И. Е. ОГИЕВЕЦКИЙ

# Об одном дуалистическом законе и его приложениях

(Предварительное сообщение)

## Предисловие

Цель этой статьи (*) доказать существование дуалистического закона характеристик движения, а с другой стороны, обнаружить те упрощения, которые вносит приложение этого закона к различным вопросам. В этой статье устанавливается, что каждой теореме кинематики, кинематической геометрии, сферической тригонометрии и вообще каждой теореме из геометрии и физики, представляющей собой характеристику движения, соответствует, на основании указанного закона, взаимная с ней теорема. Устанавливается также, что система уравнений с „$n$" неизвестными, представляюшая собой характеристику движения, может быть разрешена путем простой подстановки, при чем для ее разрешения достаточно задать только $\frac{n}{2}$ или $\frac{n+1}{2}$ уравнений.

В этой статье доказывается также, что принцип двойственности Poncelet-Plücker'e в приложении к теоремам, имеющим кинематическую формулировку, является следствием этого дуалистического закона. Обнаруживается также, что сферическая тригонометрия, а вместе с ней и тригонометрия Лобачевского может быть построена на основании одной только векториальной формулы.

## I. Об одном дуалистическом законе

Теорема, выражающая этот закон, основана на свойствах движения. Последние связаны с понятием о направлении плоскости. Направление

(*) Основные результаты этой статьи изложены были в заседаниях Харьковского Математического Общества 2 мая 1925 года и 20 мая 1926 года и в заседании Московского Научно-Исследовательского Института Математики и Механики от 28 ноября 1925 года. Некоторые из этих результатов изложены в моей статье: Über ein schiefsymmetrischen Dualitätsgesetz und seine Anwendungen [Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Bd. 51 (1927), S. 315—320].

плоскости (Umlaufsinn in der Ebene) определяем при помощи указателя (Indikatrix) последовательности вершин треугольника, вписанного в окружность данного круга, т. е. одним из двух видов циклического порядка вершин треугольника:

$$(A_1A_2A_3) = (A_2A_3A_1) = (A_3A_1A_2), \tag{1}$$

или

$$(A_1A_3A_2) = (A_3A_2A_1) = (A_2A_1A_3). \tag{2}$$

Указатели или индикатрисы, соответствующие (1) и (2), будем называть индикатрисами первого и второго класса (*).

Установим теперь понятие о преобразовании плоскости самой в себе, для чего условимся об употребляемых терминах.

Два множества будем называть гомеоморфными, если между ними можно установить двуоднозначное и непрерывное соответствие (**). Преобразование, выражаемое этим соответствием, будем называть согласно Brouwer'у топологическим отображением. Под отображением всегда будем подразумевать топологическое отображение.

Тождественное преобразование определим при помощи равенств

$$x' = x; \ldots, u' = u; \tag{3}$$

где $x', \ldots, u'$, $x, \ldots, u$ — координаты точек, участвующих в отображении

Будем говорить, что два преобразования принадлежат к одному и тому же классу (***), если одно может быть получено из другого при помощи цепи непрерывных преобразований.

Преобразования эти выражаются при помощи соотношения:

$$z' = z'(z, t), \tag{4}$$

где $a > t > b$; $a$ и $b$ — вещественные числа. На основании соотношения (4) каждой точке $z$ соответствует точка $z'$, где $z'$ есть непрерывная функция не только $z$, но и параметра $t$.

Преобразование плоскости, удовлетворяющее и принадлежащее вместе с тождественным преобразованием к одному и тому же классу, будем называть преобразованием плоскости самой в себе (****).

Движение плоскости самой в себе мы определяем, как преобразование плоскости самой в себе, при котором сохраняется число, отвечающее

(*) Сравни: Kerkjarto. Vorlesungen über Topologie. S. 26, а также Ж. Гадамар (Заметка о некоторых приложениях указателя Кронекера). Введение в теорию функции с одной переменной. Ж. Таннери. Т. I, стр. 480.

(**) H. Poincaré. Analysis situs. Journal de l'école Polytechnique, 2 série, cahier I, p. 9

(***) L. E. J. Brouwer. „Sur la notion de „Classe" de Transformations d'une multiplicité". Proceedings of the fifth international congres of Mathematicians, Volume II, Cambridge, 1913, p. 9.

(****) Сравни H. Tietze. „Über stetige Abbildungen einer Quadratfläche auf sich selbst". Rendiconti del circolo mathematico di Palermo, t. 38, 1914, p. 251, а также H. Tietze „Über Analysis Situs". Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, B. 2, 1923, S. 47.

