $f(x, y, z)$ и $A'x+B'y+C'z+D'$ через $g(x, y, z)$. Если $f(x, y, z)=0$ (1) и $g(x, y, z)=0$ (2), то $\varphi(x, y, z)=$

(*) Д. Гильберт. Основания геометрии. Перевод с 5 немецкого издания. Книгоиздательство „Сеятель". Петроград, 1923.

(**) Вельштейн. Основания геометрии. Изд. Матезис, 2-е. Одесса, 1913.

$= kf(x, y, z) + lg(x, y, z) = 0$ (3), т. е. точка, лежащая в (1) и (2) плоскостях, лежит также и в (3), где k и l произвольные числа области Ω. Следовательно, через данную прямую проходит бесчисленное множество плоскостей.

Возьмем другие k_1 и l_1, так что $kl_1 - k_1 l \neq 0$, составим

$$\psi(x, y, z) = k_1 f(x, y, z) + l_1 g(x, y, z)$$

и покажем, что прямая (f, g) тождественна с прямой (φ, ψ).

Действительно из $kf + lg = 0$ и $k_1 f + l_1 g = 0$ следует, что одновременно $f(x, y, z) = 0$ и $g(x, y, z) = 0$, так как $kl_1 - k_1 l \neq 0$.

Таким образом, прямая определяется двумя любыми проходящими через нее плоскостями. Выбирая надлежащим образом множителей k и l, можно заменить плоскости $(A : B : C : D)$ и $(A' : B' : C' : D')$ любой парой из трех $(a : b : 0 : d)$, $(a' : 0 : c' : d')$ и $(0 : b'' : c'' : d'')$, причем из трех пар $a : b$, $a' : c'$ и $b'' : c''$, как легко видеть, ни одна не может обратиться в пару нулей. Поэтому, не нарушая общности, можно представлять прямую двумя из трех четверок пропорциональных чисел $(a : b : 0 : d,\ a' : 0 : c' : d',\ 0 : b'' : c'' : d'')$.

Теперь покажем, как в построенной системе вещей: точек, прямых и плоскостей выполняются аксиомы Гильберта.

§ 2

Аксиома I^1. „Две различные точки A и B всегда определяют прямую".

Пусть $A - (x_1, y_1, z_1)$, $B - (x_2, y_2, z_2)$. Для определения прямой имеем:

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + d &= 0 \\ ax_2 + by_2 + d &= 0 \end{aligned} \quad (1) \quad \text{и} \quad \begin{aligned} a'x_1 + c'z_1 + d' &= 0 \\ a'x_2 + c'z_2 + d' &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Из (1) и (2) мы всегда определим $(a : b : d)$ и $(a' : c' : d')$, кроме того случая, когда одновременно $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$ или $x_1 = x_2$ и $z_1 = z_2$. В последнем случае вместо (1) или (2) мы получим третью систему:

$$\begin{aligned} b''y_1 + c''z_1 + d'' &= 0 \\ b''y_2 + c''z_2 + d'' &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

из которой определим $(b'' : c'' : d'')$. Следовательно, I^1 удовлетворяется.

Аксиома I^2. „Любые две различные точки прямой определяют эту прямую".

Пусть точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3) лежат на прямой $[(a : b : 0 : d,\ a' : 0 : c' : d',\ 0 : b'' : c'' : d'')]$. Имеем по условию:

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + d &= 0 \\ ax_2 + by_2 + d &= 0 \\ ax_3 + by_3 + d &= 0 \end{aligned} \quad (4) \quad \begin{aligned} a'x_1 + c'z_1 + d' &= 0 \\ a'x_2 + c'z_2 + d' &= 0 \\ a'x_3 + c'z_3 + d' &= 0 \end{aligned} \quad (5) \quad \begin{aligned} b''y_1 + c''z_1 + d'' &= 0 \\ b''y_2 + c''z_2 + d'' &= 0 \\ b''y_3 + c''z_3 + d'' &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Для того, чтобы прямая определялась любыми двумя из трех точек, необходимо, чтобы отношения $a : b : d$, $a' : c' : d'$ и $b'' : c'' : d''$, определенные из любой пары уравнений (4), (5) и (6), удовлетворяли третьему, а это требует во всех трех случаях одновременного равенства нулю определителей

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, I^2 удовлетворяется.

Аксиома I^{3a}. „На прямой всегда существуют по меньшей мере две точки".

Аксиома удовлетворяется; так как, выбрав произвольно x, мы всегда найдем y и z по уравнениям $ax+by+d=0$ и $a'x+c'z+d'=0$.

Аксиома I^{3b}. „В каждой плоскости существуют всегда по меньшей мере три точки, не лежащие на одной прямой".

Если точка (x, y, z) лежит в плоскости $(u:v:w:r)$, то удовлетворяется уравнение

$$ux+vy+wz+r=0. \tag{7}$$

Взяв произвольно x_1, y_1, из уравнения (7) определяем z_1. Так же найдем x_2, y_2, z_2. Найденные точки определяют прямую $(a:b:0:d$ $a':0:c':d'$, $0:b'':c'':d'')$. Взяв теперь произвольно x_3, выбираем y_3 так чтобы не был равен нулю определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

и затем из уравнения (7) находим и z_3.

Аксиома I^4. „Три не лежащие на одной и той же прямой точки A, B, C всегда определяют плоскость α".

Пусть даны три точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3). Так как они по условию не лежат на одной прямой, то по крайней мере один из определителей

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

не равен нулю.

Обозначая плоскость α через $(u:v:w:r)$, имеем

$$\begin{aligned} ux_1+vy_1+wz_1+r&=0 \\ ux_2+vy_2+wz_2+r&=0 \\ ux_3+vy_3+wz_3+r&=0, \end{aligned}$$

откуда:

$$u:v:w:r = -\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

т. е. плоскость может быть найдена, следовательно, I^4 удовлетворяется.

Аксиома I^5. „Любые три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, определяют эту плоскость".

Пусть имеем плоскость $\alpha(u:v:w:r)$ и точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2\, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ и $D(x_4, y_4, z_4)$, лежащие на ней. Следовательно удовлетворяются уравнения:

$$\begin{aligned} ux_1 + vy_1 + wz_1 + r = 0 \\ ux_2 + vy_2 + wz_2 + r = 0 \\ ux_3 + vy_3 + wz_3 + r = 0 \\ ux_4 + vy_4 + wz_4 + r = 0. \end{aligned} \qquad (8)$$

Какие-либо три из этих уравнений определяют $(u:v:w:r)$. Для того, чтобы найденная таким образом четверка пропорциональных чисел удовлетворяла и четвертому уравнению, т. е. для совместности системы уравнений, необходимо во всех случаях равенство нулю одного и того же определителя

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

след., I^5 удовлетворяется.

Аксиома I^6. „Если две точки A, B прямой a лежат в плоскости α, то и всякая точка прямой a лежит в плоскости α".

Пусть прямая $AB(a:b:0:d,\ a':0:c':d',\ 0:b'':c'':d'')$ имеет с плоскостью $\alpha(u:v:w:r)$ две общие точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, точка $C(x_3, y_3, z_3)$ лежит на прямой AB, и требуется доказать, что C лежит в плоскости α.

Дано:

1) $ux_1 + vy_1 + wz_1 + r = 0$ 4) $ux_2 + vy_2 + wz_2 + r = 0$

2) $ax_1 + by_1 + d = 0$ 5) $ax_2 + by_2 + d = 0$

3) $a'x_1 + c'z_1 + d' = 0$ 6) $a'x_2 + c'z_2 + d' = 0$

7) $ax_3 + by_3 + d = 0$

8) $a'x_3 + c'z_3 + d' = 0$

и требуется доказать, что

9) $ux_3 + vy_3 + wz_3 + r = 0.$

Решая систему 1), 2) и 3) относительно x_1, y_1, z_1, найдем

$$x_1 = -\begin{vmatrix} r & v & w \\ d & b & 0 \\ d' & 0 & c' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u & v & w \\ a & b & 0 \\ a' & 0 & c' \end{vmatrix}, \quad y_1 = \begin{vmatrix} u & r & w \\ a & d & 0 \\ a' & d' & c' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u & v & w \\ a & b & 0 \\ a' & 0 & c' \end{vmatrix}$$

и

$$z_1 = -\begin{vmatrix} u & v & r \\ a & b & d \\ a' & 0 & d' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u & v & w \\ a & b & 0 \\ a' & 0 & c' \end{vmatrix}.$$

Так как для x_2, y_2, z_2 найдем из (4), (5) и (6) те же значения, то вследствие различия точек A и B все определители должны быть равны нулю. Но при этом условии

$$ux_3 + vy_3 + wz_3 + r = 0.$$

В самом деле, если допустим, что $ux_3 + vy_3 + wz_3 + r = k$ $(k \neq 0)$ то, обозначая $r - k$ через r', получим $ux_3 + vy_3 + wz_3 + r' = 0$. Определяя x_3, y_3, z_3 из последнего равенства вместе с (7) и (8), найдем

$$x_3 = -\begin{vmatrix} r' & v & w \\ d & b & 0 \\ d' & 0 & c' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u & v & w \\ a & b & 0 \\ a' & 0 & c' \end{vmatrix}.$$

Так как знаменатель по предыдущему равен нулю, то и числитель равен нулю, и из сравнения с предыдущим имеем $r' = r$, т. е. $k = 0$, что и т. д.

