JURI NEUSCHÜLER

Ueber den mehrdimensionalen Raum

Vorwort

In dieser Arbeit beweise ich dass nicht nur die Fläche eine absolute Invariante hat, sondern auch jeder mehrdimensionaler Raum von n Dimensionen.

Im Beweise basierte ich mich auf dem Gedanken, dass wenn wir die algebraische Form X_n^k konventionnell wie einen linearen Ausdruck bezeichnen, indem diese Bezeichnung nicht als deus ex machina speziell ad hoc eingeführt wird, sondern sie durch den von mir bewiesenen Pascalschen Potenzen der Jacobi'schen Determinante empfohlen ist, — dass dann die Grenzen zwischen den Begriffen der Form und des Vektors verschwinden, welcher Umstand die Theorie der absoluten Invariante einer algebraischen Form X_n^k mit veränderlichen Koeffizienten, die ich in meiner Arbeit entwickle, an die Differentialgeometrie mittelst der Vektoranalysis anzuwenden erleichtert. Um die Anwendung durchzuführen, sah ich mich gezwungen die Jacobi'sche Funktionaldeterminante zu verallgemeinern, nämlich: ich nahm in Betracht nicht nur das erste Differential der Entfernung, sondern auch die höheren. Infolge dessen wird erhellt, dass um die Rauminvariante bei höherer Dimensionenzahl aufzuschen und festzustellen, ist es keinswigs gleichgültig, aus welchem Raume man den ersten beobachtet.

Bei der Lösung der Frage über den mehrdimesionalen Raum, die ich. mir gestellt hatte, musste ich, ausser der Präzisierung des Vektorbegriffes, auch einige neue Gestalten für die Potenzen einer Determinante geben Eine der letzten deckt die innere Natur der Raumdeterminanten auf, indem es sich die Gründe der Vieldeutigkeit ihrer erklärt, wenn die Klasse ungerade ist.

Wenn, im Frühling dieses Jahres, die Grundgedanken dieser Arbeit konspektiv formuliert und dem Verwalter der Katheder der Geometrie, Prof. D. M. Sintzow, übergegeben waren, — so war so gut, mir Lecat's Monographie — Abrégé de la théorie des déterminants à n dimensions — zu geben, wofür ich meine Dankbarkeit ausdrücke.

§ 1. Zerlegung des Vektors

1. Betrachten wir im Raume von $n+1$ Dimensionen einen von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ abhängigen Vektor, den wir mit $R(x)$ bezeichnen. Er ist nach $n+1$ Richtungen zerlegbar. Wählen wir für dieselben die folgenden:

1) die n derivierten Vektoren $R'_1 R'_2, \ldots, R'_n$ und 2) das äussere Produkt, das wir im Folgenden folgendermassen bezeichnen

$$[R'_1 R'_2 R'_3, \ldots, R'_n] \equiv [R]$$

und das niemals verschwindend gedacht ist.

Interpretieren wir den Vektor $R(x)$ als Radiusvektor einer Hyperfläche, so sind die ersten Richtungen tangentiell und die letztere — normal zur Hyperfläche.

Bei diesen Bezeichnungen ist $(dR)^2$ die 1-te fundamentale Differentialform der Flächentheorie.

2. Zerlegen wir nach den erwähnten Richtungen die zweite Derivierte

$$R_{ij} = \frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j}$$

so erhalten wir:

$$R_{ij} = R_0^{ij}[R] + \sum_1^n{}_m R_m^{ij} R_m,$$

wo

$$R_0^{ij} = \frac{R_{ij}\,[R]}{[R]^2}\,; \quad R_m^{ij} = \frac{[R_m] R_{ij}}{[R_m] R_m} = \frac{[R_m^{ij}]\,[R]}{[R]^2}\,.$$

Hier bezeichnet $[R_m]$ das Resultat der Ersetzung in der Normale $[R]$ der Richtung R_m durch $[R]$ selbst; $[R_m^{ij}]$ ist das Resultat der Ersetzung in $[R]$ der Richtung R_m durch die zweite Derivierte R_{ij}.

Die R_0^{ij} sind die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform der Flächentheorie, nämlich

$$\frac{d^2 R[R]}{[R]^2}\,.$$

Die R_m^{ij} sind die Christoffelschen Symbole zweiter Art, was aus der Gleichung folgt:

$$R_{ij} R_m = R_0^{ij}[R] R_m + \sum_1^n{}_k R_k^{ij} R_k R_m = \sum_1^n{}_k R_k^{ij} a_{km},$$

wo die a_{mk} die Elemente der Determinante $[R]^2$ sind.

3. Der Vektor $[R_m]$ zerlegt lautet:

$$[R_m] = M_0[R] + \sum_1^n{}_k M_k R_k = \sum_1^n{}_k M_k R_k$$

wo

$$M_k = \frac{[R_m]\,[R_k]}{R_k[R_k]} = -\frac{[R_m]\,[R_k]}{[R]^2} = K_m.$$

Um den Sinn des $M_k = K_m$ zu erklären, lösen wir das System:

$$[R_m]R_1 = \sum_{1}^{n}{}_k M_k R_k R_1 = \sum_{1}^{n}{}_k M_k a_{k1} = 0$$

$$[R_m]R_2 = \sum_{1}^{n}{}_k M_k R_k R_2 = \sum_{1}^{n}{}_k M_k a_{k2} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[R_m]R_m = \sum_{1}^{n}{}_k M_k R_k R_m = \sum_{1}^{n}{}_k M_k a_{km} = -[R]^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[R_m]R_n = \sum_{1}^{n}{}_k M_k R_k R_n = \sum_{1}^{n}{}_k M_k a_{kn} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ziehen wir

$$M_k = \frac{-[R]^2 A_{km}}{[R]^2} = -A_{km}.$$

Folglich ist

$$A_{km} = -M_k = -K_m = \frac{[R_k]\,[R_m]}{[R]^2}$$

ein Element der zu $[R]^2$ reziproken Determinante.

4. Der Vektor $[R^{ij}_m]$ zerlegt lautet.

$$[R^{ij}_m] = M^{ij}_0[R] = \sum_{1}^{n}{}_k M^{ij}_k R_k.$$

Die Komponenten haben hier den Sinn

$$M^{ij}_0 = \frac{[R^{ij}_m]\,[R]}{[R]^2} = R^{ij}_m$$

$$M^{ij}_k = \frac{[R^{ij}_m]\,[R_k]}{R_k[R_k]} = \frac{K_m[R^{ij}_m]R_m}{R_k[R_k]} = \frac{-A_{km}R_{ij}[R]}{[R]^2} = -A_{km}R^{ij}_0,$$

folglich ist

$$[R^{ij}_m] = R^{ij}_m[R] - R^{ij}_0 \sum_{1}^{n}{}_k A_{km} R_k.$$

5. Endlich zerlegen wir den Vektor

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[R] = \sum_{1}^{n}{}_k [R_k^{ki}] = \sum_{1}^{n}{}_k \{R_k^{ki}[R] - R_0^{ki} \sum_{1}^{n}{}_p A_{kp} R_p\} =$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_k R_k^{ki}[R] - \sum_{1}^{n}{}_{kp} R_0^{ki} A_{kp} R_p.$$

Setzen wir $[R] = Ue$, wo $U = |[R]|$, und $e = \frac{[R]}{|[R]|}$, $e^2 = 1$.

So ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[R] = \frac{\partial}{\partial x_i}(Ue) = e\frac{\partial}{\partial x_i}U + U\frac{\partial}{\partial x_i}e;$$

wovon die Beziehungen fliessen:

$$\sum_{1}^{n}{}_k R_k^{ki} = \frac{1}{U}\frac{\partial}{\partial x_i}U = \frac{\partial}{\partial x_i}\lg\sqrt{U} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\lg[R]^2;$$

$$\frac{\partial e}{\partial x_i} = -\sum_{1}^{n}{}_{kp} R_0^{ki}\frac{A_{kp}}{\sqrt{[R]^2}}R_p = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{[R]}{\sqrt{[R]^2}}.$$

6. Aus der letzten Formel ziehen wir:

$$\sum_{1}^{n}{}_i\left(\frac{\partial e}{\partial x_i}dx_i\right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{1}^{n}{}_i - dx_i \sum_{1}^{n}{}_{kp} R_0^{ki}\frac{A_{kp}}{\sqrt{[R]^2}}R_p\right)^2 =$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_{ij} dx_i dx_j \sum_{1}^{n}{}_{kpk'p'} R_0^{ki} R^{k'j}\frac{A_{kp}A_{k'p'}}{[R]^2}R_p R_{p'} =$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_{ij} dx_i dx_i \sum_{1}^{n}{}_{kpk'p'} R_0^{ki} R_0^{k'j}\frac{A_{kp}A_{k'p'}}{[R]^2}a_{pp'} =$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_{ij} dx_i dx_j \sum_{1}^{n}{}_{kpk'} R_0^{ki} R_0^{k'j}\frac{A_{kp}}{[R]^2}\sum_{1}^{n}{}_{p'} A_{k'p'}a_{pp'} =$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_{ij} dx_i dx_j \sum_{1}^{n}{}_{kp} R_0^{ki} R_0^{pj} A_{kp}.$$

Beschränken wir uns auf den dreidimensionalen Raum, so bekommen wir die dritte fundamentale Differentialform der Flächentheorie.

7. Die Tangentialebene im Punkte R ist

$$(X - R)[R] = 0$$

Schreiben wir diese Gleichung für den unendlich nahen Punkt $R + dR$:

$$(X - R - dR)([R] + d[R]) = 0.$$

Aus den beiden Gleichungen soll nun x eliminiert werden. Dazu transformiren wir die zweite Gleichung folgendermassen:

$$0 = (X - R - dR)([R] + d[R]) = (X - R)([R] + d[R]) = (X - R)\, d[R] = 0.$$

Ordnen wir den Punkt X im geodetischen unendlich-kleinen Kreise um den Mittelpunkt R ein, so bekommen wir

$$\delta R d[R] = 0$$

wo δR irgendeine Tangentialrichtung ist. Soll nun die Normalrichtung für $d[R]$ ausgeschlossen werden, d. h. $\delta = d$, so bekommen wir:

$$0 = dRd[R] = \sum_{1j}^{n} R_j dx_j \,.\, (-1) \sum_{1i}^{n} dx_i \sum_{1kp}^{n} R_0^{ki}.$$

$$\frac{A_{kp}}{\sqrt{[R]^2}} R_p = -\sum_{1ij}^{n} dx_i dx_j \sum_{1kp}^{n} R_0^{ki} \frac{A_{kp}}{\sqrt{[R]^2}} R_p R_j =$$

$$= -\sum_{1ij}^{n} dx_i dx_j \sum_{1kp}^{n} R_0^{ki} \frac{A_{kp}}{\sqrt{[R]^2}} a_{pj} =$$

$$= -\sum_{1ij}^{n} dx_i dx_j \sum_{1k}^{n} R_0^{ki} \sum_{1p}^{n} \frac{A_{kp}}{\sqrt{[R]^2}} a_{pj} =$$

$$= -\sum_{1ij}^{n} dx_i dx_j R_0^{ij} = 0.$$

Das ist die Differentialgleichung der Asymptoten, wenn wir uns auf den dreidimensionalen Raum beschränken.

8. In diesem Punkte beschränken wir uns auf den dreidimensionalen Raum: Die Gleichung der Normale im Punkte R ist

$$[(X - R)[R]] = 0$$

oder

$$X - R = K[R]$$

wo K ein Proportionalitätsfactor ist.

Schreiben wir nun die Gleichung der Normale im unendlich-nahen Punkte

$$[(X - R - dR)([R] + d[R])] = 0.$$

Um die Veränderliche X aus den beiden Gleichungen zu eliminiren, bemerken wir, dass, da die Normale zu dR orthogonal ist, die letztere Gleichung mit dR scalar multipliziert werden kann und danach folgendermassen transformirt:

$$\begin{aligned} 0 &= dR[(X - R - dR)([R] + d[R])] = [dR(X - R - dR)] \,. \\ &\quad .([R] = d[R]) = [dR(X - R)]([R] + d[R]) = \\ &= dR[(X - R)([R] + d[R])] = dR[(X - R) d[R]] = \\ &= K[R]\,[dRd[R]] = K[R]\,[dR \,.\, Ude] = KU[R]\,[dRde] = 0 = [R]\,[dRde]. \end{aligned}$$

Nun setzten wir statt der Differentiale ihre Werte:

$$0=[R]\left[\sum_{1}^{n}{}_{j} R_j dx_j - \sum_{1}^{n}{}_{i} dx_i \sum_{1}^{n}{}_{kp} R_0^{ki} \frac{A_{kp}}{\sqrt{[R]^2}} R_p\right]=$$

$$=-[R]\left[\sum_{1}^{n}{}_{ij} dx_i dx_j \sum_{1}^{n}{}_{kp} R_0^{ki} \frac{A_{kp}}{\sqrt{[R]^2}} R_p R_j\right]=$$

$$=-\sum_{1}^{n}{}_{ij} dx_i dx_j \sum_{1}^{n}{}_{kp} R_0^{ki} \frac{A_{kp}}{\sqrt{[R]^2}}[R][R_p R_j]=$$

$$=-\sum_{1}^{n}{}_{ij} dx_i dx_j \sum_{1}^{n}{}_{kp} R_0^{ki} A_{kp}=0 \quad (p \neq j).$$

Das ist die Differentialgleichung der Krümmungslinien.

9. Betrachten wir jetzt das k-te Differential des Vektors $R(x)$ und bilden wir den Ausdruck

$$D^k R = \frac{d^k R[R]}{[R]^2},$$

dessen Koeffizienten die Normalkomponenten in der Zerlegung der k-ten Vektorderivierten sind.

Nehmen wir die k-te Schiebung der Form $D^k R$, so erhalten wir, wenn n die Zahl der Veränderlichen ist, dass

$$Sch_n(D^k R)$$

invariant und eine Funktion der Koeffizienten der Riemannschen Differentialform ist, nur wenn

$$n=k=2.$$

Dieser sehr spezielle Ausnahmeffall kann nicht der Forderung der mathematischen Allgemeinheit genügen. Ausserdem lässt dieser Umstand vermuthen, dass das Grassmannsche Gebäude nur ein analytischer Traum sei, aber keine Ahnung der in der objektiven Welt herrschenden Beziehungen. Der schärfste und tiefste Ausdruck dieser objektiven Beziehungen ist eine Differentialgleichung. In der vorliegender Untersuchung beweise ich, dass der mehrdimensionale Raum mathematisch existiert, und stelle die entsprechende Verallgemeinerung der Riemannschen Massbestimmung fest. Ob die aufgestellten Differentialgleichungen bestimmten objektiven Beziehungen entsprechen, oder sie sind nur Folgen der Axiome der reinen Analysis, — diese Frage geht aus den Rahmen meiner Untersuchung. Was aber zu behaupten ist — das Problem der mehrdimensionalen Räume ist mathematisch vollständig gelöst.

Um zu der angewiesenen Verallgemeinerung zu gelangen, musste ich die Begriffe der Determinante, des Vektors und der algebraischen Form mit veränderlichen Koeffizienten untersuchen, einige neue Beziehungen unter ihnen weisen.

§ 2. Determinantenprodukt

1. Wenn wir das Produkt $\overset{n}{\underset{1}{\Pi_i}}\, a_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ einklammern, so bekommen wir, bei passendem Sinne der a_i, die Determinante

$$[\Pi_i a_i] = \underset{ji}{S}(-1)^{\eta}\Pi_i a_{ij_i}.$$

Klammern wir nun jeden Summand der Determinante ein, so bekommen wir die Determinante 3-ter Klasse

$$D_n^3 = [\Pi_i a_i]_2 = \underset{ji_1 ji_2}{SS}(-1)^{\eta_1+\eta_2}\Pi_i a_{ij_{i_1}j_{i_2}}.$$

Dieses Process können wir so oft iterieren, bis wir die Raumdeterminante k-ter Klasse gewinnen:

$$D_n^k = [\Pi_i a_i]_{k-1} = \underset{j_1 j_2}{SS}, \ldots, \underset{j_{k-1}}{S}(-1)^{\Sigma\eta_i}\Pi_i a_{ij_{i_1}j_{i_2}\ldots, j_{i_{k-1}}}.$$

Diese Verallgemeinerung des Grassmannschen Algorithmus ist die einfachste und praktischste Methode, den analytischen Ausdruck D_n^k zu gewinnen.