расстоянию между любыми двумя точками, а также направление плоскости, подвергаемой преобразованию. Существуют двоякого рода преобразования плоскости самой в себе: при одном преобразовании направление плоскости сохраняется, а при другом направление плоскости меняется на обратное; иными словами, при одном преобразовании класс индикатрисы сохраняется, а при другом преобразовании класс индикатрисы переходит из первого во второй или наоборот. Соответственно этому мы отличаем два рода движения: прямое и обращенное движение. При прямом движении класс индикатрисы плоскости сохраняется, а при обращенном движении класс индикатрисы переходит из первого во второй или наоборот из второго в первый.

Введем теперь понятие о характеристике движения.

Под характеристикой движения подразумеваем всякую вещь, (геометрическую фигуру, вектор, параметр, символ), рассматриваемую при движении плоскости самой в себе.

Мы будем отличать четные и нечетные характеристики. Под четной характеристикой мы подразумеваем такую характеристику движения, которая от индикатрисы движущейся плоскости не зависит. Нечетной же характеристикой мы называем такую характеристику движения, которая зависит от индикатрисы, класс которой определяется классом индикатрисы движущейся плоскости. Легко видеть, что индикатриса нечетной характеристики в обращенном движении будет второго класса, если при прямом движении она была индикатрисой первого класса и наоборот. Соотношения, которые при топологическом преобразовании остаются неизменными, называем топологическими инвариантами.

Соотношения, которые при движении плоскости самой в себе инвариантны, называем инвариантами движения (*). Не трудно видеть, что инварианты движения мы можем рассматривать, как характеристики движения.

Теперь мы можем доказать следующие леммы.

*Лемма I* (**). Пусть при движении плоскости самой в себе имеют место:

$$A(G, g); \tag{5}$$

тогда при обращенном движении имеет место:

$$A(g, G); \tag{6}$$

(*) Сравни Ph. Frank. „Die Stellung des Relativitätsprinzips im System der Mechanik und Elektromechanik". Sitzungsberichte der Wiener Academie. Bd. 118, II-a, 1909, S. 834.

(**) Лемма эта в несколько иной формулировке была изложена в нашей статье: „Основания кинематической геометрии на плоскости и приложения ее к исследованию плоских кривых", премированной в марте 1913 года Физико-Математическим Факультетом Одесского Университета золотой медалью. Вследствие условий военного времени работа эта своевременно не была напечатана. 5 декабря 1914 года мы изложили эту лемму в Математическом отделении Новороссийского Общества Естествоиспытателей.

где $G$ и $g$ — четные характеристики, принадлежащие подвижной и неподвижной плоскостям, а $A$ выражает некоторое взаимнооднозначное соответствие между этими характеристиками.

Лемма эта следует из того, что при обращенном движении плоскости меняются своей подвижностью.

*Лемма II.* Если при движении плоскости самой в себе имеет место

$$A(U, u), \tag{7}$$

тогда при обращенном движении имеет место

$$A(\overline{u}, \overline{U}), \tag{8}$$

где $U$, $u$ — нечетные характеристики, принадлежащие подвижной и неподвижной плоскостям, а $A$ имеет то же значение, что в лемме I, черта же над $U$ и $u$ обозначает, что индикатриса $U$ и $u$ переходят из одного класса в другой. Справедливость этой леммы очевидна.

З а м е ч а н и е I. Если обобщить понятие о характеристике движения, можно упростить формулировку приведенных лемм, не прибегая, между прочим, к понятиям о подвижной и неподвижной плоскостях.

З а м е ч а н и е II. Из этой теоремы вытекает предложение Шаля: „при обмене подвижностью плоскостей, участвующих в движении плоскости в себе, центроиды меняются ролями“ (*).

*Теорема I.* Если при движении плоскости самой в себе имеет место

$$A(G_1,\ G_2, \ldots, G_n,\ \ U_1, \ldots, U_n,\ \ g_1, \ldots, g_n,\ \ u_1, \ldots, u_n), \tag{9}$$

то имеет также место:

$$A(g_1,\ g_2, \ldots, g_n,\ \ \overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n,\ \ G_1, \ldots, G_n,\ \ \overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_n), \tag{10}$$

где $G_i$, $U_i$ обозначают четные и нечетные характеристики, принадлежащие подвижной плоскости, а $g_i$ и $u_i$ обозначают четные и нечетные характеристики, принадлежащие неподвижной плоскости, другие обозначения имеют то же содержание, что в леммах.

В самом деле, при обращенном движении характеристики движения $G_i$, $U_i$, $g_i$, $u_i$ меняют свои места в соотношении (9), а нечетные характеристики меняют свои индикатрисы, но обращенное движение существует вместе с прямым движением, а потому теорема справедлива.

З а м е ч а н и е III. Из леммы II следует теорема о скорости точки в обращенном движении (**).

---

(*) См. „Aperçu historique des méthodes en Géométrie“. M. Schasles, Paris, 1875, p. 478 — 482.

(**) См. Koenigs. Leçons de cinématique, p. 127.