Аксиома Γ. „Если две плоскости α и β имеют общую точку A, то они имеют по меньшей мере еще одну точку B“.

Пусть плоскости $P(u:v:w:r)$ и $Q(u':v':w':r')$ имеют общую точку $A(x_1, y_1, z_1)$. Следовательно не существуют одновременно равенства $u:u' = v:v' = w:w'$, так как в противном случае система уравнений

$$\begin{aligned} ux + vy + wz + r &= 0 \\ u'x + v'y + w'z + r' &= 0 \end{aligned}$$

не имела бы конечных решений.

Пусть, например, $uv' - vu' \neq 0$. Определяя x и y через z, найдем

$$x = \frac{(vw' - v'w)z + vr' - v'r}{uv' - u'v}, \quad y = \frac{(u'w - uw')z + u'r - ur'}{uv' - u'v}.$$

Давши z значение z_2, отличное от z_1, найдем x_2 и y_2, что и т. д.

Аксиома I^8. „Существуют по меньшей мере 4 точки, не лежащие в одной плоскости“.

Взяв произвольно три точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3), мы определим проходящую через них плоскость $\alpha(u:v:w:r)$. Выбрав теперь x_4 и y_4, отличные от первых трех пар, определим z_4 так, чтобы $ux_4 + vy_4 + wz_4 + r = k$, где $k \neq 0$. Этим определена четвертая точка, не лежащая в плоскости α, что и т. д.

§ 3

Переходя к аксиомам порядка, заметим, что числа области Ω могут быть расположены в порядке своей величины. Пусть теперь (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3) точки прямой $(A:B:C:D,\ A':B':C':D')$. Мы скажем, что точка (x_2, y_2, z_2) лежит между двумя другими, если удовлетворено хотя бы одно из шести двойных неравенств (*)

$$x_1 < x_2 < x_3, \quad x_1 > x_2 > x_3 \tag{1}$$
$$y_1 < y_2 < y_3, \quad y_1 > y_2 > y_3 \tag{2}$$
$$z_1 < z_2 < z_3, \quad z_1 > z_2 > z_3 \tag{3}$$

В случае, если выполнено одно из двух двойных неравенств (1), легко показать, что или $y_1 = y_2 = y_3$, или выполняется одно из двойных неравенств (2), и также, что или $z_1 = z_2 = z_3$, или выполняется одно из неравенств (3). В самом деле, из уравнений

$$Ax_i + By_i + Cz_i + D = 0$$
$$A'x_i + B'y_i + C'z_i + D' = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

исключая z_i, образуем систему уравнений вида

$$ax_i + by_i + d = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{4}$$

При этом коэффициент b наверно не 0, так как в противном случае было бы $x_1 = x_2 = x_3$.

Пусть также $a \neq 0$. Из $x_1 \gtreqless x_2 \gtreqless x_3$ заключаем

$$ax_1 \gtreqless ax_2 \gtreqless ax_3,$$

и поэтому на основании (4)

$$by_1 + d \gtreqless by_2 + d \gtreqless by_3 + d.$$

Следовательно $by_1 \gtreqless by_2 \gtreqless by_3$, и так как $b \neq 0$, то

$$y_1 \gtreqless y_2 \gtreqless y_3,$$

причем в неравенствах всегда надо брать или сплошь верхние знаки или нижние. Если же в (4) $a = 0$, то очевидно $y_1 = y_2 = y_3$. Так же доказывается, что последовательность по величине иксов влечет за собой равенство или соответствующую последовательность зетов. Вообще, последовательность по величине одной из координат трех точек прямой влечет за собой соответствующую последовательность других координат или их равенство.

Из приведенных рассуждений непосредственно вытекает справедливость в нашей геометрии аксиомы II[1].

Аксиома II[1]. „Если A, B, C — точки одной прямой, и B лежит между A и C, то B лежит также между C и A".

(*) См. Гильберт. Основания геометрии § 29.

*Аксиома II*². „Если A и C точки одной прямой, то a) существует по меньшей мере одна точка B, лежащая между A и C и b) по меньшей мере одна точка D такая, что C лежит между A и D".

Если (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) — точки A и C прямой, то эти тройки различаются по крайней мере одним числом, например, $x_1 < x_2$. В таком случае мы всегда можем найти два числа x_3 и x_4 так, что $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$, а затем и соответствующие y и z, как в I^1 и I^{3a}, следовательно аксиома удовлетворяется.

*Аксиома II*³. „Из трех точек прямой всегда одна и только одна лежит между двумя другими".

В трех различных тройках чисел (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3) различны значения по крайней мере одной из координат. Пусть различны, например, иксы, и пусть существует двойное неравенство $x_1 < x_2 < x_3$; тогда невозможны двойные неравенства $x_2 \gtreqless x_1 \gtreqless x_3$ и $x_1 \gtreqless x_3 \gtreqless x_2$. След. II^3 удовлетворена.

§ 4

*Аксиома II*⁴. „Пусть A, B, C — три не лежащие на одной прямой очки и a прямая в плоскости ABC, не проходящая ни через одну из точек A, B, C; если при этом прямая a проходит через точку отрезка AB, то она непременно проходит или через точку отрезка AC или через точку отрезка BC".

В § 29, строя пространственную геометрию с помощью Дезарговой числовой системы, Гильберт указывает, как оправдывается не аксиома II^4, а теорема 6, которая в его литографированных лекциях и была принята за аксиому вместо II^4, и из которой II^4 легко выводится. Руководствуясь указанием § 29 и примером для плоской геометрии, данным в литографированных лекциях, мы и докажем справедливость теоремы 6, которая читается так:

„Каждая прямая a, лежащая в плоскости α, разделяет не лежащие на ней точки этой плоскости на две области, имеющие следующее свойство: каждая точка A одной области определяет вместе с каждой точкой B другой области отрезок AB, внутри которого лежит одна точка прямой a, напротив две любые точки A и A' одной и той же области определяют отрезок AA', внутри которого не лежит ни одной точки прямой a".

Пусть дана плоскость $\alpha(u:v:w:r)$ и в ней прямая $a(u:v:w:r, u':v':w':r')$. Мы скажем, что те точки (x, y, z) плоскости α, для которых $u'x + v'y + w'z + r' < 0$, лежат по одну сторону прямой a, а для которых $u'x + v'y + w'z + r' > 0$, по другую. Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ две точки плоскости α, лежащие по разные стороны a, так что

$$u'x_1 + v'y_1 + w'z_1 + r' \lesseqgtr 0 \tag{1}$$

и

$$u'x_2 + v'y_2 + w'z_2 + r' \gtreqless 0. \tag{2}$$

Докажем, что прямая AB пересекается с прямой a. Обозначим прямую AB через

$$(u'' : v'' : w'' : r'',\quad u : v : w : r). \tag{3}$$

Для отыскания общей точки прямых AB и a нужно решить систему уравнений

$$\begin{aligned} ux + vy + wz + r &= 0 \\ u'x + v'y + w'z + r' &= 0 \\ u''x + v''y + w''z + r'' &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Покажем, что определитель этой системы D не равен нулю.

$$D = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} = u'(wv'' - vw'') + v'(uw'' - wu'') + w'(vu'' - uv''). \tag{5}$$

Прямая $AB(u'' : v'' : w'' : r'',\ u : v : w : r)$, как известно, может быть представлена в виде:

$$[(uw'' - wu'') : (vw'' - wv'') : 0 : (rw'' - wr''),\quad uv'' - vu'') : 0 : (wv'' - vw'') : (rv'' - vr'')]. \tag{6}$$

Так как точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) лежат на AB, то

$$\left.\begin{aligned} (uw'' - wu'')x_1 + (vw'' - wv'')y_1 + (rw'' - wr'') = 0 \\ (uw'' - wu'')x_2 + (vw'' - w''v)y_2 + (rw'' - wr'') = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} (uv'' - vu'')x_1 + (wv'' - vw'')z_1 + (rv'' - vr'') = 0 \\ (uv'' - vu'')x_2 + (wv'' - vw'')z_2 + (rv'' - vr'') = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Из (7) и (8) имеем

$$\frac{wv'' - vw''}{x_1 - x_2} = \frac{uw'' - wu''}{y_1 - y_2} = \frac{vu'' - uv''}{z_1 - z_2} = k. \tag{9}$$

Подставляя значения числителей из (9) в разложение определителя (5), получим

$$D = k[u'(x_1 - x_2) + v'(y_1 - y_2) + w'(z_1 - z_2)] = \\ = k[u'x_1 + v'y_1 + w'z_1 + r' - (u'x_2 + v'y_2 + w'z_2 + r')] \neq 0,$$

так как разность, стоящая в квадратных скобках, вследствие (1) и (2) не равна нулю.