2. Zum Beispiel, betrachten wir die Determinante 2 Ordnung:

1) $-(x_1 x_2)$
2) $-(x_1 y_1)(x_2 y_2) - (x_1 y_2)(x_2 y_1)$
3) $-(x_1 y_1 z_1)(x_2 y_2 z_2) - (x_1 y_1 z_2)(x_2 y_2 z_1) - (x_1 y_2 z_1)(x_2 y_1 z_2) +$
$+(x_1 y_2 z_2)(x_2 y_1 z_1)$ u. s. w.

3. Wenden wir den Algorithmus auf die Gleichungen

1) $\Pi_i a_i \Pi_i b_i, \ldots, \Pi_i c_i = \Pi_i a_i b_i, \ldots, c_i$
2) $\underset{m}{S}(-1)^{\alpha}\Pi_\nu a_{\nu m} \cdot \underset{n}{S}(-1)^{\beta}\Pi_\varrho b_{\varrho n} = \underset{n}{S}(-1)^{\eta}\Pi_m \Sigma_i a_{im} b_{in}$

so gewinnen wir entsprechend die Multiplikationssätze von Scott, von-Escherich und Cayley.

4. Seien nun n Determinanten gegeben

$$A_i = \underset{k_i}{S}(-1)^{\eta_i}\overset{m}{\underset{1}{\Pi_j}} a^i_{jk_{ij}} \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

und sollen wir ihr Produkt bestimmen

$$A = \overset{n}{\underset{1}{\Pi_i}} A_i = \overset{n}{\underset{1}{\Pi_i}}\Big(\underset{k_j}{S}(-1)^{\eta_i}\overset{m}{\underset{1}{\Pi_j}} a^i_{jk_{ij}}\Big).$$

In A kann $\underset{k_i}{S}$ konventionnell als ein arithmetischer Faktor angesehen werden, weil die mit ihm bezeichnete Operation eindeutig bestimmt ist, wo auch das Zeichen gesetzt sein mag. Folglich ist

$$A = \mathop{\Pi_i}\limits_1^n \mathop{S}\limits_{k_i} . \mathop{\Pi_i}\limits_1^n (-1)^{\Sigma_i \eta_i} . \mathop{\Pi_i}\limits_1^n \mathop{\Pi_j}\limits_1^m a^i_{jk_{ij}}.$$

In dem mittleren Faktor führen wir statt des Zeichens Π_i das Zeichen Σ_i im Exponenten ein, und im letzten — transponiren wir die Indizes i und j

$$A = \mathop{\Pi_i}\limits_1^n \mathop{S}\limits_{k_i} . (-1)^{\Sigma_i \eta_i} . \mathop{\Pi_j}\limits_1^m \mathop{\Pi_i}\limits_1^n a^i_{jk_{ij}}.$$

Nun sondern wir den Faktor, der sich zur ersten Determinante bezieht,

$$\mathop{S}\limits_{k_1}(-1)^{\eta_1}$$

ab, und setzen ihn in der Mitte des Ausdrucks

$$A = \mathop{\Pi_i}\limits_2^n \mathop{S}\limits_{k_i}(-1)^{\mathop{\Sigma_i}\limits_2^n \eta_i} . \mathop{S}\limits_{k_1}(-1)^{\eta_1} . \mathop{\Pi_j}\limits_1^m \mathop{\Pi_i}\limits_1^n a^i_{jk_{ij}}.$$

Bemerken wir, dass es in der Determinantenentwicklung unwichtig ist, zu welcher Indexreihe (von den beiden) sich das Summenzeichen bezieht. Daher mögen wir die Indizes k_1 und j transponieren, indem wir den Faktor $(-1)^{\eta_1}$ ausstreichen gezwungen sind, um die negative Einheit, die in den übrigen Determinanten, infolge der Transposition, entstehen kann, zu vernichten, falls sie entsteht:

$$A = \mathop{\Pi_i}\limits_2^n \mathop{S}\limits_{k_i}(-1)^{\mathop{\Sigma_i}\limits_2^n \eta_i} . \mathop{S}\limits_{j} . \mathop{\Pi_{k_i}}\limits_1^m \mathop{\Pi_i}\limits_1^n a^i_{jk_{ij}}.$$

Das Zeichen aber $\mathop{S}\limits_{j}$ können wir durch $\mathop{\Sigma_{j_1 j_2 \ldots j_m}}\limits_1^m$ ersetzen, denn falls in einem Gliede zwei Indizes identisch werden, — verschwindet es infolge der vorgehenden $\mathop{S}\limits_{k_i}$:

$$A = \mathop{\Pi_i}\limits_2^n \mathop{S}\limits_{k_i}(-1)^{\mathop{\Sigma_i}\limits_2^n \eta_i} \mathop{\Sigma_{j_1 j_2 \ldots j_m}}\limits_1^m \mathop{\Pi_{k_1}}\limits_1^m \mathop{\Pi_i}\limits_1^n a^i_{jk_{ij}}.$$

Dieser Ausdruck ist dem folgendem gleich

$$A = \mathop{\Pi_i}\limits_2^n \mathop{S}\limits_{k_i}(-1)^{\mathop{\Sigma_i}\limits_2^n \eta_i} \mathop{\Pi_{k_1}}\limits_1^m \mathop{\Sigma_j}\limits_1^m \mathop{\Pi_i}\limits_1^n a^i_{jk_{ij}}.$$

Wir haben also den Ausdruck der Raumdeterminante, deren allgemeiner Glied

$$\mathop{\Sigma_j}\limits_1^m \mathop{\Pi_i}\limits_1^n a^i_{jk_{ij}}$$

ist, gewonnen, wie er im Anfange dieses § festgestellt worden ist.

Nun aber müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

5. Die Zahl n der gegebenen Determinanten ist gerade. Das Ersetzen des Zeichens $\underset{j}{S}$ durch eine mehrfache Summe ist möglich, weil nach der Absonderung des Faktors $\underset{k_1}{S}(-1)^{\eta_1}$ eine ungerade Zahl von $\underset{k_i}{S}$ bleibt, die, falls $(-1)^{\eta_1}=-1$, die negative Einheit wieder herstellen, und wir gewinnen den Satz:

Das Produkt einer geraden Zahl von Determinanten ist eine Raumdeterminante, deren Klasse ist der Zahl der gegebenen Faktoren, und Ordnung — ihrer allgemeiner Ordnung gleich.

6. Ist aber die Zahl der gegebenen Faktoren ungerade, so bleibt ihrer nach der Absonderung des erwähnten Faktors eine gerade Zahl; infolge dessen kann die negative Einheit, falls sie ursprünglich existiert hatte, nicht mehr hergestellt werden, — und der Satz fällt.

Ist aber gefällig auch in diesem Falle einen Satz zu formulieren, so müssen wir vermuthen, dass immer $(-1)^{\eta_1}=+1$, d. h. wir müssen die 1-te Determinante durch eine Permanente (signless determinant) ersetzen, und wir gewinnen den Satz:

a) Das Produkt einer geraden Zahl von Determinanten und einer Permanente drückt sich in derselben Weise aus, wie das Produkt einer geraden Zahl von Determinanten.

b) Das Produkt einer ungeraden Zahl von Determinanten kann nicht in einer Form von einer Raumdeterminante dargestellt werden.

7. Ist $|a_{ik}|$ die Permanente der Determinante $|A_{ik}|$, so ist

$$|A_{ik}|^{2p+1}=|a_{ik}|\,|A_{ik}|^{2p}.$$

Eine Raumdeterminante ungerader Klasse i hat i Werte, weil jeder seiner wirklichen oder symbolischen Faktoren kann als Permanente angesehen werden.

Eine Raumdeterminante ungerader Klasse kann isomer sein, weil die Permanente bleibt ungeändert, wenn wir zwei ihrer Zeilen transponiren.