*Следствие I*. Если при движении плоскости самой в себе имеет место

$$B_i(U_1, U_2, \ldots, U_n, G_1, G_2, \ldots, G_n) = F_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, g_1, g_2, \ldots, g_n), \quad (11)$$

тогда имеют также место:

$$B_i(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n, g_1, \ldots, g_n) = F_i(\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots, U_n, G_1, \ldots G_n), \quad (12)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, $B_i$ и $F_i$ — однозначные функции.

*Следствие II*. Если при движении плоскости самой в себе имеют место:

$$B_i(W_1, \ldots, W_n) = F_i(V_1, \ldots V_n), \quad (13)$$

тогда имеют также место:

$$B_i(-V_1, \ldots, -V_n) = F_i(-W_1, \ldots, -W_n), \quad (14)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, $W_i$ — векторы, принадлежащие неподвижной плоскости, а $V_i$ — векторы, принадлежащие подвижной плоскости.

В самом деле, векторы при прямом и обращенном движении характеризуются индикатрисами различных классов, а такие векторы равны по величине и противоположны по знаку.

*Следствие III*. Если при движении плоскости самой в себе имеют место:

$$B_i(W_1, \ldots, W_n) = 0 \quad \text{или} \quad F_i(V_1, \ldots, V_n) = 0, \quad (15)$$

то имеют также место:

$$B_i(-V_1, \ldots, -V_n) = 0 \quad \text{или} \quad F_i - W_1, \ldots, W_n) = 0; \quad (16)$$

при этом обозначения сохраняют то же содержание, что в следствии II.

Так как плоские векторы можно характеризовать, как системы пар вещественных чисел, поэтому следствия II и III можно еще так формулировать.

*Следствие IV*. Если при движении плоскости самой в себе имеют место:

$$B_i(\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n) = F_i(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n), \quad (17)$$

то имеют также место:

$$B_i(-x_1, -y_1, \ldots, -x_n, -y_n) = F_i(-\xi_1, -\eta_1, \ldots, -\xi_n, -\eta_n); \quad (18)$$

*Следствие V*. Если при движении плоскости самой в себе имеют место:

$$B_i(\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n) = 0, \quad \text{или} \quad F_i(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = 0, \quad (19)$$

то имеют также место:

$$B_i(-x_1, -y_1, \ldots, -x_n, -y_n) = 0, \text{ или } F_i(-\xi_1, -\eta_1, \ldots, -\xi_n, -\eta_n) = 0; \quad (20)$$

обозначают Декартовы координаты подвижной, а $x_i$, $y_i$ — неподвижной точки:

*Следствие VI.* Если имеет место:

$$B(\xi, \eta, a) = F(x, y, a), \quad (21)$$

то имеют также место:

$$B(-x, -y, -a) = F(-\xi, -\eta, -a); \quad (22)$$

где $(\xi, \eta)$, $(x, y)$ — координаты соответствующих точек, $a$ — параметр, представляющий собою характеристику движения, а (21) — характеристика движения.

*Следствие VII.* Если при условиях следствия VI имеет место:

$$B(\xi, \eta) = U(x, y), \quad (23)$$

то имеет также место

$$B(-x, -y) = U(-\xi, -\eta). \quad (24)$$

*Следствие VIII.* Если имеет место:

$$B(\xi, \eta, \zeta) = U(x, y, z), \quad (25)$$

то имеет также место:

$$B(-x, -y, z) = U(-\xi, -\eta, \zeta), \quad (26)$$

где $(x, y, z)$ и $(\xi, \eta, \zeta)$ — однородные координаты соответствующих точек подвижной и неподвижной плоскостей.

Замечание IV. Из теоремы I и ее следствий вытекает взаимообратимость теорем плоской кинематической геометрии. Например, на основании теоремы I, вытекают друг из друга две основные теоремы кинематической геометрии о замечательных окружностях Маннгейма. Теоремы эти можно так формулировать (*):

1) Геометрическое место центров кривизны траекторий, описанных при данном движении плоскости самой в себе точками, принадлежащими бесконечно удаленной прямой, представляет собою окружность, соприкасающуюся с базой и рулеттой в мгновенном центре первого порядка, соответствующем данному движению; окружность эту называют первой окружностью Маннгейма.

2) Геометрическое место точек, описывающих при данном движении плоскости самой в себе прямолинейные элементы, представляет

(*) A. Mannheim. „Principes et développements des méthodes en géometrie cinématique" p. 31, а также L. Crelier. Géométrie cinématique plane, p. 30.

собою окружность, симметричную с первой окружностью Маннгейма и называемую второй окружностью Маннгейма.

Теоремы эти можно еще так формулировать:

1) При движении плоскости самой в себе, первой окружности Маннгейма, принадлежащей неподвижной плоскости, соответствует бесконечно удаленная прямая, принадлежащая подвижной плоскости.

2) При движении плоскости самой в себе, бесконечно удаленной прямой, принадлежащей неподвижной плоскости, соответствует окружность, симметричная с первой окружностью Маннгейма, принадлежащая подвижной плоскости.