Так как $D \neq 0$, то существует точка пересечения прямых a и AB, которую обозначим $C(x_3, y_3, z_3)$.

Остается доказать, что C лежит между A и B.

Прямая a подобно AB может быть представлена в виде:

$$[(uw' - wu') : (vw' - wv') : 0 : (rw' - wr'),\ (uv' - vu') : 0 : (wv' - vw') : (rv' - vr')] \tag{10}$$

При этом из (1) и (2) следует:

$$(uw' - wu')\,x_1 + (vw' - wv')\,y_1 + rw' - wr' \gtreqless 0 \tag{11}$$

$$(uw' - wu')\,x_2 + (vw' - wv')\,y_2 + rw' - wr' \lesseqgtr 0, \tag{12}$$

где верхние знаки соответствуют верхним же (1) и (2) и нижнее нижним.

Теперь, принимая во внимание, что из точек A, B и C только C лежит на прямой a, но все три лежат на AB, получим [(uw') в дальнейшем обозначает $uw' - wu'$],

$$\begin{aligned}(uw')\,x_1 + (vw')\,y_1 + (rw') \gtreqless 0 = (uw')\,x_3 + (vw')\,y_3 + (rw') =\\ = 0 \gtreqless (uw')\,x_2 + (vw')\,y_2 + (rw'),\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}(uw'')\,x_1 + (vw'')\,y_1 + (rw'') = 0 = (uw'')\,x_3 + (vw'')\,y_3 + (rw'') =\\ = 0 = (uw'')\,x_2 + (uw'')\,y_2 + rw'').\end{aligned} \tag{14}$$

Умножая (13) и (14) соответственно на (vw'') и (vw') и вычитая, получим:

$$\begin{aligned}&[(uw')(vw'') - (uw'')(vw')]\,x_1 + [(rw')(vw'') - (rw'')(vw')] \gtreqless\\ &\gtreqless [(uw')(vw'') - (uw'')(vw')]\,x_3 + [(rw')(vw'') - (rw'')(vw')] \gtreqless\\ &\gtreqless [(uw')(vw'') - (uw'')(vw')]\,x_2 + [(rw')(vw'') - (rw'')(vw')],\end{aligned}$$

откуда

$$x_1 \gtreqless x_3 \gtreqless x_2.$$

Так как существует $(x_3,\ y_3,\ z_3)$ точка пересечения прямых a и AB, то из средних частей (13) и (14) заключаем, что $(uw')(vw'') - (uw'')(vw') \neq 0$, и следовательно сокращение двойного неравенства на этого множителя возможно. Таким образом доказано, что точка C лежит между A и B.

Точно так же можно доказать и вторую часть теоремы 6.

Пусть теперь $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ точка A и $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ точка A', при чем

$$u'x_1 + v'y_1 + w'z_1 + r' \gtreqless 0 \quad \text{и} \quad u'x_2 + v'y_2 + w'z_2 + r' \gtreqless 0.$$

Из рассуждений, сходных с предыдущими, обнаруживается, что определитель D не должен быть непременно равен нулю. Если D по прежнему не равен нулю, то, повторяя предыдущие рассуждения, мы найдем, что

$$x_3 \gtreqless x_1 \quad \text{и} \quad x_3 \gtreqless x_2,$$

т. е. точка $C\,(x_3,\ y_3,\ z_3)$ лежит вне отрезка AA', что и т. д.

Пусть $D = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} = 0.$$

Умножая первый столбец на x_1 и прикладывая к нему второй, умноженный на y_1, и третий, умноженный на z_1, получим

$$\begin{vmatrix} ux_1+vy_1+wz_1 & v & w \\ u'x_1+v'y_1+w'z_1 & v' & w' \\ u''x_1+v''y_1+w''z_1 & v'' & w'' \end{vmatrix}=0.$$

Так как точка (x_1, y_1, z_1) лежит на прямой $(u:v:w:r,\ u'':v'':w'':r'')$, то первый и третий элементы первого столбца могут быть заменены соответственно $-r$ и $-r''$. Что касается второго элемента, то по условию $u'x_1+v'y_1+w'z_1+r'\gtrless 0$. В таком случае можно положить, что $u'x_1+v'y_1+w'z_1+r'=k$, где $k\neq 0$, след. $u'x_1+v'y_1+w'z_1=-r'+k$. Поэтому

$$D_1=\begin{vmatrix} -r & v & w \\ -r'+k & v' & w' \\ -r'' & v'' & w'' \end{vmatrix}=0. \qquad (15)$$

Точно так же получим:

$$D_2=\begin{vmatrix} u & -r & w \\ u' & -r'+k & w' \\ u'' & -r'' & w'' \end{vmatrix}=0 \quad (16) \quad \text{и} \quad D_3=\begin{vmatrix} u & v & -r \\ u' & v' & -r'+k \\ u'' & v'' & -r'' \end{vmatrix}=0. \quad (17)$$

Решая систему (4), мы получим для общей точки прямых a и AA' следующие выражения:

$$x=D_1':D,\ y=D_2':D \text{ и } z=D_3':D,$$

где

$$D_1'=\begin{vmatrix} -r & v & w \\ -r' & v' & w' \\ -r'' & v'' & w'' \end{vmatrix} \ (18), \qquad D_2'=\begin{vmatrix} u & -r & w \\ u' & -r' & w' \\ u'' & -r'' & w'' \end{vmatrix} \qquad (19)$$

$$\text{и} \quad D_3'=\begin{vmatrix} u & v & -r \\ u' & v' & -r' \\ u'' & v'' & -r'' \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Из трех определителей D_1', D_2' и D_3' по крайней мере два не равны нулю. В самом деле, если допустим, что, например D_1' и $D_2'=0$, то, раскладывая D_1 и D_1' по элементам первого столбца, получим:

$$-r(v'w''-w'v'')+(-r'+k)(wv''-vw'')-r''(vw'-wv')=0$$

и

$$-r(v'w''-w'v'')-r'(wv''-vw'')-r''(vw'-wv')=0. \qquad (21)$$

Одновременное существование равенств (21) возможно только при двух условиях: или 1) $k=0$ или 2) $wv''-vw''=0$ и сумма первого и третьего члена равна нулю. Но по условию $k\neq 0$, следовательно,

$$wv''-vw''=0. \qquad (22)$$

Сравнивая D_2 и D_2', так же найдем

$$uw'' - wu'' = 0. \tag{23}$$

Из (22) и (23) получим $u : u'' = v : v'' = w : w''$, что противоречит определению прямой. Следовательно, из определителей D_1', D_2' и D_3' два по крайней мере не равны нулю, а в таком случае система (4) дает бесконечные решения. Следовательно, AA' совсем не пересекается с прямой a, чем теорема 6 доказана вполне.

§ 5.

Остается показать, как аксиома II[4] выводится из теоремы 6. В литографированных лекциях Гильберт дает следующее доказательство.

Доказательство. По предположению A и B лежат по разные стороны прямой a. Допустим, что AC не пересечет a, тогда A и C лежат по одну сторону a, так что B и C лежат по разные стороны a, т. е. BC пересечет a. Если допустим далее, что отрезки AC и BC оба пересечены прямой a, то A и B должны были бы лежать по одну сторону a, что невозможно, так как по условию AB пересечен прямой a. Также невозможно предположение, что ни AC, ни BC не пересечены прямой a.

Можно, впрочем, и непосредственно показать, что аксиома II[4] удовлетворяется.

Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $C(x_3, y_3, z_3)$ три точки, не лежащие на одной прямой, $\alpha(u : v : w : r)$ проходящая через них плоскость, KL $(u : v : w : r,\ u' : u' : w' : r')$ прямая в плоскости α, не проходящая ни через одну из точек A, B, C и пересекающая $AB\,(u : v : w : r,\ u'' : v'' : w'' : r'')$ в точке $K(\xi, \eta, \zeta)$ между A и B, т. е.

$$\begin{array}{ll}
ux_1 + vy_1 + wz_1 + r = 0 & \qquad u'x_1 + v'y_1 + w'z_1 + r' \lesseqgtr 0 \\
ux_2 + vy_2 + wz_2 + r = 0 \qquad (1) & \qquad u'x_2 + v'y_2 + w'z_2 + r' \lesseqgtr 0 \qquad (2) \\
ux_3 + vy_3 + wz_3 + r = 0 & \qquad u'x_3 + v'y_3 + w'z_3 + r' \lesseqgtr 0 \\
u\xi + v\eta + w\zeta + r = 0 & \qquad u'\xi + v'\eta + w'\zeta + r' = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
x_1 \lesseqgtr \xi \lesseqgtr x_2 \\
y_1 \lesseqgtr \eta \lesseqgtr y_2\,, \\
z_1 \lesseqgtr \zeta \lesseqgtr z_2
\end{array} \tag{3}$$

при чем в (3) достаточно предположить существование одного какого либо из двойных неравенств: мы будем предполагать первое. Что касается неравенств (2), то можно доказать, что знаки первого и второго из них должны быть противоположны, как и поставлено.