Jede binäre Form gerader Ordnung ist als Raumdeterminante darstellbar, und ungerader Ordnung — nur mutatis mutandis.

8. Das gewonnene Element der Determinantenproduktes verallgemeinert das innere Produkt zweier Vektoren, so das wir behaupten können, dass ein Vektor R in eine beliebige Potenz Scalar gehoben werden kann

$$R^n=a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n.$$

Ist der Vektor R invariant, so ist auch seine n-te Potenz invariant. In diesem Sinne könnten wir die scalare Potenzen eines veränderlichen Vektors brauchen (*).

9. Haben wir eine rechteckige Matrize, so können wir, mittelst des oben gezeigten Algorithmus, sie in eine beliebige gerade Potenz heben, indem

---

(*) Im Folgenden Setzen wir immer $R^n=(R^2)^{\frac{n}{2}}$.

die letzte einer Summe von $2k$-ten Potenzen aller aus der Matrize zu bildender Determinanten gleich ist (Verallgemeinerung des Binet-Cauchyschen Satzes). Zum Beispiel, betrachten wir im Raume von $n+1$ Dimensionen n Vektoren und bilden wir aus ihnen

1) Die Matrize $\| a_1 a_2, \ldots, a_n \|$.

2) Das vektorielle Produkt

$$[a_1 a_2, \ldots, a_n]$$

so haben wir

$$\| a_1 a_2, \ldots, a_n \|^{2k} = [a_1 a_2, \ldots, a_n]^{2k}.$$

Wenn wir uns auf den dreidimensionalen Raum beschränken, so gewinnen wir:

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{matrix} \right\|^{2k} = (ab)^{2k} + (ac)^{2k} + (bc)^{2k}.$$

Setzen wir hier $k=1$, so gewinnen wir die bekannte Eulersche Identität.

10. Nachdem wir das Raumprodukt von Determinanten untergesucht haben, wenden wir uns zur zweiten Form solcher Produkte — zum Pascalschen Determinantenprodukt.

Betrachten wir den Ausdruck

$$A = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^k.$$

Es ist zu beweisen, das die Zahl seiner Glieder N_n^{k+1} ist, wo N_a^b das b-te Element der a-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks ist, indem wir uns der vollständigen mathematischen Induktion bedienen.

In allen Gliedern der Entwicklung des A, die den Faktor a_i^m enthalten, sondern wir den a_i^m aus den Klammern ab, um mit einer Form X_{n-1}^{k-m} zu tun haben, deren Gliederzahl, der Vermuthung nach, N_{n-1}^{k-m+1} sei.

Folglich ist

$$N_n^k = \sum_{1}^{k}{}_m N_{n-1}^{k-m+1}$$

die Zahl der Glieder, die eine beliebige Potenz des a_i als Faktor enthalten.

Untersuchen wir nun die Glieder, die den Faktor a_i gar nicht enthalten, unters. Sie bilden eine Form X_{n-1}^k, deren Gliederzahl, der Vermuthung nach, N_{n-1}^{k+1} sei. Folglich ist die Gliederzahl von

$$A = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^k$$

der gesuchten Zahl gleich:

$$N_{n-1}^{k+1} + N_n^k = N_n^{k+1}.$$

11. Die Eigenschaft der Elemente des Pascalschen Dreiecks

$$N_{n+1}^k = \sum_{1}^{k}{}_i N_n^i$$

kann in solch einer Form dargestellt werden

$$N^k_{n+1} = \sum_{1}^{k}{}_i N^{k-i+1}_1 N^i_n,$$

dass sie folgendermassen verallgemeinert werden kann

$$N^k_{n+m} = \sum_{1}^{k}{}_i N^{k-i+1}_m N^i_n.$$

Um die Richtigkeit dieser Formel zu beweisen, zeigen wir, dass

$$N^k_{n+m+1} = \sum_{1}^{k}{}_i N^{k-i+1}_{m+1} N^i_n.$$

In der Wirklichkeit,

$$\sum_{1}^{k}{}_i N^{k-i+1}_{m+1} N^i_n = \sum_{1}^{k}{}_i \sum_{1}^{k}{}_{k_1} N^{k_1-i+1}_m N^i_n = \sum_{1}^{k}{}_{ik_1} N^{k_1-i+1}_m N^i_n =$$

$$= \sum_{1}^{k}{}_{k_1} N^{k_1}_{m+n} = N^k_{m+n+1}.$$

Daher können wir schreiben

$$\sum_{1}^{n}{}_i N^i_2 N^{k-i+1}_{n-1} = N^k_{n+1}.$$

12. Betrachten wir die Glieder, die den Faktor a^m_i enthalten; da ihre Zahl N^{k-m+1}_{n-1} ist, so enthält ihr Produkt den Faktor a_i in der Potenz

$$mN^{k-m+1}_{n-1} = N^m_2 N^{k-m+1}_{n-1}.$$

Folglich, ist der Exponent des a_i im Produkte aller Glieder von A

$$N^k_{n+1} = \sum_{1}^{k}{}_m N^m_2 N^{k-m+1}_{n-1}$$

und dieses Produkt selbst wird dem Ausdrucke gleich

$$P = (a_1 a_2, \ldots, a_n)^{N^k_{n+1}}.$$

13. Nun sollen die a_i Vektoren im Raume von n Dimensionen sein. Dann ist

$$[a_1 a_2, \ldots, a_n]^{N^k_{n+1}}$$

gleich dem Produkte der Glieder des Ausdrucks

$$A = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^k.$$

Da jedes Glied des entwickelten A eine Form E_n^k der extensiven Einheiten ist, deren Gliederzahl der Zahl der Formen E_n^k selbst gleich ist, so bilden die letzte eine, mit dem Faktor

$$[e_1 e_2, \ldots, e_n]^{N_{n+1}^k} = 1$$

multiplizierte Determinante.

Damit ist der Satz gewonnen: Die Pascalsche Determinantenpotenz

$$[a_1 a_2, \ldots, a_n]^{N_{n+1}^k}$$

ist eine Determinante, deren Vektoren den Gliedern des Ausdrucks

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^k$$

gleich sind.

14. Wenn wir

$$a_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} e_2 + \cdots + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} e_n$$

setzen, so wird

$$\frac{\partial (u)}{\partial (x)} = [a_1 a_2, \ldots, a_n].$$

Um die Pascalsche Potenz des Jacobians darzustellen, bezeichnen wir folgendermassen eine Form

$$X_n^k = \sum_{1}^{N_n^{k+1}} {}_i\, \alpha_{ki}\, a_{ki}\, (x)_{ki},$$

wo

$$a_{ki}(x)_{ki} = a_{i_1 i_2, \ldots, i_k} x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2}, \ldots, x_{i_k}^{\alpha_k}$$

und α_{ki} der entsprechende Newtonsche Koeffizient ist.

Dann haben wir

$$\left(\frac{\partial (u)}{\partial (x)}\right)^{N_{n+1}^k} = [a_1 + a_2 + \cdots + a_n]^{N_{n+1}^k} =$$

$$= |A_{ij}| = \underset{j}{S} \left| \frac{(\partial u)_{ki}}{(\partial x)_{kj}} \right| (i, j = 1, 2, 3. \ldots . N_n^{k+1})$$

$\underset{j}{S}$ bezeichnet alle Permutationen der Gruppe (j) von Variabeln.

§ 3. Vektor und Form

1. Der Satz von dem Pascalschen Determinantenprodukt hat, unter anderen, die folgende principielle Bedeutung.

Da wir infolge dieses Satzes jede Form symbolisch linear darzustellen gezwungen sind, so gewinnen wir die Möglichkeit konventionnell die Begriffe der Form und des Vektors zu identifizieren.

Bei diesen Bedingungen können wir die Vektoren in derselben Weise klassifizieren, wie die Formen.

Wir unterscheiden drei Klassen von Vektoren (*):

2. Der allgemeine Vektor soll derjenige heissen, der in der Gestalt einer Form sich mit X_n^k bezeichnet.

Der Golownoj (**) Vektor oder Hauptwektor soll derjenige heissen, der in der Gestalt einer Form sich mit X_n^n bezeichnet.