Так как первая окружность Маннгейма и бесконечно удаленная прямая, рассматриваемые в первой теореме — суть характеристики движения, то, согласно теореме I, первой теореме должна соответствовать другая теорема, в которой роли бесконечно удаленной прямой и окружности меняются с изменением их направления, т. е. характеризующей их индикатрисы, в чем и состоит вторая теорема.

Точно также, на основании следствия VIII, вытекают одна из другой следующие две теоремы Кенигса и Маннгейма (*).

1) Геометрическое место центров кривизны траэкторий, описанных при данном движении плоскости самой в себе точками, принадлежащими прямой,

$$ux + vy + wz = 0 \tag{27}$$

представляет собою коническое сечение Риваля.

$$uk\xi\eta + vk\eta^2 - w(\xi^2 + \eta^2 - k\eta\zeta) = 0, \tag{28}$$

где $(x, y, z)$ и $(\xi, \eta, \zeta)$ — координаты описывающих точек и центров кривизны, $k$, $u$, $v$, $w$ — постоянные числа.

2) Точки, принадлежащие коническому сечению Риваля,

$$ukxy + vy^2 - w(x^2 + y^2 + kyz) = 0 \tag{29}$$

описывают при данном движении плоскости самой в себе траэктории, центры кривизны которых расположены на прямой

$$u\xi + v\eta - w\zeta = 0. \tag{30}$$

Замечание V. На основании указанных следствий системы уравнений, представляющих собою характеристики движения, можно разрешить непосредственно. Например, из уравнений, выражающих вращение,

$$\xi = x\cos\alpha + y\sin\alpha; \quad \eta = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \tag{31}$$

(*) G. Koenigs. Leçons de cinématique, p 444.

следует, на основании следствия VI:

$$-x = (-\xi)\cos(-\alpha) + (-\eta)\sin(-\alpha);$$
$$-y = -(-\xi)\sin(-\alpha) + (-\eta)\cos(-\alpha),$$

т. е.

$$x = \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha; \quad y = \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha; \tag{32}$$

Точно также из формул, связывающих координаты центров кривизны с координатами описывающих точек (*):

$$\xi = \frac{kxy}{x^2 + y^2 + ky}; \quad \eta = \frac{ky^2}{x^2 + y^2 + ky}, \tag{33}$$

где $k$ — расстояние между соответствующими мгновенными центрами первого и второго порядка, вытекают, на основании VII следствия, формулы:

$$x = -\frac{k\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2 - k\eta}; \quad y = -\frac{k\eta^2}{\xi^2 + \eta^2 - k\eta}; \tag{34}$$

кроме того, из

$$\xi x^2 + \xi y^2 + kyz\xi = kyzx; \quad \eta x^2 + \eta y^2 + k\eta yz = ky^2 z \tag{35}$$

вытекают, на основании следствия VIII:

$$-\xi^2 x - \eta^2 x + k\eta\zeta x = k\xi\eta\zeta; \quad -\xi^2 y - \eta^2 y + k\eta y\zeta = k\eta^2\zeta. \tag{36}$$

Теорема наша и ее следствия обобщаются на случай трех и вообще $n$-мерного пространства.

Теоремы эти, как и в случае плоскости связаны с понятием о направлении $n$-мерного пространства.

Направление $n$-мерного пространства определяем при помощи обобщенной пирамиды (**):

$$P_n = A_1 A_2, \ldots, A_{n+1}.$$

Индикатрисой пирамиды мы называем определенную последовательность его вершин, причем последовательности, которые отличаются друг от друга четным числом перестановок его двух вершин, мы относим к одному и тому же классу. Таким образом возможны, как в случае двумерного пространства, только две индикатрисы, одну из которых мы называем индикатрисой первого класса, а другую индикатрисой второго класса.

Преобразование $n$-мерного пространства самого в себе, когда $n > 2$, определяем, как в случае плоскости.

Движение в себе $n$-мерного пространства определяем, как преобразование $n$-мерного пространства самого в себе, при котором

(*) См. мою статью „Основы плоской кинематической геометрии“ Известия Екатеринославского Горного Института 1924, стр. 604.

(**) Сравни „Analysis situs de la géométrie analytique“. S. Lefschetz. Paris, 1924, p. 3.

инвариантно число, отвечающее расстоянию между любыми его точками, а также направление пространства. Обращенное движение $n$-мерного пространства самого в себе, когда $n > 2$, а также четные и нечетные характеристики движения $n$-мерного пространства самого в себе сохраняют тот же смысл, как в случае движения плоскости самой в себе.