В самом деле прямая KL может быть представлена в виде.

$$[(uw') : (vw') : 0 : (rw'),\ (uv') : 0 : (wv') : (rv'),\ 0 : (vu') : (wu') : (ru')]$$

и прямая AB в виде

$$[(uw''):(vw''):0:(rw''),\ (uv''):0:(wv''):(rv''),\ 0:(vu''):(wu''):(ru'')],$$

где $(uw')=uw'-wu'$ и т. д.

Умножая все части двойного неравенства $x_1 \lesseqgtr \xi_1 \lesseqgtr x_2$ на $(uw')(vw'')-(uw'')(vw')$ и прибавляя по $(rw')(vw'')-(rw'')(vw')$, получим

$$\begin{aligned}&[(uw')(vw'')-(uw'')(vw')]\,x_1+(rw')(vw'')-(rw'')(vw')\lesseqgtr\\ \lesseqgtr\ &[(uw')(vw'')-(uw'')(vw')]\,\xi\ +(rw')(vw'')-(rw'')(vw')\lesseqgtr\\ \lesseqgtr\ &[(uw')(vw'')-(uw'')(vw')]\,x_2+(rw')(vw'')-(rw'')(vw').\end{aligned}\tag{4}$$

По условию KL и AB пересекаются в точке K, т. е,

$$\begin{aligned}(uw')\,\xi+(vw')\,\eta+(rw')&=0\\ (uw'')\,\xi+(vw'')\,\eta+(rw'')&=0,\end{aligned}\tag{5}$$

следовательно, множитель при x_1 в (4) не равен нулю.

Так как точки A, K, B лежат на AB, то имеем

$$\begin{aligned}(uw'')\,x_1+(vw'')\,y_1+(rw'')&=(uw'')\,\xi+(vw'')\,\eta+(rw'')=\\ &=(uw'')\,x_2+(vw'')\,y_2+(rw'')=0.\end{aligned}\tag{6}$$

Умножая (6) на (vw') и прибавляя к (4), получим

$$\begin{aligned}&(uw')(vw'')\,x_1+(vw')(vw'')\,y_1+(rw')(vw'')\lesseqgtr\\ \lesseqgtr\ &(uw')(vw'')\,\xi+(vw')(vw'')\,\eta+(rw')(vw'')\lesseqgtr\\ \lesseqgtr\ &(uw')(vw'')\,x_2+(vw')(vw'')\,y_2+(rw')(vw'').\end{aligned}\tag{7}$$

$(vw'')\neq 0$, так как в противном случае в (7) были бы знаки равенства, и идя обратно, мы получили бы $x_1=\xi=x_2$, что противоречит условию.

Сокращая (7) на (vw''), получим

$$\begin{aligned}(uw')\,x_1+(vw')\,y_1+(rw')&\lesseqgtr(uw')\xi+(vw')\,\eta+(rw')\lesseqgtr\\ &\lesseqgtr(uw')\,x_2+(vw')\,y_2+(rw').\end{aligned}\tag{8}$$

Умножая первую, четвертую и вторую строки (1) на w' и соответственно вычитая из них части неравенсва (8), найдем

$$\begin{aligned}wu'x_1+wv'y_1+ww'z_1+wr'&\gtreqless wu'\xi+wv'\eta+ww'\zeta+wr'\gtreqless\\ &\gtreqless wu'x_2+wv'y_2+ww'z_2+wr'.\end{aligned}\tag{9}$$

Сокращая на w, которое не равно нулю по той же причине, как выше (vw''), имеем

$$u'x_1+v'y_1+w'z_1+r'\gtreqless u'\xi+v'\eta+w'\zeta+r'\gtreqless u'x_2+v'y_2+w'z_2+r'.\tag{10}$$

Так как в (10) средняя часть по (2) равна нулю, то этим и доказана противоположность знаков в первой и второй строчках (2).

Можно было бы получить тот же результат доказательством от противного, применяя к предположенным неравенствам рассуждения § 4.

Что касается третьей строчки (2), то знаки в ней могут быть одинаковы или со знаками первой или второй. Если знаки в ней одинаковы со знаками первой, как поставлено, то применяя рассуждения § 4, видим, что точки A и C лежат по одну сторону KL, а B и C по разные, и следовательно KL проходит через точку отрезка BC и не проходит через точку отрезка AC, что и т. д.

§ 6.

Введем следующие преобразования точек одних в другие. Назовем параллельным перенесением преобразование

$$x' = x + k,\ y' = y + l,\ z' = z + m. \tag{1}$$

Обозначим далее точку $(0, 0, 0)$ буквой O (черт. 1), произвольную точку (a, b, c) буквой M, точку $(a, b, 0)$ буквой A и точку $(a, 0, c)$ буквой B. Тогда вращение около оси z-ов на угол AOX переводит произвольную точку (x, y, z) в точку (x', y', z') по формулам

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y,$$

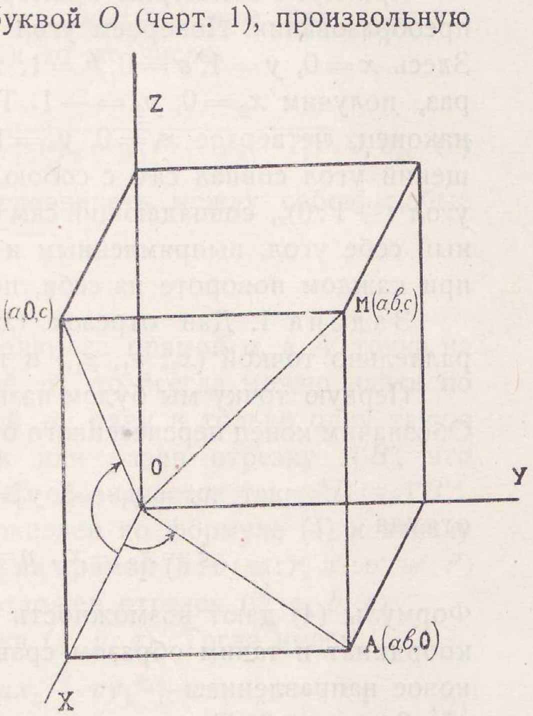
$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y,\ z' = z, \tag{2}$$

а вращение около оси y-ов на угол BOX переводит точку (x, y, z) в точку (x', y', z') по формулам

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}x - \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}z,$$

$$y' = y,$$

$$z' = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}x + \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}z. \tag{3}$$



Черт. 1

Из формул (1), (2), и (3) легко получить выражения для x, y, z через x', y', z', причем получаются формулы того же типа, следовательно, каждое преобразование (1), (2) и (3) имеет обратное себе преобразование.

Гильберт называет отрезком систему двух точек A и B, а все точки прямой AB, лежащие между A и B, точками отрезка. В дальнейшем для сокращения я буду обозначать точку $(0, 0, 0)$ в отрезках одним нулем. Формулы (1) дают параллельное перенесение отрезка $(0;\ x, y, z)$ в положение $(k, l, m;\ x', y', z')$ или вследствие переместительного закона сложения параллельное перенесение отрезка $(0;\ k, l, m)$ в положение $(x, y, z;\ x', y', z')$. Формулы (2) дают вращение отрезка $(0;\ x, y, z)$ около оси z-ов на угол, образуемый отрезком $(0;\ a, b, 0)$ с осью x-ов. Формулы (3) дают вращение того же отрезка $(0;\ x, y, z)$ около оси y-ов на угол, делаемый отрезком $(0;\ a, 0, c)$ с осью x-ов.

Обозначим угол отрезка $(0;\ a,\ b,\ 0)$ с осью x-ов через $(a:b)_z$, а угол отрезка $(0;\ a,\ 0,\ c)$ с осью x-ов через $(a:c)_y$. Так как в формулы поворота (2) и (3) входят, собственно говоря, отношения $a:b$ и $a:c$, то точки $(a,\ b,\ 0)$ и $(a,\ 0,\ c)$ могут быть заменены точками $(na,\ nb,\ 0)$ и $(n'a,\ 0,\ n'c)$, где n и $n' \neq 0$. Ясно, что первые точки лежат на прямой $(b:-a\,;0:0,\ 0:0:1:0)$, а вторые на прямой $(c:0:-a:0,\ 0:1:0:0)$. Следовательно, для определения угла отрезка с осью x-ов можно взять любую точку отрезка.

Назовем конгруэнтными или равными отрезки и углы, получающиеся одни из других помощью формул преобразования (1), (2) и (3).