Die Hauptvektoren trennen sich auf gerade und ungerade nach dem Index n in X_n^n.

Der binäre Vektor soll der Form X_2^k identisch sein.

Zum Beispiel:

$$\sum_1^{N_n^{k+1}} {}_i\, a_i e_i = \sum_1^{N_n^{k+1}} {}_i\, a_{ki} a_{ki}(x)_{ki}\,,$$

wo

$$a_i = a_{ki}$$
$$e_i = a_{ki}(x)_{ki}.$$

Homogene Vektoren sollen diejenige heissen, die sich in Formgestalt mit einem und demselben Symbol darstellen.

Multiplizierl werden können nur homogene Vektoren, und das Produkt soll den Faktoren homogen sein.

3. Das innere Produkt einer beliebigen Zahl von Vektoren ist im Sinne des § 2 verstanden, ebenso die Potenz eines Vektors.

Das kombinatorische Produkt soll im Grassmannschen Sinne verstanden sein.

Es ist zu erwähnen, dass die Hauptvektoren noch zwei Arten von Produkte haben: die letzte und vorletzte Schiebungen, die wir so bezeichnen werden:

$$Sch_n(a_1 a_2 \ldots a_n) \text{ und } Sch_{n-1}(a_1 a_2 \ldots a_n).$$

Der Hauptvektor X_n^n hat, ausser den Potenzen $(X_n^n)^k$, die Schiebung $Sch_n(X_n^n)$; da die letzte, wenn n ungerade ist, identisch verschwindet, so verstehen wir unter $Sch_n(X_n^n)$, bei ungeradem n die Aronholdsche Invariante S, die für beliebigen n verallgemeinert werden kann.

Der binäre Vektor besitzt die folgende Schiebungsprodukte:

1) $Sch_k(X_2^k)$ und

2) $Sch_{\frac{k}{2}}(X_2^k)$ bei geradem k.

(*) Im Folgenden werden wir zwischen Form und Vektor gar nicht unterscheiden.

(**) Golownoj ist die russische Bezeichnung des Hauptvektors.

4. Befrachten wir $N_n^{n+1}-1$ Hauptvektoren und bilden wir aus ihnen die Matrize

$$\| a_1 a_2 \ldots a_i \ldots \|$$

und das kombinatorische Produkt

$$[a_1 a_2 \ldots a_i \ldots].$$

Heben wir die beiden Ausdrücke in die n-te Potenz, so erhalten wir

$$\| a_1 a_2 \ldots a_i \ldots \|^n = [a_1 a_2 \ldots a_i \ldots]^n.$$

Ist die Potenz im Sinne des § 2 verstanden, so erhalten wir die Verallgemeinerung der Trigonometrie des Riemannschen (sphärischen) Raumes; verstehen wir das Potenzieren im Sinne der Schiebung, so haben wir die Verallgemeinerung der Trigonometrie des Lobatschewskischen Raumes nach Poincaré.

5. Jede Form X_n^k ist als eine k-te Potenz eines linearen Ausdruckes mit vektoriellen Koeffizienten X_k^k darstellbar, wenn $n < k$.

Ist $n > k$, so sind die Koeffizienten Vektoren vom Typus X_n^k.

§ 4. Veränderliche Vektoren.

1. Wir betrachten den Vektor $X_n^k \equiv U$, dessen Koeffizienten von $n-1$ Veränderlichen $x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$ abhängen.

Die Formel

$$N_n^{k+1} = \sum_1^{k+1} {}_i N_{n-1}^i \ldots \tag{1}$$

lehrt uns, dass die Mannigfaltigkeit aller Derivierten von der 1-ten bis der k-ten Ordnung (eingeschlossen) ein kombinatorisches Produkt bilden:

$$\left[\mathit{\Pi}_{1}^{k}{}_m \, \mathit{\Pi}_{1}^{N_{n-1}^{m+1}}{}_i \; U_{mi} \right],$$

wo U_{mi} ist die i-te Derivierte m-ter Ordnuug des Vektors U:

$$U_{mi} = \frac{\partial^m U}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_m}}$$

(siehe § 2 am Ende).

Dieser Vektor soll mit $[U]$ bezeichnet werden und Normale heissen; die Derivierten, die die Normale $[U]$ bilden, Tangenten heissen.

2. Die Formel (1) lehrt uns auch, dass irgend eine beliebige Derivirte U_{pq}, die nicht eine Tangente ist, ist nach den Tangenten und der Normale zerlegbar:

$$U_{pq} = U_0^{pq} [U] + \sum_1^k {}_m \sum_i^{N_{n-1}^{m+1}} U_{mi}^{pq} U_{mi}.$$

Die Bedeutung der Koeffizienten werden wir in § 5 können lernen.

3. Der Vektor U, der von den x_i abhängt, soll mit V bezeichnet werden, wenn er unmittelbar von den neuen Veränderlichen y_i abhängen wird. Die Transformationsfunktionen φ_i

$$x_i = \varphi_i(y)$$

sollen ganz beliebig sein und Derivierten beliebiger Ordnungen besitzen.

Es ist leicht zu zeigen, das

$$U_{pq} = \sum_{p}^{1}{}_m \sum_{1}^{N_{n-1}^{m+1}}{}_i V_{mi} \left(\frac{(\partial y)_i}{(\partial x)_q}\right)^{(p-m+1)},$$

wo der eingeklammerte Faktor eine Funktion der Derivirten von y_i nach x_i, deren Ordnung höchtens $p-m+1$ gleich ist.

Es ist zu bemerken, dass das 1-te Glied dieser Entwicklung

$$\sum_{1}^{N_{n-1}^{p+1}}{}_r V_{pr} \frac{(\partial y)_{pr}}{(\partial x)_{pq}}$$

von den höheren Derivierten von y gar nicht abhängt.

4. Konstruiren wir jetzt die Determinantenmatrize die wir Transformationsquadrat nennen.

Von einem Punkte O in der Ebene führen wir zwei Perpendikuläre (zueinander) OA horizontal rechts und OB vertical herab. Auf der Horizontale OA messen wir k Strecken, indem die Länge der i-ten soll N_{n-1}^{i+1} sein; dasselbe messen wir; von demselben Punkt O ausgehend, auf der Verticale OB. Wir ergänzen die Figur zum Quadrat, und durch die Streckenenden führen wir entsprechend Horizontalen und Verticalen. Dann ist der Quadrat in Rechtecke getheilt, deren Seiten entsprechend $N_{n-1}^{r+1} \cdot N_{n-1}^{s+1}$ gleich sind. Nur längs der Hauptdiagonale erscheinen, statt der Rechtecke, — Quadrate, weil da $r=s$.

Diese Figur muss man sich vorstellen oder zeichnen, um den Beweis des folgenden Satzes zu verstehen.

Theorem 5. Die Normale bleibt invariant, bei der Transformation des Vektors U, welche auch die Transformationsfunktionen φ_i sein mögen (*).

Zuerst beweise ich den Satz für lineare φ_i und zuletzt für beliebige φ_i.

Sind die Transformationsfunktionen linear, so reduzieren sich die transformierten Derivierten auf die 1-te Gliederreihen, und die transformierte Normale wird:

$$\left[\prod_{1}^{k}{}_m \prod_{1}^{N_{n-1}^{m+1}}{}_i \sum_{1}^{N_{n-1}^{m+1}}{}_j V_{mj} \frac{(\partial y)_{mj}}{(\partial x)_{mi}}\right].$$

(*) In diesem Satze geht die Rede von den Veränderlichen, von denen Formkoeffizienten abhängen.

Um sie aus der ursprünglichen zu erhalten

$$[\Pi_m \Pi_i V_{mi}],$$

bilden wir k Determinanten, alle der Ordnung der Transformationsmatrize, $D_m\,(m=1, 2, 3 \ldots k)$ die so aus der letzten beschaffen sind:

1) der m-te Diagonalquadrat ist mit

$$\left(\frac{\partial\,(y)}{\partial\,(x)}\right)^{N_n^m}$$

die nach § 2 entwickelt ist, identisch;

2) der übrige Raum der Hauptdiagonale ist mit Einheiten erfüllt;

3) Der übrige Raum der Determinante ist mit O erfüllt.