Тогда не трудно убедиться в справедливости следующей теоремы:

*Теорема II.* Если при движении $n$-мерного пространства самого в себе имеют место:

$$A_i(G_1, \ldots, G_n, U_1, \ldots, U_n, g_i, \ldots, g_n, u_1, \ldots, u_n), \tag{37}$$

то имеют также место:

$$A(g_1, \ldots, g_n, \overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n, G_1, \ldots, G_n, \overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_n), \tag{38}$$

где $G_i$, $U_i$, $g_i$, $u_i$ обозначают четные и нечетные характеристики движения $n$-мерного пространства самого в себе, при чем $G_i$ и $U_i$ принадлежат подвижному, а $g_i$ и $u_i$ — неподвижному пространству, черта над $u_i$ и $U_i$ обозначает, что индикатриса нечетных характеристик перешла из одного класса в другой, $A$ выражает некоторое взаимнооднозначное соответствие между этими характеристиками.

*Следствие I.* Если при движении $n$-мерного пространства самого в себе имеют место:

$$B_i(U_1, U_2, \ldots, U_n, G_1, \ldots, G_n, u_1, u_2, \ldots, u_n, g_2, \ldots, g_n) = 0, \tag{39}$$

то имеют также место:

$$B_i(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n, g_1, \ldots, g_n, \overline{U}_1, U_2, \ldots, U_n, G_1, \ldots, G_n) = 0, \tag{40}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, (39) — характеристики или инварианты движения.

*Следствие II.* Если при движении $n$-мерного пространства самого в себе имеют место:

$$B_i(W_1, W_2, \ldots, W_n, V_1, V_2, \ldots, V_n) = 0, \tag{41}$$

то имеют также место:

$$B_i(-V_1, -V_2, \ldots, -V_n, -W_1, -W_2, \ldots, -W_n) = 0, \tag{42}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$; $W_i$ — векторы, принадлежащие подвижному, $V_i$ — векторы, принадлежащие неподвижному $n$-мерному пространству, $B_i$ — функции, устанавливающие взаимнооднозначное соответствие между $W_i$ и $V_i$.

Эта теорема непосредственно следует из того, что векторы $n$-мерного пространства в прямом и обращенном движении характеризуются индикатрисами различных классов.

З а м е ч а н и е VI. Теорему II, выражающую свойство характеристик движения, называем дуалистическим косо-симметрическим законом.

*Следствие III*. Если при движении $n$-мерного пространства самого в себе имеют место:

$$B_i(W_1, \ldots, W_n) = 0 \quad \text{или} \quad B_i(V_1, \ldots, V_n) = 0, \tag{43}$$

то имеют также место:

$$B_i(-V_1, \ldots, -V_n) = 0, \quad \text{или} \quad B_i(-W_1, \ldots, -W_n) = 0. \tag{44}$$

*Следствие IV*. Если при движении $n$-мерного пространства самого в себе имеют место:

$$\begin{gathered} B_i(\xi_1, \eta_1, \ldots, \tau_1, \ldots, \xi_n, \eta_n, \ldots, \tau_n, x_1, y_1, \ldots, \\ t_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots, t_n) = 0, \end{gathered} \tag{45}$$

то имеют также место:

$$\begin{gathered} B_i(-x_1, -y_1, \ldots, -t_1, \ldots, -x_n, -y_n, \ldots, \\ -t_n, -\xi_1, -\eta_1, \ldots, -\tau_1, \ldots, -\xi_n, -\eta_n, \ldots, -\tau_n) = 0; \end{gathered} \tag{46}$$

при чем $\xi_i, \eta_i, \ldots, \tau_i$ — $n$ чисел, характеризующих подвижной вектор, а $x_i, y_i, \ldots, t_i$ — $n$ чисел, характеризующих неподвижный вектор $n$-мерного пространства, $u_i$ имеют то же значение, что в следствии II.

*Следствие V*. Если при движении четырехмерного пространства самого в себе имеют место:

$$B_i(W, V, x\ y, z, t, a) = 0, \tag{47}$$

то имеют также место:

$$B_i(-V, -W, -x, -y, -z, -t, -a) = 0, \tag{48}$$

где $W$ и $V$ соответствующие векторы неподвижного и подвижного четырехмерного пространства, $x, y, z, t$ — Декартовы координаты точки четырехмерного пространства, $a$ — параметр, представляющий собою нечетную характеристику движения.

*Следствие VI*. Если при движении четырехмерного пространства самого в себе имеют место:

$$B_i(L, M, N, P, X, Y, Z, T, x, y, z, t, a) = 0, \tag{49}$$

то имеют также место:

$$B_i(-X, -Y, -Z, -T, -L, -M, -N, -P, -x, -y, -z, -t, -a) = 0, \tag{50}$$

где $L, M, N, P$ и $X, Y, Z, T$ — компоненты соответствующих подвижного и неподвижного вектора четырехмерного пространства, остальные обозначения имеют то же содержание, что в следствии V.