Пример. Рассмотрим пример, поясняющий пользование формулами преобразования. Повернем угол $(0:1)_z$ на угол, равный ему самому. Здесь $x=0$, $y=1$, $a=0$, $b=1$, тогда $x_1=1$, $y_1=0$. Повернем другой раз, получим $x_2=0$, $y_2=-1$. Третье вращение дает $x_3=1$, $y_3=0$ и, наконец, четвертое $x_4=0$, $y_4=1$. Следовательно, после четырех вращений угол совпал сам с собою. Угол $(0:1)_z$ мы называем прямым, угол $(-1:0)_z$, совпадающий сам с собою после двух вращений на равный себе угол, выпрямленным и угол $(1:0)_z$, совпадающий сам с собою при каждом повороте на себя, полным.

Задача 1. Дан отрезок $(x_1,\ y_1,\ z_1;\ x_2,\ y_2,\ z_3)$; перенести его параллельно точкой $(x_1,\ y_1,\ z_1,)$ в точку $(0,\ 0,\ 0)$—начало координат.

Первую точку мы будем называть началом отрезка, вторую концом. Обозначим конец перенесенного отрезка $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, тогда формулы (1) дают:

$$x_2 = x_1 + \xi,\ y_2 = y_1 + \eta,\ z_2 = z_1 + \xi,$$

откуда

$$\xi = x_2 - x_1,\ \eta = y_2 - y_1,\ \zeta = z_2 - z_1. \tag{4}$$

Формулы (4) дают возможность перенести каждый отрезок в начало координат и таким образом сравнивать все отрезки, имеющие одинаковое направление.

Задача 2. Повернуть отрезок $(0;\ a,\ b,\ c)$ на ось x-ов.

Это значит найти отрезок $(0;\ \xi,\ 0,\ 0)$, который после преобразования по формулам (2) и (3) перейдет в данный. Найдем сначала отрезок $(0;\ x_1,\ 0,\ c)$, обращающийся в $(0;\ a,\ b,\ c)$ поворотом на угол $(a:b)_z$. По формулам (2) имеем:

$$a = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x_1;\quad b = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x_1,$$

откуда

$$x_1 = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Теперь отыщем отрезок $(0;\ \xi,\ 0,\ 0)$, обращающийся в $(0;\sqrt{a^2+b^2},\ 0,\ c)$ поворотом на угол $(\sqrt{a^2+b^2}:c)$. По формулам (3) получим:

$$\sqrt{a^2+b^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,\xi;\quad c = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,\xi,$$

откуда
$$\xi = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \tag{5}$$

Последний результат позволяет поворачивать каждый отрезок $(0;\ a,\ b,\ c)$ до совпадения с осью x-ов и тем сравнивать между собою отрезки, имеющие начало в начале координат.

Поворачивая отрезок $(0;\ a,\ 0,\ 0)$ на прямой угол $(0:1)_z$ и на $(0:1)_y$, мы получим:
$$(0;\ a,\ 0,\ 0) \equiv (0;\ 0,\ a,\ 0) \equiv (0;\ 0,\ 0,\ a) \tag{6}$$
что в связи с (5) показывает, что, приведя любой отрезок к началу координат и повернув его на любую ось, мы получим для соответствующей этой оси координаты одно и то же число.

Соединяя (4) и (5) получим:
$$(x_1,\ y_1,\ z_1;\ x_2,\ y_2,\ z_2) \equiv (0;\ \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},\ 0,\ 0). \tag{7}$$

Последняя формула позволяет сравнивать между собою любые отрезки.

§ 7

Аксиома III[1a]. „Если A и B две точки на прямой a, а A' точка на той же прямой или на другой прямой a', то всегда можно найти по данную от точки A' сторону прямой a' одну и только одну такую точку B', что отрезок AB конгруэнтен или равен отрезку $A'B'$; это отношение между отрезками AB и $A'B'$ обозначается так: $AB \equiv A'B'$“. Так как любой отрезок может быть приведен по формуле (4) к началу координат, то достаточно показать, как на прямой $(u:v:w:r,\ u':v':w':r')$ от ее точки $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ может быть отложен отрезок $(0;\ a,\ b,\ c)$.

Обозначим конец искомого отрезка $(x,\ y,\ z)$. Тогда имеем:
$$\left.\begin{aligned} ux + vy + wz + r = 0 \\ u'x + v'y + w'z + r = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1) \qquad \left.\begin{aligned} ux_1 + vy_1 + wz_1 + r = 0 \\ u'x_1 + v'y_1 + w'z_1 + r = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$
и по (7) § 6
$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \tag{3}$$

Из (1) и (2) имеем:
$$\left.\begin{aligned} u(x - x_1) + v(y - y_1) + w(z - z_1) = 0 \\ u'(x - x_1) + v'(y - y_1) + w'(z - z_1) = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Из (4) получаем:
$$\frac{x - x_1}{vw' - wv'} = \frac{y - y_1}{wu' - uw'} = \frac{z - z_1}{uv' - vu'} = t, \tag{5}$$
откуда
$$x - x_1 = (vw' - wv')t,\ y - y_1 = (wu' - uw')t,\ z - z_1 = (uv' - vu')t. \tag{6}$$

Подставляя из (6) в (3), найдем:

$$t = \pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{(uv' - vu')^2 + (vw' - wv')^2 + (wu' - uw')^2}} \tag{7}$$

и окончательно, полагая $\sqrt{(uv'-vu')^2 + (vw'-wv')^2 + (wu'-uw')^2} = \delta$,

$$\begin{aligned} x &= x_1 \pm \frac{1}{\delta}(vw' - wv')\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \\ y &= y_1 \pm \frac{1}{\delta}(wu' - uw')\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \\ z &= z_1 \pm \frac{1}{\delta}(uv' - vu')\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Двойной знак, одновременно верхний или нижний, соответствует двум сторонам прямой от точки (x_1, y_1, z_1).

Следовательно, аксиома III[1a] выполняется.

Аксиома III[1b]. „Каждый отрезок конгруэнтен самому себе, т. е. всегда $AB \equiv AB$ и $AB \equiv BA$“.

Что $(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) \equiv (x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2)$, следует из того, что, повернув отрезок на угол $(1:0)_z$, мы получим тот же самый отрезок.

Что $(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) \equiv (x_2, y_2, z_2; x_1, y_1, z_1)$, следует из формулы (7) § 6.

Следовательно аксиома III[1b] выполняется.

Аксиома III[2]. „Если отрезок AB конгруэнтен как отрезку $A'B'$, так и отрезку $A''B''$, то и $A'B'$ конгруэнтен отрезку $A''B''$; т. е. если $AB \equiv A'B'$, и $AB \equiv A''B''$, то также $A'B' \equiv A''B''$“.

Эта аксиома выполняется по самому определению конгруэнтности в § 6.

Аксиома III[3]. „Пусть AB и BC два отрезка на прямой a без общих точек; далее пусть $A'B'$ и $B'C'$ два отрезка на той же или на другой прямой a' тоже без общих точек. Если при этом

$$AB \equiv A'B' \text{ и } BC \equiv B'C',$$

то всегда также

$$AC \equiv A'C'“.$$

Перенесем прямые a и a' параллельно так, чтобы точки A и A' обе попали в начало координат; тогда, как легко видеть из (1) § 6, четвертые числа в обоих четверках пропорциональных чисел обратятся в нули. Пусть теперь координаты точек B и C будут (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), а точек B' и C' соответственно (ξ_1, η_1, ζ_1) и (ξ_2, η_2, ζ_2). По условию

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2} \tag{9}$$

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2+(\zeta_2-\zeta_1)^2} \quad (10)$$

и требуется доказать, что $\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}=\sqrt{\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2}$.

Обозначим прямую AB через $(u:v:w:0,\ u':v':w':0)$. По условию имеем:

$$\begin{aligned} ux_1+vy_1+wz_1&=0\\ u'x_1+v'y_1+w'z_1&=0,\end{aligned} \quad (11) \qquad \begin{aligned} ux_2+vy_2+wz_2&=0\\ u'x_2+v'y_2+w'z_2&=0.\end{aligned} \quad (12)$$

Из (11) и (12) находим:

$$x_2=tx_1,\ y_2=ty_1,\ z_2=tz_1. \quad (13)$$

Подставляя из (13) в сумму левых частей (9) и (10) получим:

$$\begin{aligned}\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\\ =\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+(t-1)\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}=t\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}=\\ =\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}.\end{aligned} \quad (14)$$

Точно так же найдем:

$$\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2}+\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2+(\zeta_2-\zeta_1)^2}=\sqrt{\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2}. \quad (15)$$

Так как слагаемые в (14) и (15) по условию равны, то и суммы равны:

$$\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}=\sqrt{\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2}, \quad (16)$$

чем и выполняется аксиома III^3.