Wenn wir die ursprüngliche Normale mit D_m multiplizieren, so bleiben alle ihre Vektoren unverändert, ausser der Vektoren V_{mi}, die in diejenige der transformierten Normale übergehen.

Folglich, ist

$$[U]=[V]\,\overset{k}{\underset{1}{\Pi_m}} D_m.$$

Da

$$D_m=\left(\frac{\partial\,(y)}{\partial\,(x)}\right)^{N_n^m}$$

so bekommen wir

$$[U]=[V]\,\overset{k}{\underset{1}{\Pi_m}}\left(\frac{\partial\,(y)}{\partial\,(x)}\right)^{N_n^m}=[V]\left(\frac{\partial\,(y)}{\partial\,(x)}\right)^{\overset{k}{\underset{1}{\Sigma_m}} N_n^m}=(V)\left(\frac{\partial\,(y)}{\partial\,(x)}\right)^{N_{n+1}^k}.$$

6. Sollen jetzt die Transformationsfunktionen φ_ι beliebig sein, so dass wir für die transformierte Normale die Gleichung

$$[U]=\left[\,\overset{k}{\underset{1}{\Pi_m}}\,\overset{N_{n-1}^{m+1}}{\underset{1}{\Pi_i}}\;\overset{1}{\underset{m}{\Sigma_2}}\,\overset{N_{n-1}^{r+1}}{\underset{1}{\Sigma_s}}\;V_{rs}\left(\frac{(\partial y)_s}{(\partial x)_i}\right)^{(m-r+1)}\right]$$

haben. Um die $[U[$ aus der ursprünglichen $[V]$ abzuleiten, konstruieren wir aus der Transformationsmatrize k Determinanten $D'_m\,(m=1, 2 \ldots k)$, die so beschaffen sind:

1) der m-te Diagonalquadrat ist mit

$$\left(\frac{\partial\,(y)}{\partial\,(x)}\right)^{N_n^m}$$

identisch;

2) der übrige Raum der Hauptdiagonale ist mit Einheiten erfüllt;

3) die Rechtecke, die links von und auf derselben Höhe als der m-te Diagonalquadrat liegen, sind entsprechend mit den Funktionen

$$\left(\frac{(\partial y)_s}{(\partial x)_i}\right)^{(m-r+1)}$$

erfüllt;

4) der übrige Raum ist mit 0 erfüllt.

Wenn wir die ursprüngliche $[V]$ mit D'_m multiplizieren, so bleiben alle ihre Vektoren unverändert, ausser der Gruppe V_{mi}, die in diejenigen der transformierten Normale übergehen. Aber man muss die Multiplikation in der vorgeschriebenen Folge

$$[V]D'_k D'_{k-1} D'_{k-2}, \ldots, D'_2 D'_1$$

ausführen, um die transformierte Normale nicht ihre Gestalt verliere.

Es ist leicht sich überzuzeugen, dass $D'_m = D_m$.

Daher ist

$$[U] = [V]\left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^{N^k_{n+1}}$$

was zu beweisen ist.

Nach § 2, ist auch $[U]^m$ eine Invariante, als $[u]^{2 \cdot \frac{m}{2}}$.

7. Ausser der Normale, hat der Veränderliche Vektor $U \equiv X^k_n$ noch eine Invariante — die Krümmung $K^m_{n-1}(U)$, die wir folgendermassen konstruieren.

Die Form

$$D^m U = \frac{d^m U[U]}{[U]^2}$$

hat als Koeffizienten die Normalkomponenten $U^{m\mu}_0$; die m-te Schiebung von $D^m U$ soll Krümmung heissen und mit

$$K^m_{n-1}(D^m U)$$

bezeichnet werden (m sei gerade).

8. Wenn wir uns der Transformationsformel erinnern

$$U_{pq} = \sum_p^1 {}_m \sum_1^{N^{m+1}_{n-1}} {}_i \; V_{mi}\left(\frac{(\partial y)_i}{(\partial x)_q}\right)^{(p-m+1)}$$

so ist leicht zu schliessen, dass, bei der Transformation der Normalkomponenten U^{pq}_0, nur drei Fälle giebt, wenn die höheren Derivirten von y nach x verschwinden:

1) wenn $p = 1$,

2) wenn die φ_i linear sind,

3) wenn $p = k + 1$.

Die dritte Behauptung ist darauf gegründet, dass, wenn $p = k + 1$, die Normale nur in der 1-ten Gliederreihe vorkommt; daher

$$U^{pq}_0[U] = \sum_1^{N^{p+1}_{n-1}} {}_{q'} V^{pq'}_0 \frac{(\partial y)_{pq'}}{(\partial x)_{pq}}[V],$$

wenn eine der drei Bedingungen erfüllt ist.

Nach dem oben bewiesenen Satze haben wir:

$$\left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^{N_{n+1}^{k}} U_{0}^{pq} = \sum_{1}^{N_{n-1}^{p+1}} {}_{q'} V_{0}^{pq'} \frac{(\partial y)_{pq'}}{(\partial x)_{pq}}.$$

Wenn wir uns jetzt zur Krümmung $K_{n-1}^{p}(D^{p}U)$ wenden, so haben wir nach von-Escherich's Satze:

$$\left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^{N_{n+1}^{k}(n-1)} K_{n-1}^{p}(D^{p}U) = K_{n-1}^{p}(D^{p}V)\left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^{p}.$$

Bei allgemeinem p ist die Krümmung invariant nur in der projektiven Gruppe.

Ist $p=k+1$, so gilt die Invarianz in der allgemeinen Transformationsgruppe.

9. Die Invarianzbeziehung können wir so schreiben

$$K_{n-1}^{p}(D^{p}U) = K_{n-1}^{p}(D^{p}V)\left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^{p-N_{n+1}^{k}(n-1)}$$

welche Gleichung, verknüpft mit der Gleichung der Normale, die absolute Invariante liefert

$$\frac{\left\{K_{n-1}^{p}(D^{p}U)\right\}^{N_{n+1}^{k}}}{[U]^{p-N_{n+1}^{k}(n-1)}}$$

welche besonders wichtig ist, wenn $p=k+1$.

10. Wenden wir uns zum Hauptvektor, so bleiben für ihn alle Invarianten gültig, die für den allgemeinen Vektor bewiesen sind.

Ausserdem hat der Hauptvektor X_{n}^{n} nach eine zweite Reihe von Invarianten, wenn wir die veränderlichen Koeffizienten Funktionen von n Variabeln uns denken (und nicht von $n-1$, wie im untersuchten Falle des allgemeinen Vektors X_{n}^{k}).

Der Grund dieses Umstandes ist die Identität

$$N_{n+1}^{n} = \sum_{1}^{n}{}_{i} N_{n}^{i} = N_{n}^{n+1}$$

die lehrt, dass in diesem Falle tangentiell alle Derivirten von der 1 bis der $n-1$-er Ordnung sind, und die Normale

$$[U] = \left[\overset{n-1}{\underset{1}{\Pi_r}} \overset{N_n^n}{\underset{1}{\Pi_s}} U_{rs}\right]$$

ist.

Da der Beweis derselbe ist, führe ich nur die Resultaten an.

$$1)\quad [U]=[V]\left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^{N_{n+2}^{n-1}},$$

$$2)\quad K_n^p(D^pU)\left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^{nN_{n+2}^{n-1}}=K_n^p(D^pV)\left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right)^p,$$

$$3)\quad \frac{\{K_n^p(D^pU)\}^{N_{n+2}^{n-1}}}{[U]^{p-nN_{n+2}^{n-1}}}.$$

NB den Fall, wenn $p=n$! Die Invarianz ist dann gültig für beliebige Transformationsfunktionen φ_i.