*Следствие VII*. Если при движении четырехмерного пространства самого в себе имеют место:

$$B_i(X, Y, Z, P, x, y, z, t, a) = 0, \tag{49'}$$

то имеют также место:

$$B_i(-X,\ -Y,\ -Z,\ -T,\ -x,\ -y,\ -z,\ -t,\ -a)=0. \qquad (50')$$

*Следствие VIII.* Ортогональные преобразования (*) $n$-мерного пространства при неподвижном начале координат удовлетворяют соотношениям (45) и (46).

В самом деле, прямые преобразования имеют вид:

$$x_i'=a_{i1}\ x_1+a_{i2}\ x_2+\cdots+a_{ni}x_n;\quad i=1,2,\ldots,n; \qquad (51)$$

а обратные преобразования записываются:

$$x_i=a_{1i},\ x_1'+a_{2i},\ x_2'+\cdots+a_{ni}x_n', \qquad (52)$$

где $i=1,2,\ldots,n$; и $x_1,\ldots,x_n$, $x_1',\ldots,x_n'$ — Декартовы координаты подвижной и неподвижной точки $n$-мерного пространства. Коэффициенты же $a_{ij}$ зависят от индикатрисы $(i,j)$, определяемой подвижными и неподвижными координатами $n$-мерного пространства или соответствующими подвижным и неподвижным вектором, угол между которыми определяется индикатрисой $n$-мерного пространства, к которому эти векторы принадлежат; поэтому $a_{ij}$ представляет собою нечетную характеристику движения и при обращенном движении принимает вид $a_{ji}$.

## II. О системах уравнений, представляющих собою характеристики движения

Как следует из вышеизложенного, системы уравнений, представляющих собою характеристики движения, удовлетворяют соотношениям вида (21), (22), (25), (26), (45) и (46), а такие системы непосредственно разрешаются, а именно системы:

$$x=\xi\cos a-y\sin a;\quad y=\xi\sin a+\eta\cos a; \qquad (32)$$

$$x=\frac{k\xi\eta}{\xi^2+\eta^2-k\eta};\quad y=\frac{k\eta^2}{\xi^2+\eta^2-k\eta} \qquad (34)$$

получаются из систем:

$$\xi=x\cos a+y\sin a;\quad \eta=-x\sin a+y\cos a, \qquad (31)$$

и

$$\xi=\frac{kxy}{x^2+y^2+ky};\quad \eta=\frac{ky^2}{x^2+y^2+ky}; \qquad (33)$$

путем замены $\xi$ — через $-x$, $\eta$ — через $-y$, $x$ — через $-\xi'$, $y$ — через $-\eta$ и $a$ — через $-a$.

---

(*) Здесь идет речь о преобразованиях, определитель которых равен единице (Transformation unimodular). Cp. Invariantentheorie, R. Weitzenböck 1913, S. 6.

Точно также система (52) получается из системы (51) путем замены $x_i'$ через $-x_i$, $x_i$ через $-x_i'$ и $a_{ij}$ через $-a_{ji}$.

Не трудно видеть, что для разрешения этих систем уравнений достаточно задать только $m$ уравнений, где целое число $m$ удовлетворяет одному из равенств:

$$n=2m-1;\quad n=2m;$$

где $n$ число известных системы.

Предполагая, что $n$ число четное, допустим, что нам заданы только $\frac{n}{2}$ уравнений системы (51). Из них путем указанной замены получим $\frac{n}{2}$ уравнений системы (52), а вместе с заданными — $n$ уравнений, которые мы сможем разрешить. Таким же образом убеждаемся, что в случае, когда $n$—нечетное число, то разрешение системы возможно, когда задано только $\frac{n+1}{2}$ уравнений системы, а когда $n$—четное число, то достаточно иметь $\frac{n}{2}$ уравнений. Когда число неизвестных равно двум, то одно уравнение уже дает возможность определить два вытекающие из него другие уравнения, например: уравнения обратных преобразований координат (31) можно получить только из одного уравнения (32).

## III. О принципе двойственности Poncelet-Plücker'a

Покажем, что принцип двойственности Poncelet-Plücker'a является следствием нашего дуалистического закона в том смысле, что всякая взаимная теорема геометрии, имеющая кинематическую формулировку и получаемая при помощи принципа двойственности, может быть также получена при помощи нашего дуалистического закона.

Прежде всего покажем, как следствие теоремы II, что

$$ux+vy+1=0 \tag{53}$$

выражает не только прямую, но и точку.

В самом деле, прямую мы можем рассматривать, как траэкторию, описанную при некотором движении плоскости в себе, например, одной из крайних точек движущегося отрезка в случае прямого Карданова движения.