§ 8

Формулы вращения (2) § 6, поворачивающие отрезок $(0;\ x,\ y,\ 0)$ в положение $(0;\ x',\ y',\ 0)$ на угол $(a:b)_z$, дают возможность определить угол $(a:b)_z$ по заданным отрезкам, т. е. угол между отрезками, который мы будем обозначать самими отрезками, заключая их в квадратные скобки, следующим образом $[(0;\ x,\ y,\ 0);\ (0;\ x',\ y',\ 0)]$.

Умножая обе части равенств (2) § 6 на $\sqrt{a^2+b^2}\neq 0$, имеем:

$$x'\sqrt{a^2+b^2}=ax-by,$$
$$y'\sqrt{a^2+b^2}=bx+ay.$$

Уравнивая левые части равенств и вычитая, получим:

$$axy'-byy'-bxx'-ax'y=0,$$

откуда

$$a(xy'-x'y)=b(xx'+yy')$$

и наконец

$$a:b=(xx'+yy'):(xy'-x'y),$$

т. е.

$$[(0: x, y, 0); (0; x', y', 0)] = [(xx' + yy') : (xy' - x'y)]_z. \tag{1}$$

З а д а ч а 1. „Найти угол $[(0; 1, 0, 0); (0; a, b, c)]$“.

Повернем рассматриваемый угол на угол $(0:1)_z$. Составляющие его отрезки перейдут соответственно в $(0; 0, 1, 0)$ и $(0; -b, a, c)$. Затем повернем получившийся угол на угол $(b:c)_y$, который выбран так, чтобы третья координата второго отрезка обратилась в нуль.

Отрезки перейдут в $(0; 0, 1, 0)$ и $(0; -\sqrt{b^2+c^2}, a, 0)$. Наконец в третий раз повертываем на угол $(0:-1)$, чтобы перевести первый отрезок на ось x-ов, получим отрезки $(0; 1, 0, 0)$ и $(0; a, \sqrt{b^2+c^2}, 0)$. Следовательно искомый угол

$$[(0; 1, 0, 0); (0; a, b, c)] = [(0; 1, 0, 0); (0; a, \sqrt{b^2+c^2}, 0)] = \\ = (a : \sqrt{b^2+c^2})_z. \tag{2}$$

Так же найдем:

$$[(0; 0, 1, 0); (0; a, b, c)] = (b : \sqrt{a^2+c^2})_z$$

и

$$[(0; 0, 0, 1); (0; a, b, c)] = (c : \sqrt{a^2+b^2})_z. \tag{2'}$$

З а д а ч а 2. „Найти угол $[(0; a, b, c); (0; a', b', c')]$“.

Поворачивая сначала на угол $(a : -b)_z$, а затем на $(\sqrt{a^2+b^2} : -c)_y$, получим последовательно

$$\left[(0; \sqrt{a^2+b^2}, 0, c); \left(0; \frac{aa'+bb'}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{ab'-a'b}{\sqrt{a^2+b^2}}, c'\right)\right]$$

и

$$\left[(0; \sqrt{a^2+b^2+c^2}, 0, 0); \left(0; \frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{ab'-a'b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{(a^2+b^2)c'-(aa'+bb')c}{\sqrt{a^2+b^2},\ \sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)\right].$$

Применяя формулу (2), получим:

$$\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} : \sqrt{\frac{(ab'-a'b)^2}{a^2+b^2} + \frac{[(a^2+b^2)c'-(aa'+bb')c]^2}{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}} =$$

$$= \frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} : \sqrt{\frac{(a^2+b^2)[(ab'-a'b)^2+(a^2+b^2)c'^2-2(aa'+bb')cc'+(a'^2+b'^2)c^2]}{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}}$$

и окончательно

$$[(0; a, b, c); (0; a', b', c')] = \\ = \left[\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} : \frac{\sqrt{(ab'-a'b)^2+(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right]_z. \tag{3}$$

Аксиома III[4a]. „Пусть даны угол $\angle(h, k)$ в плоскости α и прямая a' в плоскости α', а также определенная относительно a' сторона плоскости α'. Пусть h' означает луч прямой a', исходящий из точки O', тогда в плоскости α' существует один и только один луч k' такой, что угол $\angle(h, k)$ конгруэнтен или равен углу $\angle(h', k')$, и вместе с тем все внутренние точки угла $\angle(h', k')$ лежат по данную сторону от a'; это соотношение между углами обозначается так $\angle(h, k) = \angle(h', k')$".

Чтобы оправдать эту аксиому, нужно показать, как на плоскости $(u:v:w:r)$ при данной на ней прямой $(u:v:w:r,\ u':v':w':r')$ и точке этой прямой (x_1, y_1, z_1) в сторону, например, возрастающих x-ов отложить угол $[(0; 1, 0, 0); (0; a, b, c)]$. Достаточно показать отложение только последнего угла, так как всякий угол по формулам параллельного перенесення может быть приведен к началу, а затем, как показано в задаче 2 этого §, к данному виду.

Отложим на прямой отрезок $(0; 1, 0, 0)$ в сторону возрастающих x-ов. По формулам (8) § 7, считая $(vw') > 0$, найдем:

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{\delta}(vw');\ y_2 = y_1 + \frac{1}{\delta}(wu');\ z_2 = z_1 + \frac{1}{\delta}(uv').$$

Обозначим новое положение точки (a, b, c) после перенесения откладываемого угла вершиной в точку (x_1, y_1, z_1) через (x', y', z'). Приводим теперь полученный угол $[(x_1, y_1, z_1;\ x_2,\ y_2, z_2); (x_1, y_1, z_1;\ x', y', z')]$ к началу, получим угол:

$$\left[\left(0; \frac{(vw')}{\delta}, \frac{(wu')}{\delta}, \frac{(uv')}{\delta}\right); (0;\ x, y, z)\right],$$

обозначая

$$x' - x_1 = x;\ y' - y_1 = y;\ z' - z_1 = z. \tag{4}$$

Наконец, применяя формулы (3) и (2), получим:

$$\frac{(vw')\,x + (wu')\,y + (uv')\,z}{\sqrt{[(vw')\,y - (wu')\,x]^2 + [(wu')\,z - (uv')\,y]^2 + [(uv')\,x - (vw')\,z]^2}} = \frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}}. \tag{5}$$

Так как точки (x', y', z') и (x_1, y_1, z_1) лежат в плоскости $(u:v:w:r)$, то

$$ux + vy + wz = 0. \tag{6}$$

Так как отрезок $(x_1, y_1, z_1;\ x', y', z')$ равен отрезку $(0; a, b, c)$, то по (7) § 6

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = d \tag{7}$$

где d введено для краткости.

Из системы уравнений (5), (6) и (7) мы и определим x, y, z.

Преобразуя подкоренное знаменателя в (5), получим:

$$[(vw')\,y - (wu')\,x]^2 + [(wu')\,z - (uv')\,y]^2 + [(uv')\,x - (vw')\,z]^2 =$$
$$= [(uv')^2 + (vu')^2 + (wu')^2]\,(x^2 + y^2 + z^2) - [(vw')\,x + (wu')\,y + (uv')\,z]^2 =$$
$$= \delta^2 d^2 - [(vw')x + (wu')\,y + (uv')\,z]^2.$$

Теперь (5) представится так:

$$\frac{[(vw')\,x+(wu')\,y+(uv')\,z}{\sqrt{\delta^2 d^2-[(vw')\,x+(wu')\,y+(uv')\,z]^2}}=\frac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Решая относительно многочлена, стоящего в числителе, который временно обозначим ω, получим:

$$\frac{\omega}{\sqrt{\delta^2 d^2-\omega^2}}=\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}},\qquad \omega=\pm a\delta. \tag{5'}$$

Подставляя оба значения ω в (5'), видим, что второе не годится, так как корни берутся с положительными знаками по (2) и (3), и мы окончательно имеем:

$$(vw')\,x+(wu')\,y+(uv')\,z=a\delta. \tag{8}$$

Из (6) и (8) имеем:

$$\begin{aligned}[][w\,(wu')-v\,(uv')]\,y&=aw\delta\quad+[u\,(uv')-w\,(vw')]\,x,\\ [w\,(wu')-v\,(uv')]\,z&=-av\delta+[v\,(vu')-u\,(wu')]\,x.\end{aligned} \tag{8'}$$

Подставляем в (7)

$$\begin{aligned}&\{[u\,(uv')-w\,(vw')]^2+[v\,(vw')-u\,(wu')]^2+[w\,(wu')-v\,(uv')]^2\}\,x^2-\\ &-2a\delta\,[v^2\,(vw')+w^2\,(vw')-uv\,(wu')-uw\,(uv')]\,x-\\ &-\{d^2\,[w\,(wu')-v\,(uv')]^2-a^2\delta^2\,(v^2+w^2)\}=0.\end{aligned} \tag{9}$$

Преобразуя коэффициенты, имеем:

1) $$\begin{aligned}&[u\,(uv')-w\,(vw')]^2+[v\,(vw')-u\,(wu')]^2+[w\,(wu')-v\,(uv')]^2=\\ &=(u^2+v^2+w^2)\,[(uv')^2+(vw')^2+(wu')^2]-[u\,(vw')+v(wu')+w\,(uv')]^2=\\ &=\delta^2(u^2+v^2+w^2),\end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned}u\,(vw')+v\,(wu')+w\,(uv')&=uvw'-uwv'+vwu'-\\ &-uvw'+uwv'-vwu'=0.\end{aligned} \tag{10}$$

2) $$\begin{aligned}&v^2\,(vw')+w^2\,(vw')-uv\,(wu')-uw\,(uv')=u^2\,(vw')+\\ &+v^2\,(vw')+w^2\,(vw')-u^2\,(vw')-uv\,(wu')-uw\,(uv')=\\ &=(vw')\,(u^2+v^2+w^2)-u\,[u\,(vw')+v\,(wu')+w\,(uv')]=\\ &=(vw')\,(u^2+v^2+w^2)\quad\text{вследствие (10)}.\end{aligned}$$

Обозначим теперь

$$u^2+v^2+w^2=\beta, \tag{11}$$

тогда (9) примет вид

$$\delta^2\beta x^2-2\,a\delta\beta\,(vw')\,x-\{d^2[w(wu')-v\,(uv')]^2-a^2\delta^2(v^2+w^2)\}=0 \tag{12}$$

$$x=\frac{1}{\delta^2\beta}\{a\delta\beta\,(vw')\pm\sqrt{a^2\delta^2\beta^2(vw')^2-a^2\delta^4\beta(v^2+w^2)+d^2\delta^2\beta[w(wu')-v(uv')]^2}\}=$$

$$=\frac{1}{\delta\beta}\{a\beta\,(vw')\pm\sqrt{\beta}\sqrt{a^2\,[\beta(vw')]^2-\delta^2\,(v^2+w^2)]+d^2\,[w\,(wu')-v(uv')]^2}\}.$$

После несложных переделок найдем, что

$$\beta (vw')^2 - \delta^2 (v^2 + w^2) = -[w(wu') - v(uv')]^2.$$

Поэтому

$$x = \frac{1}{\delta\beta} \{a\beta (vw') \pm \sqrt{\beta} . \sqrt{d^2[w(wu') - v(uv')]^2 - a^2[w(wu'] - v(uv')]^2}\} =$$

$$= \frac{1}{\delta\beta} \{a\beta (vw') \pm [w(wu') - v(uw')] \sqrt{\beta} \cdot \sqrt{d^2 - a^2}\}$$

и окончательно

$$x = \frac{1}{\delta\beta} \{a\beta(vw') \pm [w(wu') - v(uv')] \sqrt{\beta} . \sqrt{b^2 + c^2}\}. \tag{13}$$

Подставляя найденное значение x в $(8')$ и делая необходимые преобразования, получим

$$y = \frac{1}{\delta\beta} \{a\beta (wu') \pm [u(uv') - w(vw')] \sqrt{\beta} . \sqrt{b^2 + c^2}\} \tag{13}$$

$$z = \frac{1}{\delta\beta} \{a\beta (uv') \pm [v(vw') - u(wu')] \sqrt{\beta} . \sqrt{b^2 + c^2}\}. \tag{13}$$

В формулах (13) верхние знаки соответствуют верхним и нижние нижним; как уже указано $\delta = \sqrt{(uv')^2 + (vw')^2 + (wu')^2}$, $\beta = u^2 + v^2 + w^2$, $(uv') = uv' - vu'$ и т. д.

Подставляя из (4), имеем окончательно:

$$x' = x_1 + \frac{1}{\delta\beta} \{\beta (vw') a \pm [w(wu') - v(uv')] \sqrt{\beta} . \sqrt{b^2 + c^2}\}$$

$$y' = y_1 + \frac{1}{\delta\beta} \{\beta (wu') a \pm [u(uv') - w(vw')] \sqrt{\beta} . \sqrt{b^2 + c^2}\} \tag{14}$$

$$z' = z_1 + \frac{1}{\delta\beta} \{\beta (uv') a \pm [v(vw') - u(wu')] \sqrt{\beta} . \sqrt{b^2 + c^2}\}$$

Формулы (14) решают поставленную задачу. Двойной знак соответствует двум сторонам плоскости $(u:v:w:r)$ относительно прямой $(u:v:w:r,\ u':v':w':r')$, в чем не трудно убедиться. В самом деле вычислим выражение $u'x' + v'y' + w'z' + r')$. Подставляя x', y', z' из (14) и группируя члены получим

$$u'x' + v'y' + w'z' + r' = u'x_1 + v'y_1 + w'z_1 + r' + \frac{1}{\delta\beta} a\beta[u'(vw') + v'(wu') +$$

$$+ w'(uv')] \pm \frac{\sqrt{\beta} . \sqrt{b^2 + c^2}}{\delta\beta} [u'w(wu') - u'v(uv') + uv'(uv') - v'w(vw') +$$

$$+ vw'(vw') - uw'(wu')].$$

Первый четырехчлен равен нулю, так как (x_1, y_1, z_1) лежит на прямой. Многочлен в первых квадратных скобках подобно (10) также равен нулю. Многочлен во вторых квадратных скобках равен

$(uv')^2 + vw')^2 + (wu')^2 = \delta^2$. Поэтому

$$u'x' + v'y' + w'z' + r' = \pm \frac{\sqrt{\beta} \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \delta^2}{\delta \cdot \beta} =$$

$$= \pm \frac{\delta \cdot \sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{\beta}} \neq 0, \quad \text{т. к.} \quad \delta \neq 0 \quad \text{и} \quad \beta \neq 0.$$

Следовательно формулы (14) откладывают данный угол по обе стороны данной прямой.

Назовем внутренней точкой угла $[(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2\ z_2);\ (x_1, y_1, z_1;\ x', y', z')]$ такую точку, которая лежит по ту же сторону отрезка $(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2)$, как и точка (x', y', z'), и одновременно по ту же сторону отрезка $(x_1, y_1, z_1;\ x', y', z')$, как и точка (x_2, y_2, z_2).

При таком определении внутренних точек угла все внутренние точки отложенного угла лежат по данную сторону от данной прямой, именно по ту же сторону, где лежит точка (x', y', z').

Этим аксиома III^{4a} оправдана вполне.

§ 9

Аксиома III^{4b}. „Каждый угол конгруэнтен самому себе, т. е. всегда $\angle(h, k) \equiv \angle(h, k)$ и $\angle(h, k) \equiv \angle(k, h)$".

Что $\angle(h, k) \equiv \angle(h, k)$, следует из того, что после поворота $\angle(h, k)$ на угол $(1:0)_z$ мы получим тот же угол.

Что $\angle(h, k) \equiv \angle(k, h)$, следует из формулы (3) § 8, которая симметрична относительно (a, b, c) и (a', b', c'). Следовательно аксиома III^{4b} выполняется.

Аксиома III^5. Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место конгруэции

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C',$$

то всегда имеют место и конгруэции

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C', \quad \angle ACB \equiv \angle A'C'B'\text{“}.$$

Так как параллельным перенесением треугольники могут быть перенесены любой вершиной в начало, то достаточно рассмотреть два треугольника, имеющих по вершине в начале $[(0, 0, 0);\ (a, b, c);\ (a', b', c')]$ и $[(0, 0, 0);\ (d, e, f),\ (d', e', f')]$.

По формуле (5) § 6 нам дано

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2 \quad \text{и} \quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = d'^2 + e'^2 + f'^2, \tag{1}$$

а по формуле (3) § 8

$$\frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{(ab' - a'b)^2 + (bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2}} = \frac{dd' + ee' + ff}{\sqrt{(de' - d'e)^2 + ef' - e'f)^2 + (fd' - f'd)^2}}. \tag{2}$$

Требуется доказать

$$\begin{aligned} &[(a, b, c;\ 0, 0, 0);\ (a, b, c;\ a', b', c')] \equiv [(d, e, f;\ 0, 0, 0);\ (d, e, f;\ d', e', f')] \\ \text{и}\quad &[(a', b', c';\ 0, 0, 0);\ a', b', c';\ a, b, c) \equiv [(d', e', f';\ 0, 0, 0);\ (d', e', f';\ d, e, f)]. \end{aligned} \tag{3}$$

Перенесем в первом равенстве (3) углы к началу, получим

$$[(0;\ -a,\ -b,\ -c);\ \ (0;\ a'-a,\ b'-b,\ c'-c)] \equiv$$
$$\equiv [(0;\ -d,\ -e,\ -f);\ \ (0;\ d'-d,\ e'-e,\ f'-f)].$$

По (3) § 8 должно быть справедливо равенство

$$\frac{a^2-aa'+b^2-bb'+c^2-cc'}{\sqrt{(ab-ab'+a'b-ab)^2+(bc-bc'+b'c-bc)^2+(ca-ca'+c'a-ca)^2}}=$$
$$=\frac{d^2-dd'+e^2-ee'+f^2-ff'}{\sqrt{(de-de'+d'e-de)^2+(ef-ef'+e'f-ef)^2+(fd-fd'+f'd-fd)^2}}$$

или

$$\frac{a^2+b^2+c^2-(aa'+bb'+cc')}{\sqrt{(a'b-ab')^2+(b'c-bc')^2+(c'a-ca')^2}}=\frac{d^2+e^2+f^2-(dd'+ee'+ff')}{\sqrt{(d'e-de')^2+(e'f-ef')^2+(f'd-fd')^2}}. \tag{4}$$

Преобразуя подкоренные во (2), получим:

$$\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2}}=$$
$$=\frac{dd'+ee'+ff'}{\sqrt{(d^2+e^2+f^2)(d'^2+e'^2+f'^2)-(dd'+ee'+ff')^2}} \tag{5}$$

Пользуясь формулами (1) из (5), получим

$$aa'+bb'+cc'=dd'+ee'+ff'.$$

В таком случае по (1) и (6) равенство (4) удовлетворяется, т. е. доказано первое из равенств (3).