11. Der Hauptvektor X_n^n hat noch zwei Besonderheiten.

a) Die absolute Invariante, wenn $p=n$, kann von der Begrenzung befreit werden, dass n gerade sein muss: im Falle eines ungeraden n soll man den Ausdruck bilden

$$K_n^{n+1}(D^nU),$$

der die verallgemeinerte Aronholdsche Invariante S bezeichnen soll. Die grosse prinzipielle Bedeutung dieser Eigenschaft des Hauptvektors wird im folgenden § beleuchtet.

b) Statt der Normale, können wir uns der vorletzten Schiebung der n 1-ten Derivirten

$$Sch_{n-1}(U_1'U_2',\ldots,U_n')$$

benutzen, um mit ihr die absolute Invariante zu bilden, aber es ist ganz schwer sie geometrisch zu intetpretieren.

12. Auch die binäre Form hat noch zwei Reihen Invarianten, wenn wir ihre Koeffizienten Funktionen nicht von einer, wie es die Theorie des allgemeinen Vektors fordert, sondern von zwei Veränderlichen abhängen. Der Grund besteht in der Identität:

$$N_2^{n+1}=1+N_2^n.$$

a) Die 1-te Reihe der binären Form X_2^n benutzt als Tangenten die n-ten Derivierten und als Normale — den Vektor

$$[U]=\left[\prod_1^n{}_m U_{nm}\right]$$

der immer nur in der projektiven Gruppe invariant bleibt, mir Ausnahme des Falles $n=2$, der sich zum Hauptvektor bezieht.

b) Die zweite Reihe benutzt als Normale die $\frac{n}{2}$-te Schiebung der 1-ten Derivierten

$$Sch_{\frac{n}{2}}(U_1'U_2')$$

die eine absolute Invariante in der allgemeinen Transformationsgruppe liefert, aber ihre geometrische Interpretation ist schwierig.

13. Wenn wir den allgemeinen Vektor $U \equiv X_2^k$ betrachten, als von einer Veränderlichen abhängend, so ist seine Normale

$$[u] = [U' U'' U''', \ldots, U^{(k)}].$$

Ihre Invarianz kann man sehr einfach konstatieren, womit wir die allgemeine Theorie, die keine, so zu sagen, „sinnliche" Verifikation zulässt, stützen.

Der Leser mag den Fall selbständig behandeln.

§ 5. Die Rauminvariante

Am Ende meiner Arbeit gehe ich zur geometrischen Interpretation der absoluten Invariante des Vektors mit veränderlichen Koeffizienten. Ich werde mich auf den Hauptvektor X_n^n gründen, doch sind alle Resultate auf den allgemeinen Vektor übertragbar.

1. Die Riemannsche Massbestimmung

$$ds^2 = (dR)^2$$

genügt um zu beweisen, dass die Fläche an sich eine Invariante besitzt: das ist die Gausssche Krümmung. Wenn wir aber zum Raume von n Dimensionen übergehen, ist diese Massbestimmung nicht genügend — es müssen, ausser der 1-ter Differentiale, auch die höheren eingeführt werden, nämlich —

$$\Phi = \left(\sum_1^{n-1} {}_i \, d^i U \right)^2.$$

Diese Form ist heterogen, aber wir können ihr eine Gestalt einer quadratischen homogenen Form geben, wenn wir die Bezeichnung der Pascalschen Potenz des Jakobians einführen:

$$\Phi = \sum_1^{n-1} {}_{ii'} \sum_1^{N_n^n} {}_{mm'} (U_{im} U_{i'm'}) \, (dx)_{im} \, (dx)_{i'm'}.$$

Die Determinante dieser Form ist invariant, weil sie nichts anders ist, als $[U]^2$ der Quadrat der Normale.

2. Die absolute Invariante

$$\frac{\{K_n^n (D^n U)\}^{N_{n+2}^{n-1}}}{[U]^{n - n N_{n+2}^{n-1}}}$$

ist als Funktion der Koeffizienten der Form Φ ausdrückbar.

Da für den Nenner der Satz schon bewiesen ist, so bleibt es nur für den Zähler zu beweisen. Es ist noch zu bemerken, dass wenn n ungerade ist, nimmt die Invariante die Gestalt an

$$\frac{\left\{K_n^{n+1}(D^n U)\right\}^{N_{n+2}^{n-1}}}{[U]^{(n+1)\left(1-N_{n+2}^{n-1}\right)}}$$

wo K_n^{n+1} die verallgemeinerte Aronhold'sche Invariante S bedeutet.

3. Irgend eine n-te Derivirte des Vektors U (die m-te in der Reihenfolge) U_{nm} ist in der folgender Form darstellbar

$$U_{nm} = U_0^{nm}[U] + \sum_{1}^{n-2}{}_i \sum_{1}^{N_n^{i+1}}{}_k U_{ik}^{nm} U_{ik} + \sum_{1}^{N_n^n}{}_\varrho U_\varrho^{nm} U_\varrho.$$

Hier ist U_ϱ die Tangente der höchsten Ordnung, d. h. der $n-1$-ter.

Die Koeffizienten der Zerlegung sind die Verallgemeinerungen der Christoffelschen Symbole 2-ter Gattung, und sind durch die verallgemeinerte Christoffelschen Symbole 1-ter Gattung ausdrückbar, was aus den Gleichungen folgt

$$\left(\frac{2}{nm} \cdot U_{rs}\right) = \sum_{1}^{n-2}{}_i \sum_{1}^{N_n^{i+1}}{}_k U_{ik}^{nm} (U_{ik} \cdot U_{rs}) + \sum_{1}^{N_n^n}{}_\varrho U_\varrho^{nm} (U_\varrho U_{rs}).$$

4. Die Christoffelschen verallgemeinerten Symbole 2-ter Gattung haben die folgende Bedeutung

$$U_0^{nm} = \frac{U_{nm}[U]}{[U]^2},$$

$$U_{ik}^{nm} = \frac{U_{nm}[U_{ik}]}{U_{ik}[U_{ik}]} = \frac{[U_{ik}^{nm}][U]}{[U]^2},$$

$$U_\varrho^{nm} = \frac{[U_\varrho^{nm}][U]}{[U]^2}.$$

Hier bedeutet $[U_{ik}]$ die Normale, in der der Vektor U_{ik} durch der Normale selbst ersetzt ist; der Vektor $[U_{ik}^{nm}]$ bedeutet die Normale, in der der Vektor U_{ik} durch den Vektor U_{nm} ersetzt ist.

5. Die Komponente des Vektors $[U_{ik}]$ nach dem Vektor U_{rs} hat den Wert

$$\frac{[U_{ik}][U_{rs}]}{U_{rs}[U_{rs}]} = -\frac{[U_{ik}][U_{rs}]}{[U]^2},$$

der das Element der zum quadrat der Normale $[U]^2$ reziproken Determinante ist.

Es ist selbstverständlich, dass $[U_{ik}]$ nach der Normale $[U]$ keine Komponente hat.

6. Zerlegen wir jetzt den Vektor

$$[U_{ik}^{nm}] = M_0^{ik}[U] + \sum_{1}^{n-2}{}_r \sum_{1}^{N_n^{r+1}}{}_s M_{rs}^{ik} U_{rs} + \sum_{1}^{N_n^n}{}_\varrho M_\varrho^{ik} U_\varrho.$$

Die Koeffizienten M haben den Wert:

$$M_0^{ik} = \frac{[U_{ik}^{nm}][U]}{[U]^2} = U_{ik}^{nm},$$

$$M_{rs}^{ik} = \frac{[U_{ik}^{nm}][U_{rs}]}{U_{rs}[U_{rs}]}.$$

Der Zähler verschwindet für alle Komponenten des Vektors $[U_{rs}]$, ausser für die Komponente mach U_{ik}; daher können wir schreiben:

$$M_{rs}^{ik} = -\frac{[U_{ik}^{nm}]U_{ik}}{U_{rs}[U_{rs}]} \frac{[U_{ik}][U_{rs}]}{[U]^2} = -\frac{U_{nm}[U]}{[U]^2} \frac{[U_{ik}][U_{rs}]}{[U]^2} =$$
$$= -U_0^{nm} \frac{[U_{ik}][U_{rs}]}{[U]^2}.$$

Also ist:

$$[U_{ik}^{nm}] = U_{ik}^{nm}[U] - U_0^{nm} \sum_{1}^{n-2}{}_r \sum_{1}^{N_n^{r+1}}{}_s \frac{[U_{ik}][U_{rs}]}{[U]^2} U_{rs} - U_0^{nm} \sum_{1}^{N_n^n}{}_\varrho \frac{[U_{ik}][U_\varrho]}{[U]^2} U_\varrho.$$

Im speziellen Falle haben wir

$$[U_\varrho^{nm}] = U_\varrho^{nm}[U] - \sum_{1}^{n-2}{}_r \sum_{1}^{N_n^{r+1}}{}_s U_0^{nm} \frac{[U_\varrho][U_{rs}]}{[U]^2} U_{rs} - \sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho'} U_0^{nm} \frac{[U_\varrho][U_{\varrho'}]}{[U]^2} U_{\varrho'}.$$

Im Folgenden werden wir den Ausdruck

$$\frac{[U_\varrho][U_{\varrho'}]}{[U]^2}$$

einfacher so bezeichnen: $(\varrho\varrho')$.