Соответственно этому уравнение (53) выражает, что подвижная точка $(x, y)$ описывает неподвижную прямую $(u, v)$. Иными словами уравнение (53) характеризует движение плоскости в себе, при котором неподвижному вектору $(u, v)$ соответствует подвижной вектор $(x, y)$ при любых положениях плоскости. Тогда векторы $(u, v)$ и $(x, y)$, удовлетворяющие соотношению (53), представляющему собой частный случай соотношения (45), должны, на основании следствия IV, удовлетворять также уравнению:

$$(-x)(-u)+(-y)(-v)+1=0; \tag{54}$$

характеризующее движение плоскости в себе, при котором неподвижный вектор $(-x, -y)$ соответствует подвижному вектору $(-u, -v)$ в любых его положениях.

Иными словами, из того, что (53) есть уравнение прямой, следует, что (53) есть также уравнение точки.

Точно также можно показать, что из того, что

$$ux+vy+wz+1=0 \tag{55'}$$

выражает собой плоскость, следует, что (55) выражает собой также точку.

Не трудно также показать, что на основании нашего закона можно получить из различных теорем геометрии, представляющих собою характеристики движения, взаимные с ними теоремы.

Пример I. Из теоремы, что уравнение переменной точки ряда имеет вид:

$$ux_0+vy_0+1+\lambda(ux_1+vy_1+1)=0 \tag{55}$$

следует, что уравнение переменного луча пучка имеет вид:

$$\begin{gathered}(-u_0)(-x)+(-v_0)(-y)+1+\\ +\lambda[(-u_1)(-x)+(-v_1)(-y)]+1=0,\end{gathered} \tag{56}$$

т. е.

$$u_0x+v_0y+1+\lambda(u_1x+v_1y+1)=0. \tag{57}$$

Пример II. Из теоремы, что условие прохождения плоскости через три точки имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{58}$$

следует, на основании следствия IV из теоремы II, что уравнение точки пересечения трех плоскостей, имеющих тангенциальные координаты $(u_1, v_1, w_1)$, $(u_2, v_2, w_2)$ и $(u_2, v_3, w_3)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} u & v & w & 1 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{59}$$

ибо $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, $(x_3, y_3, z_3)$ и $(u_1, v_1, w_1)$, $(u_2, v_2, w_2)$, $(u_3, v_3, w_3)$ мы можем рассмотреть, как векторы.

Пример III. Из того, что лучевые координаты удовлетворяют соотношению:

$$P_{12}P_{34}+P_{13}P_{24}+P_{14}P_{23}+0 \tag{60}$$

следует, что осевые координаты удовлетворяют соотношению:

$$\Pi_{12}\Pi_{34}+\Pi_{13}\Pi_{24}+\Pi_{14}\Pi_{23}=0, \tag{61}$$

так как

$$P_{14}=x_1-y_1; \quad P_{23}=x_2-y_2; \quad P_{34}=x_3-y_3;$$
$$P_{23}=x_2y_3-x_3y_2; \quad P_{13}=x_3y_1-y_3x_1; \quad P_{12}=x_1y_2-y_1x_2,$$

а

$$\Pi_{14}=u_1-v_1; \quad \Pi_{24}=u_2-v_1; \quad \Pi_{34}=u_3-v_3;$$
$$\Pi_{23}=u_2v_3-u_3v_2; \quad \Pi_{13}=u_3v_1-v_3u_1; \quad \Pi_{12}=u_1v_2-v_1u_2,$$

где $x_1$, $x_2$, $x_2$ и $y_1$, $y_2$, $y_3$ — координаты двух точек прямой, а $u_1, u_2, u_3$ и $v_1$, $v_2$ $v_3$ тангенциальные координаты двух плоскостей, пересекающихся по некоторой прямой.

## IV. Векториальное обоснование сферической тригонометрии

К. Коммерель в своей очень интересной работе „Vektorielle Begründung der Sphärischen Trigonometrie (*)" показывает, что основные формулы сферической тригонометрии могут быть получены из двух определителей.

Определители эти он получает из двух уравнений:

$$\mathfrak{P}^i=a^{i1}\mathfrak{P}_1+a^{i2}\mathfrak{P}_2+a^{i3}\mathfrak{P}_3; \tag{62}$$

$$\mathfrak{P}_i=a_{i1}\mathfrak{P}^1+a_{i2}\mathfrak{P}^2+a_{i3}\mathfrak{P}^3; \tag{63}$$

где

$$a_{ik}=\mathfrak{P}_i\mathfrak{P}_k \tag{64}$$

и

$$a^{ik}=\mathfrak{P}^i\mathfrak{P}^k; \tag{65}$$

$$i=1,\ 2,\ 3 \quad \text{и} \quad k=1,\ 2,\ 3,$$

— векторы двух основных систем, удовлетворяющих

$$\mathfrak{P}_i\mathfrak{P}^k=\begin{cases} 0 \text{ для } i\neq k; \\ 1 \text{ для } i=k; \end{cases} \tag{66}$$

при чем, как векторы $\mathfrak{P}_i$, так и векторы $\mathfrak{P}^k$ линейно независимы.

---

(*) Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker Vereinigung, Bd. 32, 1923, S. 86—91.