Второе равенство в (3) отличается от первого только тем, что буквы со значками заменены буквами без значков и обратно. Сделав подобную перемену в (4), легко видеть, что оно по прежнему удовлетворяется, так как изменятся только уменьшаемые в числителях, но и они по (1) равны, т. е. и второе из равенств (3) справедливо.

Следовательно, аксиома III^5 удовлетворяется.

§ 10

Аксиома IV (аксиома параллельности Евклида). „Пусть a произвольная прямая и A точка вне ее, тогда в плоскости, определенной точкой A и прямою a, можно провести не более одной прямой, проходящей через A и не пересекающей a“.

Имеем плоскость $\alpha\,(u{:}v{:}w{:}r)$, в ней прямую $a\,(u{:}v{:}w{:}r,\ u'{:}v'{:}w'{:}r')$ и точку $A\,(x_1, y_1, z_1)$ лежащую в плоскости α вне прямой a. Проведем в плоскости α прямую b через A. Согласно сказанному в § 1 прямая

b может быть, взята в виде $(a:v:w:r,\ \varphi:\chi:0:\omega)$. Обозначая общую точку прямых a и b через (x, y, z), имеем для ее определения систему уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi x + \chi y + \omega &= 0 \\ ux + vy + wz + r &= 0 \\ u'x + v'y + w'z + r' &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Для того, чтобы прямые a и b не пересекались, необходимо выполнение равенства

$$\begin{vmatrix} \varphi & \chi & 0 \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Условие прохождения прямой b через точку A дает:

$$x_1\varphi + y_1\chi + \omega = 0, \tag{3}$$

Так как система уравнений (2) и (3) относительно φ, χ, ω не может дать более одной тройки пропорциональных чисел $\varphi:\chi:\omega$, то аксиома IV выполняется.

Аксиома V_1 (*аксиома Архимеда*). „Пусть A_1 произвольная точка на прямой между произвольно данными точками A и B; строим затем точки $A_2, A_3, A_4, \ldots$, так, что точка A_1 лежит между A и A_2, A_2 между A_1 и A_3, A_3 между A_2 и A_4 и т. д., и сверх того отрезки AA_1, A_1A_2, A_2A_3, $A_3A_4, \ldots$ равны между собой: тогда в ряду точек $A_2, A_3, A_4, \ldots$ всегда существует такая точка A_n, что точка B лежит между A и A_n".

Имеем прямую $(u:v:w:r,\ u':v':w':r')$ и на ней точки $A(a, b, c)$, $B(a_1, b_1, c_1)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ и т. д., и пусть дано, например.

$$a \leqq x_1 \geqq a_1.$$

Требуется доказать, что можно найти такое положительное число n, что

$$a \leqq a_1 \leqq x_n.$$

Приводя отрезок $(a, b, c;\ x_1, y_1, z_1)$ к началу, получим равный ему отрезок $(0;\ x_1 - a,\ y_1 - b,\ z_1 - c)$. Откладывая полученный отрезок от точки A_1, получим по формуле (8) § 7, считая $(vw') > 0$,

$$x_2 = x_1 \pm \frac{1}{\delta}(vw')\,d,$$

где

$$d = \sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2},$$

$$\delta = \sqrt{(uv')^2 + (vw')^1 + (wu')^2},$$

$$(uv') = uv' - vu'$$

и т. д.

Откладывая затем тот же отрезок от точек $A_2, A_3 \ldots A_{n-1}$, получим

$$x_3 = x_2 \pm \frac{1}{\delta}(vw')\,d = x_1 \pm \frac{2\,(vw')\,d}{\delta}$$

$$x_4 = x_3 \pm \frac{1}{\delta}(vw')\,d = x_1 \pm \frac{3\,(vw')\,d}{\delta}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = x_{n-1} \pm \frac{1}{\delta}(vw')\,d = x_1 \pm \frac{(n-1)\,(vw')\,d}{\delta}.$$

Для того, чтобы сделать $x_n \gtrless a_1$, нужно выбрать n так, чтобы

$$x_1 \pm \frac{(n-1)\,(vw')\,d}{\delta} \gtrless a_1. \tag{4}$$

Решая неравенство (4) относительно n, найдем

$$n-1 > \frac{\pm (a_1 - x_1)\,\delta}{(vw')\,d}. \tag{5}$$

Выбрав n таким образом, мы и удовлетворим аксиому V^1.

Аксиома V^2 (*аксиома полноты*). „Элементы (точки, прямые, плоскости) геометрии образуют систему вещей, которая при условии сохранения всех указанных выше аксиом не допускает никакого расширения, т. е. к системе точек, прямых, плоскостей невозможно присоединить другую систему вещей так, чтобы в новой расширенной системе были по прежнему удовлетворены вместе все аксиомы I—IV, V^1".

Все рассмотренные до сих пор аксиомы удовлетворяются и в более узкой области Ω (1) всех алгебраических чисел, получающихся, если мы исходим из единицы и применяем конечное число раз четыре действия: сложение, вычитание, умножение и деление и пятое действие $|\sqrt{1+\omega^2}|$, где ω обозначает число, полученное уже с помощью этих пяти действий (Гильберт. Осн. геом. § 9). Но в такой ограниченной области аксиома V^2 не имеет места, так как эта область может быть различным образом пополнена новыми элементами с сохранением в силе всех аксиом I—IV, V^1.

И только взятая нами область всех вещественных чисел уже не допускает подобного расширения. Докажем это.

Пусть наша система вещей, числа области Ω, допускает расширение, и пусть ξ новая вещь.

Допустим, что подходящими соглашениями мы установили правила действий над ξ и числами из области Ω, а также подчинили ξ аксиомам порядка, так что всегда возможно установить, какое из вещественных чисел больше ξ и какое меньше. Здесь может представиться три случая.

1) В области Ω есть числа и большие ξ и меньшие. В таком случае ξ производит в области Ω Дедекиндово сечение, и согласно аксиоме Дедекинда или в нижнем классе есть наибольшее число или

в верхнем наименьшее. Пусть в нижнем классе есть наибольшее число a. В таком случае

$$a < \xi < a + \varepsilon, \tag{6}$$

где ε как угодно малое положительное число

Так как ξ подчиняется всем правилам счета, установленным для чисел области Ω, то $\xi - a$ тоже вещь из расширенной области, и из (6) имеем

$$\xi - a < \varepsilon. \tag{7}$$

Число $\xi - a$ не удовлетворяет аксиоме Архимеда. В самом деле, пусть b некоторое вещественное число. По аксиоме V^1 можно найти такое целое положительное n, что

$$(\xi - a) \,.\, n > b \tag{8}$$

и, следовательно,

$$\xi - a > \frac{b}{n},$$

что невозможно в виду (7).

Если бы в верхнем классе было наименьшее число a, то мы нашли бы, что $a - \xi$ не удовлетворяет аксиоме Архимеда.

2) В области Ω все числа меньше ξ. В таком случае снова не удовлетворена аксиома Архимеда вследствие невозможности неравенства

$$an > \xi,$$

где a вещественное число, так как и an тоже число из области Ω.

3) Все числа области Ω больше ξ. Теперь невозможно неравенство

$$\xi n > a,$$

так как в противном случае было бы $\xi > \frac{a}{n}$, что противоречит условию.

Таким образом всякое расширение области Ω ведет по крайней мере к нарушению аксиомы Архимеда. Следовательно аксиома V^2 удовлетворяется.

Таким образом Гильберт свел вопрос о взаимной непротиворечивости аксиом своей системы к вопросу о непротиворечивости аксиом арифметики, так как каждое противоречие в следствиях аксиом I-V должно было бы проявиться и в арифметике вещественных чисел.

31 августа 1924 года