7. Die Derivierte der Normale

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}[U] \equiv \frac{\partial}{\partial x_\varphi}[U] = \sum_{1}^{N_n^n}{}_\varrho [U_\varrho^{\varrho\varphi}] (*)$$

reduziert sich auf die angewiesene Summe, weil die vorangehenden Summanden verschwinden. Daher haben wir die folgende Zerlegung:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}[U] = \sum_{1}^{N_n^n}{}_\varrho [U_\varrho^{\varrho\varphi}] = \sum_{1}^{N_n^n}{}_\varrho U_\varrho^{\varrho\varphi}[U] - \sum_\varrho \sum_r \sum_s U_0^{\varrho\varphi} \frac{[U_\varrho][U_{rs}]}{[U]^2} U_{rs} -$$
$$- \sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho\varrho'} U_0^{\varrho\varphi} \frac{[U_\varrho][U_{\varrho'}]}{[U]^2} U_{\varrho'}.$$

(*) $U_{\varrho\varphi}$ heisst die n-te Derivirte. indem wir zu der Gruppe von $n-1$ Veränderlichen (ϱ) die n te x_φ zufügen.

Es ist zu bemerken die Identität

$$\sum_{1}^{N_n^n}{}_{\varrho}\, U_{\varrho}^{\varrho\varphi} = \frac{\partial \lg}{\partial \varphi} \sqrt{[U]^2}.$$

8. Jetzt sind wir im Stande die $(n+1)$-te Derivierte des Vektors U darzustellen; zum Beispiel, $\frac{\partial}{\partial\varphi} U_{nm}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\varphi} U_{nm} &= \frac{\partial}{\partial\varphi} U_0^{nm} [U] + U_0^{nm} \frac{\partial}{\partial\varphi} [U] + \\
&+ \sum_1^{n-2}{}_i \sum_1^{N_n^{i+1}}{}_k \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} U_{ik}^{nm} U_{ik} + U_{ik}^{nm} \frac{\partial}{\partial\varphi} U_{ik} \right) + \\
&+ \sum_1^{N_n^n}{}_{\varrho} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} U_{\varrho}^{nm} U_{\varrho} + U_{\varrho}^{nm} \frac{\partial}{\partial\varphi} U_{\varrho} \right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial\varphi} U_0^{nm} [U] + \sum_1^{N_n^n}{}_{\varrho} U_{\varrho}^{\varrho\varphi} U_0^{nm} [U] - \\
&- \sum_{\varrho} \sum_i \sum_k U_0^{nm} U_0^{\varrho\varphi} \frac{[U_{\varrho}]\,[U_{ik}]}{[U]^2} U_{ik} - \sum_1^{N_n^n}{}_{\varrho\varrho'} U_0^{nm} U_0^{\varrho\varphi} (\varrho\varrho') U_{\varrho'} + \\
&+ \sum_1^{n-2}{}_i \sum_1^{N_n^{i+1}}{}_k \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} U_{ik}^{nm} U_{ik} + U_{ik}^{nm} \frac{\partial}{\partial\varphi} U_{ik} \right) + \sum_1^{N_n^n}{}_{\varrho} \frac{\partial}{\partial\varphi} U_{\varrho}^{nm} U_{\varrho} + \\
&+ \sum_1^{N_n^n}{}_{\varrho} U_{\varrho}^{nm} U_0^{\varrho\varphi} [U] + \sum_1^{N_n^n}{}_{\varrho\varrho'} U_{\varrho}^{nm} U_{\varrho'}^{\varrho\varphi} U_{\varrho'} + \sum_1^{N_n^n}{}_{\varrho} \sum_1^{n-2}{}_i \sum_1^{N_n^{i+1}}{}_k U_{\varrho}^{nm} U_{ik}^{\varrho\varrho} U_{ik} = \\
&= [U] \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} U_0^{nm} + \sum_1^{N_n^n}{}_{\varrho} U_{\varrho}^{\varrho\varphi} U_0^{nm} + \sum_1^{N_n^n}{}_{\varrho} U_{\varrho}^{nm} U_0^{\varrho\varphi} \right) + \\
&+ \sum_1^{n-2}{}_i \sum_1^{N_n^{i+1}}{}_k \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} U_{ik}^{nm} U_{ik} + U_{ik}^{nm} \frac{\partial}{\partial\varphi} U_{ik} + \sum_1^{N_n^n}{}_{\varrho} U_{\varrho}^{nm} U_{ik}^{\varrho\varphi} U_{ik} - \right. \\
&\left. - \sum_1^{N_n^n}{}_{\varrho} U_0^{nm} U_0^{\varrho\varphi} \frac{[U_{\varrho}]\,[U_{ik}]}{[U]^2} U_{ik} \right) + \\
&+ \sum_1^{N_n^n}{}_{\varrho} U_{\varrho} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} U_{\varrho}^{nm} + \sum_1^{N_n^n}{}_{\varrho'} U_{\varrho'}^{nm} U_{\varrho}^{\varrho'\varphi} - \sum_1^{N_n^n}{}_{\varrho'} U_0^{nm} U_0^{\varrho'\varphi} (\varrho\varrho') \right).
\end{aligned}$$

Stellen wir die $n+1$ Veränderlichen $(m)\varphi$ in irgend einer andern Permutation $(m')\varphi' = (m)\varphi$ vor, so bekommen wir, den ersten und den dritten Zerlegungsglied betrachtend:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} U_0^{nm} - \frac{\partial}{\partial\varphi'} U_0^{nm'} + \sum_1^{N_n^n}{}_\varrho (U_\varrho^{\varrho\varphi} U_0^{nm} - U_\varrho^{\varrho\varphi'} U_0^{nm'}) +$$
$$+ \sum_1^{N_n^n}{}_\varrho U_0^{\varrho\varphi} U_\varrho^{nm} - U_0^{\varrho\varphi'} U_\varrho^{nm'}) = 0.$$

Das ist die verallgemeinerte Codazzische Formel, indem wir den mittleren Glied identisch verschwinden lassen können.

9. Der dritte Zerlegungsglied liefert die Formel:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} U_\varrho^{nm} - \frac{\partial}{\partial\varphi'} U_\varrho^{nm'} + \sum_1^{N_n^n}{}_{\varrho'} (U_{\varrho'}^{nm} U_\varrho^{\varrho'\varphi} - U_{\varrho'}^{nm'} U_\varrho^{\varrho'\varphi'}) =$$
$$= \sum_1^{N_n^n}{}_{\varrho'} (U_0^{nm} U_0^{\varrho'\varphi} - U_0^{nm'} U_0^{\varrho'\varphi'}) \, (\varrho\varrho').$$

In der rechten Seite der Gleichung haben wir den verallgemeinerten Riemann'schen Symbol zweiter Gattung, der sich durch die verallgemeinerte dreigliedrige Symbole Christoffels ausdrücken läßt.

10. Die absolute Invariante

$$\frac{\{K_n^n(D^n U)\}^{N_{n+2}^{n-1}}}{[U]^{n\left(1-N_{n+2}^{n-1}\right)}}$$

als eine Determinante n-ter Klasse n-ter Ordnung, bei geradem n, läßt sich als eine Funktion solcher verallgemeinerten Riemannschen Symbole darstellen, was aus den Bildungs nnd Zerlegungs Gesetze folgt.