Сравни также: G. Hessenberg. „Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie". Math. Annalen, Bd. 78, p. 93.

Каждый из векторов проходит через точки 0 и $P_i$ и каждый из векторов проходит через точки 0 и $P^k$.

Указанные точки определяются следующим образом: 0 — центр сферы с радиусом, равным 1, $P_i$ и $P^k$ — $(i = 1, 2, 3$ и $k = 1, 2, 3)$ суть вершины двух сферических треугольников $P_1P_2P_3$ и $P^1, P^2, P^3$, где один из них является полярным по отношению к другому.

При движении сферы самой в себе с сохранением своей индикатрисы образуются треугольники $P_1P_2P_3$ и $P^1P^2P^3$ и имеют место соотношения (66), а вместе с ними и соотношения (62) и (63), т. е. (62) и (63) суть характеристики движения.

Тогда на основании следствия II теоремы II из уравнения (62), которое можно переписать [см. (65)]

$$\mathfrak{P}^i = \mathfrak{P}^i \mathfrak{P}^1 \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}^i \mathfrak{P}^2 \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}^i \mathfrak{P}^2 \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}^i \mathfrak{P}^3 \mathfrak{P}_2,$$

следует:

$$-\mathfrak{P}_i = -\mathfrak{P}_i \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}^1 - \mathfrak{P}_i \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}^2 - \mathfrak{P}_i \mathfrak{P}_3 \mathfrak{P}^3,$$

которое, на основании (64), записывается:

$$\mathfrak{P}_i = a_{i1} \mathfrak{P}^1 + a_{i2} \mathfrak{P}^2 + a_{i3} \mathfrak{P}^3;$$

иными словами, из уравнений (62) следуют уравнения (63).

Аналогично могут быть получены друг из друга и другие пары формул: (8), (10), (11), (12) и (13), встречающиеся в статье Коммереля (*).

Отсюда следует, что для вывода основных формул сферической тригонометрии достаточна только одна из двух формул: (62) или (63).

Так как основные формулы сферической тригонометрии приводятся к формулам тригонометрии Лобачевского при замене сторон $a, b, c$ сферического треугольника через $-ai, -bi, -ci$, следовательно тригонометрия Лобачевского также может быть построена на одной только векториальной формуле.

Примечание. Обобщение теоремы II и ее следствий, как и другие приложения, будут изложены в другой, большей работе на эту же тему.

Здесь укажу только на следующие два факта.

1. Между первой и второй группой уравнений Максвелла для пустоты существует связь, определяемая следствием VI.

2. Не трудно показать, что известные Гамильтоновы уравнения движения:

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{dp_k}; \quad \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_k}$$

обладают этим же свойством.

(*) См. K. Kommerel, loc. cit.

I. OGIEWETZKI

# Ueber ein Dualitätsgesetz und seine Anwendungen

RESUMÉ

In dieser Arbeit wird die Existenz eines Dualitätsgesetzes und die Anwendungen dieses Gesetzes auf die Geometrie und Physik bewiesen.

Besonders wird bewiesen dass das Prinzip der Dualität der Geometrie von Poncelet-Plücker eine Folgerung aus unserem Dualitätsgesetz ist, in dem Sinne, dass jede duale Ubersetzung der Lehrsätze, welche als Bewegungscharakteristiken (*) ansehen werden können, wie im Sinne der Projektiven Geometrie geschiet, auch durch Anwendungen unseres Dualitätsgesetzes erhalten wird.

Es wird auch bewiesen, dass man kann ein System von Gleichungen mit „$n$" Unbekannten, welches ein Bewegungscharakteristik ist, unmittelbar lösen auch im Falle, wenn nur $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n+1}{2}$ Gleichungen gegeben sind.

Als Beispiele können die orthogonalen Transformationen

$$x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$$

und

$$x_i = a_{1i}x'_1 + a_{2i}x'_2 + \cdots + a_{ni}x'_n$$

dienen. Wie es ist leicht zu sehen, folgen diese Gleichungen durch die Substitution

$$x'_i = -x_i; \quad x_i = -x'_i; \quad a_{ij} = a_{ji}$$

auseinander.

Endlich wird bewiesen, dass die zwei vektoriellen Grundformeln der sphärischen Trigonometrie des Herrn K. Kommerel (*) folgen auseinander; mit anderen Worten, dass die sämmtlichen Grundformeln der Trigonometrie nicht aus zwei, sondern aus einer vektoriellen Formel abgelesen werden können.

---

(*) Die Dinge (z. B. Formeln, Symbole, Parameter, Vektoren, Geometrische Flächen), die wir bei einer Bewegung anschen oder welche eine Bewegung charakterisieren nennen wir Bewegungscharakteristiken.

(*) Sieh K. Kommerel. „Vektorielle Begründung d. sphär. Trigonometrie"; loc. cit.